Bevezetés

A matematika tanulása feladatokon keresztül történik. Azt, hogy mikor és milyen feladatok kerülnek, kerüljenek „bevetésre” számos tényező befolyásolja, azonban alapvetően fontos, hogy ehhez a tanárok megfelelő feladatkultúrával rendelkezzenek. Ez nemcsak azt jelenti, hogy minden témához megfelelő mennyiségű és minőségű „feladatkészletük” legyen, és ezeket alkalmasan fel is tudják használni, hanem azt is, hogy ezeket a feladatokat „kezelni” is tudják. Például tudjanak feladatokat különböző szempontok szerinti csoportosítani, rendezni, de képesek legyenek feladatokat akár át is alakítani.

A matematikaoktatásban a tanári feladatkultúra átalakulóban van, a helyes eredményre jutás, a hibátlan feladatmegoldás továbbra is fontos célok, de emellett egyre nagyobb hangsúlyt kap annak a folyamatnak is a figyelembe vétele, amely megoldáshoz, eredményhez vezet. Ennek vizsgálata, tudatosítása, - a kognitív pszichológia eszközeit is segítségül hívva -, támogatja a feladatmegoldás sikerességét és olyan kompetenciák kialakulását/fejlesztését, amelyek további problémák megoldását is támogatják.

A feladatkészletből nem hiányozhatnak olyan feladatok, amelyek sokrétűen felhasználhatók, alakíthatók és amelyek megoldása során a matematikai kompetenciákon kívül számos más kompetencia is fejlődik.

Az iskolában alkalmazásra kerülő valóságközeli feladatok a híd szerepét töltik be a valóságos helyzetek, problémák és a (megoldáshoz szükséges) már meglevő absztrakt ismeretek között.

Azok a valósnak mondott szituációk, amelyekkel a tanulók dolgoznak gyakran csak közelítik valamilyen módon a tényleges valóságot, hiszen különben túl bonyolult, nagyon komplex helyzettel kellene megbirkózniuk így inkább „valóságközeliek”..

A valóságközeli feladatok körébe a továbbiakban a teljesen valós helyzeteken alapuló feladatokat is bevesszük. Ezzel is hangsúlyozva, hogy a különbség a kétféle feladat között sokszor igen csekély, különösen módszertani szempontból.

A jegyzet célja, hogy elsősorban felső tagozaton illetve középiskolában matematikát tanító és a későbbiekben tanítani szándékozók számára a valóságközeli feladatokkal kapcsolatban módszertani ismereteket, példa és feladatanyagot adjon.

A zárt és nyitott valóságközeli feladatokkal foglalkozó két első fejezetben nemcsak alapvető fogalmakkal, módszertani vonatkozásokkal, lehet megismerkedni, hanem a témával kapcsolatos néhány kutatási eredménnyel, és egy rövid „kirándulás" erejéig történeti vonatkozásokkal is.

A beöltöztetett és valóságközeli feladatok kapcsolatával foglalkozó rész a hagyományos szöveges feladatokat és az ezektől sokszor nem is annyira különböző valóságközeli feladatokat vizsgálja kiemelve eltérő módszertani szerepüket.

A valóságközeli feladatok készítésének lehetőségei külön részbe kerültek, hiszen a valós tartalmú zárt és nyitott feladatok nem különülnek el élesen egymástól. Előállításukhoz nemcsak ötletes szituációk, hanem mint majd olvasható, a feladatvariáció módszere is jól alkalmazható.

Végül külön fejezet tárgyalja azokat a lehetőségeket, amelyek segítik a valóságközeli feladatokkal való foglalkozást; elsősorban a tanítási órákon alkalmazható módszereket és néhány új technikai segítség alkalmazását.

Az egyes fejezetekben számos feladat található, ezek igen változatosak. Konkrét feladatok megoldásán kívül ez lehet például feladatkészítés-átalakítás, módszertani megjegyzés, vagy más reflexió készítése, de akár adott témához „utánaolvasás" is. A feladatok gyakran többféleképpen oldhatók meg, de egy-egy lehetséges megoldás, vagy ahhoz segítség szinte minden esetben rendelkezésre áll.

A jegyzet feladatanyaga változatos, de nem nehéz. Nem volt cél kimondottan igényes matematikai tartalmú feladatok bemutatása, inkább a sokszínűség, a sokféle lehetőség felsorakoztatásával a gondolatébresztés majdani, saját céloknak megfelelő feladatok készítéséhez, feldolgozásához.

Amíg az iskolai számonkérés elsősorban absztrakt ismeretek alkalmazását kívánja elsősorban „tiszta matematikai" feladatokban, nem várható gyökeres változás a gyakorlati, alkalmazásra képes tudás kialakításának terén. Hiszen úgymond „minek",

ha az iskolai tanulás-ismeretelsajátítás gyakorlatilag a különböző vizsgákon való sikeres szereplésre irányul.

Nemcsak játék a szavakkal, ha a „vizsga" helyett, ami gyakorlatilag csak az „iskolai tudás" mérését jelenti, a tágabb értelmű iskolai és iskolán kívüli „megmérettetés" is gyakran hallható már. Ezzel hangsúlyozódik az az igény is, hogy a tanulóknak olyan (iskolában is szerzett) ismeretek birtokába kell kerülniük, amelyekkel megállják helyüket az életben. Ez a törekvés jelentősen meghatározza az aktuális módszertani kutatásokat és kezd megjelenni többek között az utóbbi idők a felméréseiben is.

Valóságközeli zárt feladatok

A tankönyvekben, feladatgyűjteményekben a problémafelvető illetve kidolgozott példák, a gyakorló feladatok és az ismeretek elmélyítésére szánt alkalmazási feladatok között találkozhatunk *szöveges feladatokkal*. Ezeknek a módszertani szerepe különböző, de általában az a közös vonásuk, hogy zártak.

Fogalmak, példák

Egy feladatot zártnak nevezünk, ha megadott kezdeti feltételek mellett keres meghatározott, egyértelmű kérdésekre, egyféle módon választ. Ez a meghatározás segíti annak megfogalmazását is, hogy egy feladatot mikor nevezünk nyitottnak. Ugyanis *ha a zárt feladat feltételeinek valamelyike nem teljesül, akkor a feladat már nem zárt, hanem nyitott.* Ha nem megadottak például a kezdeti feltételek, akkor nyitott kezdetű, ha nem meghatározottak pontosan a feltett kérdés(ek), nyitott végű feladatról beszélhetünk.

Feladatok és problémák nyitottságának kérdését részletesebben tárgyalja Blum, (1999). Blum besorolásában a „feladat” az egyszerű gyakorlófeladatokat jelenti, a „probléma” így nem feladat. Német nyelvterületen gyakori a „feladat” és „probléma” ilyen szétválasztása, nálunk a feladat általános értelemben használatos.

Blum (1999) a kezdeti állapotból végállapotba jutás közötti „folyamatot” (megoldási mód) is figyelembe veszi annak eldöntéséhez, hogy egy feladat nyitottnak vagy zártnak tekinthető. Amennyiben ez a folyamat „többértelmű” (többféle különböző módon lehetséges eljutni a végállapotba), szintén nyitott problémáról/feladatról van szó, még ha a kezdeti/ végállapot zárt is.

Ezzel a lehetőséggel jelentősen szélesedik a nyitott feladatok köre, hiszen így például azok az egyszerű számítási feladatok is nyitottnak tekinthetők, ahol a műveletvégzés többféleképpen is történhet. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha egy feladat ránézésre zárt az egyértelmű kezdeti és végső feltételek (a feladat kérdése) miatt, több megoldási utat találva akár nyitottá is tehető. Ebben a fejezetben a „zárt” elnevezés ez utóbbi értelemben esetleg nyitottá tehető feladatokra is vonatkozik.

- **Feladat**

Adjon meg legalább két példát olyan feladatra, amely látszólag zárt!

M.

Például ilyenek a „Számolj ügyesen” típusú feladatok, amelyek esetében legalább két módszer (egy „ügyes” és egy szokványos) mindig adódik a megoldáshoz.

A szöveggel megadott feladatok egy része nem adott szituációban megfogalmazott feladat, csupán a feladat szöveggel megadott változatáról van szó. Például:

Adj meg öt 6-tal és 4-gyel osztható számot!

Ezeket valójában nem tekintjük szöveges feladatnak.

A *szöveges feladatokban* valamilyen valós, (ahhoz közeli) vagy „valótlan” helyzetben kell felismerni a matematikai tartalmat, azaz egy matematikai modellt kell készíteni. A továbbiakban a valós vagy a valóshoz lényegében közeli helyzeten alapuló feladatok *valóságközeli feladatok* –ként szerepelnek.

A következőkben néhány példa következik olyan tankönyvi zárt feladatra, amelyek valóságközeliek.

Boglárka előre csomagolt felvágottat vett a boltban. Kíváncsi volt, hogy olcsóbb lenne-e, ha a pultnál venné. Megnézte a címkét. Az egységár sajnos túlságosan elmosódott volt, de ennyit el tudott olvasni a szalámin: Tömege:0,187kg, Ára:154,1 Ft. A pultnál ebből a fajtából egy kilogramm 795 Ft-ba kerül. (Szerinted mire jutott?)

6.o. TK. 55.

A feladat a törtekkel kapcsolatos számításokhoz kapcsolódik. A mindennapi életben előforduló helyzetről van szó. Gyakran érdemes utánaszámolni, hogy valamilyen áruféleséget nem lehet-e olcsóbban is beszerezni, ennek lehetősége az eltérő csomagolások, vagy gyártó cégek miatt időnként ugyanazon a helyen is adott.

A helyzet azonban nem tekinthető teljesen valósnak, hiszen egy tájékozott hatodikos már tudja, hogy a csomagolásnak külön díja van - számolás nélkül is -, és az is tény, hogy ilyen kalkuláció bolti keretek között, megfelelő eszköz nélkül elég nehézkessé tenné a vásárlást, ugyanis itt kerekítés a kis árkülönbség miatt nem használható.

A következő tankönyvi feladatok a mindennapi életben előforduló „matematika” használatra mutatnak egyszerű példákat.

A család túróscsuszát vacsorázik. Az asztalon tejfölös pohár áll. Címkéjén ez olvasható: Zsírtartalma 12 %. Mit jelent ez?

6.o. TK. 66./ 152.

Hány liter tiszta narancsléből lehet készíteni egy liter

a)12%-os b) 40%-os narancsitalt?

6.o. TK. 68./162

Mérd meg egy tejesdoboz méreteit! Valóban 1 liter az űrtartalma?

6.o. TK. 152./ 361.

Az előbbi feladatok is jól példázzák, hogy akár egyetlen valós téma, - amely itt az étkezés-, jól kihasználható különböző matematikai anyagrészek tanításához, egyszerű feladatok megfogalmazásához.

- **Feladat**

Keressen példákat tankönyvekben valóságközeli, zárt feladatokra, és gondolja meg mennyire valós a szituáció, milyen szerepe, helye van ezeknek a feladatoknak az oktatásban!

Mo.

Például rengeteg százalékszámítással kapcsolatos olyan feladat van, amely pénzzel kapcsolatos, mondjuk megtakarítással, de az adatok nem valósak illetve a hitelkonstrukció irreálisan leegyszerűsített. Ezek szerepe az, hogy egyszerű modellt adva a számításhoz a tanulók megismerkedjenek az alapvető napi ismeretekkel például a kölcsönfelvétellel kapcsolatban. Ilyen modellek a középiskolában továbbfejleszthetők és árnyaltabb modell is készíthető vagy esetleg közvetlenül bankoktól beszerezhető. Erre érdemes felhívni a tanulók figyelmét is.

- **Feladat**

Válasszon egy mindennapokban előforduló témát, és készítsen ezzel kapcsolatos, különböző matematikai tartalmú valóságközeli feladatokat.

M.

Például néhány ötlet:

1. Színház, kultúra
- Családi, osztállyal történő színházlátogatás konkrét költségei, megadott feltételek mellett.
- Statisztikai adatok ábrázolása könyvolvasással, színházlátogatással kapcsolatban
2. Reklámok

- Adott reklámban szereplő százalékos kedvezmény és a feltüntetett árak „egyeztetése”
- Hitelnyújtási hirdetés adataiból a visszafizetendő összeg kiszámítása
- Egy adott áruházlánc reklámújságjaiban szereplő adott árucikkek árainak hosszabb távú figyelése és az áralakulás százalékos illetve grafikus megjelenítése

3. Újságcikkek

   Az egyik ingyenes fővárosi újságban jelent meg a következő hír 2014 júniusában:

   „Nagy sikerrel zárult a 13. Bringázz a munkába! (Bam !) kampány: a közel 9000 résztvevő mintegy 2 millió kilométert tekert 5 hét alatt, mely a kampány történetében egyedülálló.”

   a) Hányszor érné körül a Földet ez a távolság?

   b) Mennyit biciklizett átlagosan egy résztvevő?

   M.

   a) Körülbelül ötvenszer

   b) Körülbelül naponta 5 km-t.

A mindennapokkal, a valós problémákkal a matematika oktatása során gyakorlatilag mindig foglalkoztak. Ennek a témának a vizsgálata hátteret és új tartalmakat is ad valós tartalmú feladatok mai tárgyalásához.

Történelmi távlatok

A különböző korok iskoláiban, a tanított matematika tananyagot általában összekapcsolták a valós élettel. Ez az igény leginkább az alsófokú oktatásban jelentkezett, de különböző módon és mértékben minden oktatási szinten megtalálható volt. A latin, mint a tudomány nyelve századokon át meghatározta az oktatás, elsősorban a közép és felsőfokú oktatás nyelvét. Magyarországon az első magyar nyelvű matematika/számtan oktatásához kapcsolható művek a 16. század táján jelentek meg, protestáns kiadásban, melyek a kornak megfelelő színvonalú elemi számtankönyvek voltak, de protestáns középfokú iskolákban is használták őket. Ezekben nemcsak a kor tankönyveinek jellegzetességeivel és a magyar korabeli szaknyelvvel találkozhatunk, de az akkori iskolai alkalmazásokról is valamennyire képet kaphatunk. Az elemi ismeretek mellett igen sok gyakorlati feladat is szerepelt bennük (Filep, L. 1997 196-198)

*Maróthi György (*1715-1744) 1743-ban Debrecenben megjelent, magyarul írt, ma is élvezhető nyelvezetű híres "Arithmetica"-ja előszavában megemlíti, hogy olyan dolgokra igyekszik könyvével megtanítani a diákokat, amelyre a gyakorlati életben szükségük van, s hogy a példák összeállításánál, azokat különböző területekről választotta, hogy a "*tanuló észre vehesse mi hasznai lehessenek a Számvetés Nemeinek a közönséges életben; és miképpen kelljen bánni a Számokkal, az illyen különböző alkalmatosságokban."*

Külön részben foglalkozik a konkrét műveletekhez kapcsolódó gyakorlati példák után más, a mindennapi életben fontos számításokkal. Ezek közé tartozik például a "Társaság regulája", amely azokat a számításokat mutatja be, amelyekre akkor van szükség, amikor néhány kereskedő társaságba tömörülve bizonyos pénzt bead, s haszon vagy kár esetén ki kell számítani a résztvevők részesedését. Külön figyelmet érdemel, hogyan számít például árnyékból toronymagasságot.

"Másodszor magyarázzuk-meg még azt-is, miképen kell a' Toronynak, vagy más épületnek, vagy élö-fának a 'magasságát az Árnyékából meg-tudni?

E' pedig így lehet -meg:

Mikor a' Nap fűt, akármikor, egy egyenes rudat, vagy páltzát dugj-le a' földbe, egyenesen, ónas sinór'mérték szerént. Ennek mérd-meg az árnyékát, hány újnyi? Mérd-meg a' páltzát magát-is, de tsak azt a részét, a'melly kivül van a 'földön. Továbbá azon szempillantásban mérd-meg a'Torony ' árnyékát is, a' hegyitől fogva egyenesen , nem a Torony ' tövéig, hanem addig a' helyig, a'melly a' Torony tetejinek egyenesen alatta van; és a'hova p.o . a' viz a' Torony tetejiből le-tseppenne; melly rend szerént a' Torony belsö tágasságának a'leg-közepe szokott lenni. Ird le már a ' Hármas Reulában, leg-elöl a'páltza árnyékát: utánna a' páltza magasságát, : 3-dik helyre a' Torony' árnyékát. E' három számhoz keress 4-diket. A' leszsz a' Torony magasságának mértéke. ...

NB. 1.Ha teá-vígyázz, és meg-várod ,a'mikor a' páltzának az árnyéka egyenlövé leszsz a' magasságával; (melly nálunk , a' nyári Hónapokban , minden nap' meg-esik dél-tájban; söt aratáskor még reggeli 9, és dellyesti 3 óra tájban,) ollyankor a' Torony magassága is egyenlö az Árnyékával: és így nem kell hozzá számvetés.

NB.2. Ha az árnyék nem egyenes helyen esik, ezzel a' móddal nem lehet élni."

(Maróthi, 1743, 366.-367.o.)

A Mária Terézia által kiadott I. Ratio Educationis (1777), mely 1806-ig, a II. Ratio-ig volt érvényben, részletesen rendelkezett a különböző iskolatípusokban folyó oktatásról, melyek:

a háromféle népiskolatípus, a három évfolyamú grammatikai iskola vagy kisgimnázium, a két évfolyamú „humán” tárgyak osztálya, a kétéves filozófiai osztály valamint az akadémiai és egyetemi képzés.

Az előírt tankönyvek segítségével látható például, hogy az alsóbb osztályokban valóban törődtek a gyakorlati alkalmazásokkal, de nem csak ezekben. A matematika hasznának megmutatásával a filozófiai osztályokban, az elméleti órák melletti alkalmazott matematikai órákon (*„mathesis adaplicata”) a Ratio a geodéziának, a hidrotechnikának, az építészetnek „s más efféléknek” tanítását írta elő* (Oláhné, 1977, 75.o.). Ez a tény is arra mutat, hogy a gyakorlati tudás kezdett felértékelődni ebben a korszakban.

A kor tankönyveiben eleinte kizárólag kidolgozott példákon tanították az ifjúságot akárcsak Maróthi korában (vö. Kerekgedei Makó Pál tankönyvei), később megjelentek a tankönyvekben a gyakorlófeladatok is. Az akkoriban még ritkának számító egyik népiskolai használatra készült példatárból való a következő néhány feladat, amelyekben szintén találkozunk gyakorlati ismeretekkel, számításokkal:

7. 1200 ft egy év múlva fizetendő; de 4 hó mulva 1136 ftal kifizettetik: hány procent évi leszámitolás tétetett?

8. Egy 600 ftos váltót, mely 4 hó múlva jár le, 588 ftért megvehetek: hány procent a' leszámitolás?

9. Ha egy 720 ftos váltót veszek, mely 6 hó múlva jár le, ½ % havi leszámitolással: mennyit fizetek érte?

10. Egy kereskedő 460 ftos váltót vesz — mely 18-dik Sept. jár le — Junius 28-án 8% havi leszámitolással: mennyit fizet érte? (a' kereskedési számitásoknál a' hónap 30 — az év 360 -- napra számittatik.)

Veress, 1856 Számolókönyv 101.o.

21. Számla.

Kalmári János fűszerkereskedésében
Barat Mihály ur részére kiszolgáltatott:

1855.			vft.	kr.
Januar	3	12 ℔ kávé, fontja 1 f. 45 kr. . .		
Febr.	7	27 ℔ czukor, fontja 1 f. 29 kr. . .		
Márcz	18	7 ℔ riskása, fontja — 56 kr. . .		
„	31	34 ℔ liszt, fontja — 39 kr. . . .		
April	8	28 ℔ aszalt szilva, fontja 43 kr. .		
Május	16	16 ℔ csokoládé, fontja 2 f. 8 kr. .		
Junius	9	13 ℔ mili gyertya, fontja 2 f. 26 kr.		
Julius	13	8 ℔ olaj, fontja 1 f. 20 kr. . . .		
Sept.	1	25 itcze eczet, itczéje 14 kr. . .		
Nov.	7	47 ℔ liszt, fontja 48 kr.		
Decz.	30	10 ℔ sajt, fontja 1 f. 35 kr. . . .		

Mennyivel tartozik Barát ur a' kereskedőnek?

Veress, 1856, 33.o.

Az evangélikus iskolák önrendelkezésükre hivatkozva kivonták magukat a Ratio érvényességi köréből, iskolánként önálló tantervvel rendelkeztek. Általában nem volt alacsonyabb szintű a matematika tanítása ezekben az iskolákban, mint az állami intézményekben, sőt önállóságukat kihasználva gyakran válthatták tantervüket is, így új elképzeléseik megvalósítására, kipróbálására is lehetőségük volt. Némelyik tanterv kitér az alkalmazások tanítására is, mint például az 1846-ban megjelent evangélikus tanterv. Ebben a dokumentumban az „értekezve kérdező" módszert tartották a legjobb tanítási módszernek, kiemelték az ismétlés lényeges voltát és a számtan –mértan tanítás esetében fontosnak tartották az alkalmazások megmutatását. (Oláhné, 283.o)

Mivel 1847-től a középiskolai oktatásban előírták a magyar nyelv használatát, egyre több olyan matematika tankönyv jelent meg amelyet idegen nyelv tudása nélkül is tanulmányozni lehet. A tankönyvek sorában találhatók magyarra fordítottak, például *Mocznik Ferenc* igen elterjedten és sokáig használt tankönyvei, de magyar szerzők művei is. Az alkalmazások vonatkozásában kerül említésre néhány szerző és mű, de természetesen a teljesség igénye nélkül.

Corzan-Avendano Gábor (1827-1903) matematikus, akadémikus, középiskolai tanárként is működött. Még gimnáziumi mennyiség és természettan tanárként írta az, 1865-ben kiadott, "Számtani példatár"-t az elemi iskolák és a középiskolák alsóbb osztályai számára. A szerző tanári munkája során gyűjtötte a könyv feladatait. Az "Előszó"-ban többek között a következőt olvashatjuk a gyakorlati alkalmazások tanításával kapcsolatban:

" A mennyiségtani tételek és következtetések magukban véve csak üres alakzatok, merő csontvázak, melyek csak akkor nyernek valódi életet, ha az életre alkalmaztatnak,-elméleti formák, melyeknek csak a gyakorlat ad tartalmat. Érezték ezt a mennyiségtan legelső hősei, mint pl. Newton, Euler stb. kik ezen tudomány terén évtizedekig tartott nyomozásaik fényes eredményeit nem csak tisztán elméleti munkák, hanem példatárak alakjában is iparkodtak közleni a világgal; - érzi ezt minden mennyiségtani tanár is, kinek mindennap van alkalma meggyőződni, hogy az általa előadott mennyiségtani tantétel valódilag csak akkor megy át a hallgatónak, mint mondják- "vérébe", ha azt valamely tényadatra alkalmazva, s így mintegy megtestesülve látja."

- **Feladat**

Gondolja át és fogalmazza meg, mit mond a mai matematikaoktatás számára ez az idézet!

M.

Egyrészt szól az absztrakt ismeretek gyakorlati hasznáról („a gyakorlat ad tartalmat”), de még inkább arról, hogy az absztrakt elméletekkel a tanuló nehezen bánik, ezért a gyakorlati példák segítsége feltétlenül szükséges a megértéshez.

Corzan-Avendano Gábor a példatárban, a megoldások mellőzésével, 3327 (!) feladatot ad közre. A feladatok között szerepel néhány mechanikus számítási gyakorlófeladat is, de a szövegesek igen változatosak témaköreiket tekintve. Számos statisztikai adat és érdekesség is felhasználásra került a feladatok elkészítésénél. A példatár végén táblázatok segítik a tanulókat a szövegben előforduló különböző mértékegységek, pénznemek és egyéb adatok közötti eligazodásban, ami ebben a korban nem is volt olyan egyszerű.

A következő feladat, melynek változatai mai tankönyvekben is fellelhetők ebből a példatárból való:

"Valaki a villámlás tüneményétől kezdve azon pillanatig, melyben a mennydörgést meghallja, 14 lüktetést érez üterén; ezen személynem ütere minden perczben 62-t lüktet; a hang pedig egy másodpercz alatt 1038 párizsi lábat halad; mily távolságban volt tehát még a zivatar?" (1038 párizsi láb kb. 337,35m) (Corzan-Avendano, 1965, 35.o. 3056. feladat)

Arányi Béla pesti gimnáziumi mennyiségtan tanár 1871-ben jelentette meg "Betűszámtani példák gyűjteménye" c. könyvét, amelyet "Gymnásiumok és reáltanodák felsőbb osztályai számára és magánhasználat készített. Egyik feladata történelmi feljegyzésen alapul:

"A történelem tanusítja, hogy Hiero syrakusai király egy korona készítésére 20 font szinaranyat adott át bizonyos aranyművesnek. Az elkészitett korona csakugyan 20 fontot nyomott; azonban Archimedes, korának legjelesb mennyiségtudósa , meg akart győződni arról, valjon az aranyműves nem cserélte-e ki az aranynak bizonyos részét ezüsttel. E végre Archimedes a koronát vizbe mártva mérlegelvén azt tapasztalá, hogy az a vizben 1 1/9 fonttal kevesebbet nyom, holott, ha szinaranyból volt volna csak 20/19=1 1/19 fonttal kellene kevesebbet nyomnia , miből bizton következteté, hogy a korona nem szinaranyból készült mű, mivel az ismert szabály szerint a szinarany általános sulyának 19-dik részét, a szinezüst pedig 10-ik részét veszti el a vizben. Kérdés, mennyi aranyat cserélt ki az aranyműves ezüsttel? (100.o. 253.f.)

Ez a téma, más feldolgozásban jelent meg például a már huszadik századi *Suták-féle 1927*-ben kiadott Mennyiségtan (algebra-geometria) tankönyvben:

„Hieró szirakúzai király koronája a levegőben 10 kg, a vízben 9 355 kg volt; számítsuk ki, mennyi arany, valamint ezüst volt benne, ha tudjuk, hogy 19 kg arany, valamint 10 kg ezüst egy-egy kg-mal könnyebb a vízben. (7 494 és 2 506)

(Suták József, 1927 77.o. 710. f.)

A XIX század későbbi éveinek tankönyveibe belelapozva általában elmondható, hogy a gyakorlatorientáltság a mindennapi számítások területére korlátozódik, - ha ez egyáltalán megjelenik,- ugyanis a felsőbb gimnáziumi négy osztály tankönyveiben már alig szerepelnek ilyen feladatok. Ugyanez a tendencia figyelhető meg a XX. század elején is.

Beke Manó (1862-1946), matematikus, egyetemi tanár, akadémikus, a hazai matematikatanítás korszerűsítésével foglalkozó reformbizottság elnöke a szükséges reformokkal kapcsolatban 1909-ben a következőket írta:

„Még csak egy dologra akarok utalni. És ez a számolástanításnak a hiánya. A középiskolából kikerülő egyénnek leginkább arra van szüksége, hogy számolni tudjon. …És mit látunk? Azok a gazdasági számvetések, amelyekre az embernek leginkább szüksége van: a kereskedelmi kalkulációk, a kamat- és diszkontszámítás, az állampapiros és váltószámítás stb. mind a harmadik osztályban befejeződnek, tehát abban a korban, amikor még csak igen kevés gyermekben van meg ilyen kérdések iránt az érdeklődés. Ellenben akkor, mikor ilyen irányú

érdeklődés a körülöttünk nyüzsgő gazdasági életből már a középiskolai tanulóban is élénkülni kezd: ilyen számítások már nem fordulnak elő. ... Az utasítások erősen hangsúlyozzák ugyan, hogy a számolás folyton erősen gyakorlandó; de véleményem szerint nemcsak az algebra és geometria körében felmerülő számítások gyakorlandók, hanem a mindennapi élet számvetései is."

(Beke M./Mikola S., 1909, 28-29 o.)

1892-ben, középiskolák számára írt „Számtan a középiskolák alsó osztályai számára" tankönyvének előszavában pedig a következőképpen vélekedik:

„Könyvemben hosszú időn át tett tapasztalataimat értékesítettem: a tárgyi köröket, a melyeken a számtani oktatást eszközlöm, úgy választottam meg, hogy az a tanuló ismeretkörét bővítse, az érdeklődését minden tekintetben felkeltse és kielégítse. Az élet tüneményei és viszonyai, az iskola, a város az ország, a geographiai viszonyok a gazdasági, a kereskedelmi élet elemeinek stb. ismertetése képezi e tárgyak körét oly módon, hogy fokozatosan fejlessze a statisztikai érzéket, és a nemzetgazdasági felfogás elemeit. „

(Beke , 1892, Előszó)

- **Feladat**

Gondolja át és fogalmazza meg milyen szempontokra hívta fel a figyelmet Beke Manó az előbbi részletben:

M.

Az alkalmazások tanítása az ismeretek bővítése, érdeklődés felkeltése és az érdeklődésnek megfelelő ismeretek adása miatt is fontos. Az is lényeges, hogy olyan tárgykörök szerepeljenek ebben, amelyek az adott korban fontosak, így ezek között a statisztika elemi és nemzetgazdasági ismeretek is megjelenjenek.

Az előbbiek szellemében készült a következő feladat is a „Feladatok a tizedes számokkal való műveletek begyakorlására" c. fejezetből:

A magyar államvasutak hossza 1890-ben 5022 869 km. Az osztrák-magyar, államvasutak magyar vonalai hossza 1499 388 km. E vonalakat is átvette a magyar állam. Mekkora az államvasutak egész hossza?

(Beke, 1892, 57.o.4.f.)

Varga Tamás (1919-1987) matematikus, a hazai matematikatanítás 70-es nyolcvanas éveiben bekövetkezett reformjának kiemelkedő alakja felhívja a figyelmet az „igazi" matematika tanításának egyre növekvő igényére, és ezzel kapcsolatosan az alkalmazásképes tudás fontosságának növekedésére:

„A következő néhány évtized lényegesebb átalakulást hozhat, mint a megelőző évszázad. A matematika gyorsan fejlődik, alkalmazási területei rohamosan bővülnek, ez és az elektronikus számológépek elterjedése új igényeket vet fel a matematika tananyagával és tanítási módszereivel szemben. … Először is: minél több ember számára hozzáférhetővé kell tennünk a matematika minél nagyobb darabját, mert egyre több embernek lesz szüksége egyre több matematikára…. Másodszor: azon kell lennünk, hogy a matematika egyes fejezetei és problémái között is, a matematika és más tudományok, a matematika és a mindennapos tapasztalatok között is minél több összefüggést ismerjenek fel. Elszigetelt ismeretelemek és készség-töredékek helyett összefüggő, a valóságból absztrahált és a valóságra alkalmazható tudást kell adnunk.” (Varga Tamás, 1964 4-5 o.)

- **Feladat**

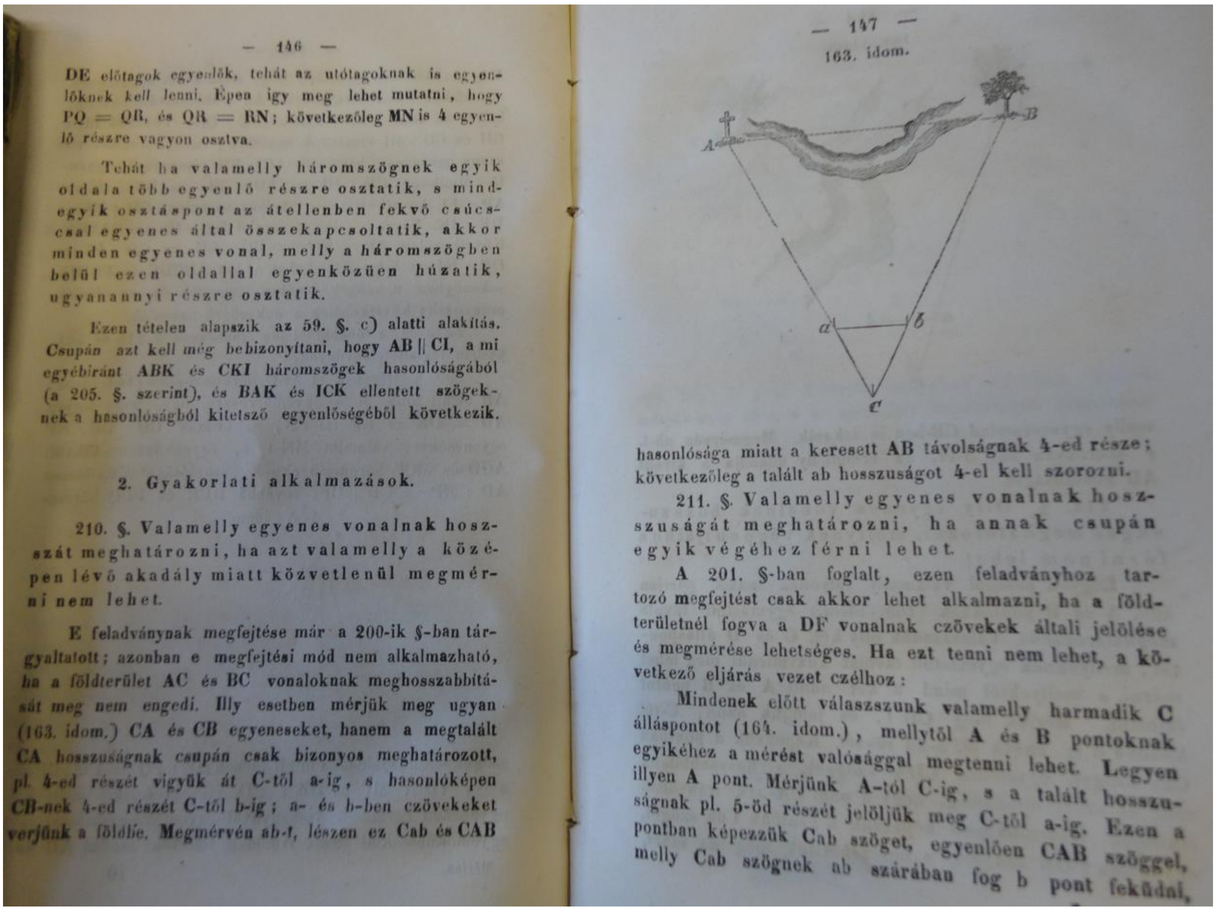
Gondolja át és fogalmazza meg az előbbi Varga Tamás idézet főbb gondolatait!

M.

Felhívja a figyelmet a hatvanas évektől tapasztalható változások következményeire az oktatásban, amely a matematika tanítása számára a minél több ismeret illetve a minél inkább összefüggésekben, gyakorlati alkalmazásra képes tudás adását jelenti.

- **Feladat**

Belelapoztunk Mocznik Ferencz 1855-ben kiadott mértankönyvébe:



— 146 —

DE előtagok egyenlők, tehát az utótagoknak is egyenlőknek kell lenni. Épen igy meg lehet mutatni, hogy PQ = QR, és QR = RN; következőleg MN is 4 egyenlő részre vagyon osztva.

Tehát ha valamelly háromszögnek egyik oldala több egyenlő részre osztatik, s mindegyik osztáspont az átellenben fekvő csúcscsal egyenes által összekapcsoltatik, akkor minden egyenes vonal, melly a háromszögben belül ezen oldallal egyenközüen húzatik, ugyanannyi részre osztatik.

Ezen tételen alapszik az 59. §. c) alatti alakítás. Csupán azt kell még bebizonyítani, hogy AB || CI, a mi egyébiránt ABK és CKI háromszögek hasonlóságából (a 205. §. szerint), és BAK és ICK ellentett szögeknek a hasonlóságból kitetsző egyenlőségéből következik.

2. Gyakorlati alkalmazások.

210. §. Valamelly egyenes vonalnak hoszszát meghatározni, ha azt valamelly a középen lévő akadály miatt közvetlenül megmérni nem lehet.

E feladványnak megfejtése már a 200-ik §-ban tárgyaltatott; azonban e megfejtési mód nem alkalmazható, ha a földterület AC és BC vonaloknak meghosszabbítását meg nem engedi. Illy esetben mérjük meg ugyan (163. idom.) CA és CB egyeneseket, hanem a megtalált CA hosszuságnak csupán csak bizonyos meghatározott, pl. 4-ed részét vigyük át C-től a-ig, s hasonlóképen CB-nek 4-ed részét C-től b-ig; a- és b-ben czövekeket verjünk a földbe. Megmérvén ab-t, lészen ez Cab és CAB

— 147 —

163. idom.

hasonlósága miatt a keresett AB távolságnak 4-ed része; következőleg a talált ab hosszuságot 4-el kell szorozni.

211. §. Valamelly egyenes vonalnak hoszszuságát meghatározni, ha annak csupán egyik végéhez férni lehet.

A 201. §-ban foglalt, ezen feladványhoz tartozó megfejtést csak akkor lehet alkalmazni, ha a földterületnél fogva a DF vonalnak czövekek általi jelölése és megmérése lehetséges. Ha ezt tenni nem lehet, a következő eljárás vezet czélhoz:

Mindenek előtt válaszszunk valamelly harmadik C álláspontot (164. idom.), mellytől A és B pontoknak egyikéhez a mérést valósággal megtenni lehet. Legyen illyen A pont. Mérjünk A-tól C-ig, s a talált hosszuságnak pl. 5-öd részét jelöljük meg C-től a-ig. Ezen a pontban képezzük Cab szöget, egyenlően CAB szöggel, melly Cab szögnek ab szárában fog b pont feküdni,

Olvassa el az idézett könyvben található 210. kidolgozott példát, majd írja le olyan megfogalmazásban, ahogyan az egy mai tankönyvben is szerepelhetne! Milyen témakörhöz használná a feladatot?

M.

A feladat átírásánál ügyelni kell arra, hogy az ábrát megadjuk, természetesen csak a mérendő távolság megadásával, a berajzolt háromszögek nélkül, ugyanis ez a feladat egy, a könyvben szereplő korábbi feladatra utal. A megoldás eredeti megfogalmazása olyan eljárást ad meg a kor szokásainak megfelelően, amelyben szerepel röviden az eljárás helyességének indoklása is. Ma ezt inkább úgy tennénk, hogy előbb megadjuk az eljárás lényegét (elméleti háttér), majd megadjuk az eljárást/szerkesztést, amelynek a leírása is természetesen más nyelvezetű lesz.

- **Feladat**

A 18. században még sokféle pénz volt forgalomban. A pénznemek átszámítása nem volt könnyű feladat. A következő tankönyvrészletben ehhez találunk egy ötletet. Gondolja meg, hogy hogyan tudná megmagyarázni az eljárás helyességét egy mai diák!

Huszonegyedik szakasz.

XXI. Pénz- és mértéknemeknek összehasonlitása.

Jegyzet. Ha két különböző pénz- és mértéknemet értékére nézve egymással összehasonlitani akarunk: az egyik nem számát a' másik nem számával egyenletbe tesszük, mely egyenlet egész számokkal szokott kifejeztetni. Magától értetik, hogy a' nagyobb nem számának a' kisebb nemet — 's a' kisebb nem számának a' nagyobb nemet kell jelenteni.

a. 1 cs. arany = 90 garas; 1 forint = 20 garas: mikint hasonlitjuk össze a' kettőt értékökre nézve?

1 cs. ar. = 90 g ; 1 f. = 20 g.
20 cs. ar. = 90 for.
2 cs. ar. = 9 f.

b. 1 fél souveraindor = $133\frac{1}{3}$ g; 1 for. = 20 g: hogy hasonlitjuk össze 1. forinttal? 2. cs. aranynyal?

1. 1 fél souver. = $133\frac{1}{3}$ g ; 1 f. = 20 g.
20 fél souv. = $133\frac{1}{3}$ f.
3-al szorozva 60 „ = 400 f.
10-el elosztva 6 „ = 40 f.
2-el „ 3 „ = 20 f.

2. 1 fél souver. $133\frac{1}{3}$ g ; 1 cs. ar. = 90 g.
90 fél souver. = $133\frac{1}{3}$ cs. ar.
270 „ = 400 cs. ar.
27 „ = 40 cs. ar.

1. Egy bajor forint = 50 kr; egy austriai for. = 60 kr: hogy vannak egymáshoz értékökre nézve?

2. 1 bajor arany = 4 f. 28 kr; 1 cs. ar. = 4 f. 30 kr: micsoda egyenletben vannak egymással értékökre nézve?

3. 1 souveraindor $13\frac{1}{3}$ f; 1 negyvenfrankos arany $15\frac{1}{6}$ f: micsoda egyenletben vannak egymással értékökre nézve? (Veress, 1856, 109)

Oldja meg az idézetben szereplő további gyakorló feladatokat is az említett módszerrel és nézzen utána további pénznemeknek és átváltásuknak ebből a korszakból.

M.

Például a következőképpen végezhető a megoldás:

mivel 1 cs.ar=90g és 1f=20g következik, hogy 1cs. ar : 1f= 90:20=9:2 ezt úgy is írhatjuk, hogy $\frac{1\text{cs.ar}}{1\text{f}} = \frac{9}{2}$ amiből következik, hogy 2 cs. ar.= 9 f.

A tankönyvben szereplő "jegyzet" csak az eljárást adja meg, nem magyarázza. Ez, mint már említettük, különösen a korábbi tankönyvekre volt jellemző, például Maróthi György Arithmetikája –ra is.

- **Feladat**

A Varga Tamás által szerkesztett felsőtagozatos úgynevezett kockás tankönyvekben keressen példákat valós szituáción alapuló feladatokra!

M.

Egyéni

Valóságközeli nyitott feladatok

A valóságos szituációkkal kapcsolatos problémák esetében általában többféle kezdeti tényező befolyásolhat és ezeket különbözőképpen rögzítve, többféle helyes eredményhez is juthatunk, azaz nyitott problémákról van szó. A feltételek rögzítése alapján készült modell segíti a végül matematikai eszközökkel készülő megoldást, melyet mindenképpen szükséges összevetni a rögzített feltételekkel ahhoz, hogy eldönthessük, elfogadható-e a megoldás az adott körülmények között. Ezután még vizsgálnunk kell eredményünk helyességét az eredeti probléma szempontjából és szükség lehet arra is, hogy más feltételek mellett új megoldás készüljön. Ez gyakorlatilag a modellezés folyamata.

A következőkben olyan feladatokról lesz szó, amelyek az előbbi folyamat teljes vagy részleges alkalmazásával megoldhatók, valamint a megoldásukkal kapcsolatos néhány módszertani kérdésről.

Modellezés fogalma

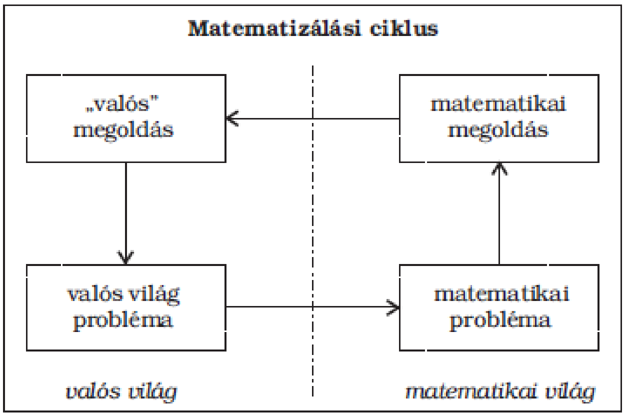
Egy ideje már a matematikadidaktika is elkezdett foglalkozni a modellezéssel, részben a „New Math” mozgalom „hibáinak” ellensúlyozásaként, részben az egyre növekvő igény miatt a matematika alkalmazásaira.

A bevezető részben leírt modellezési folyamatot Blum így foglalja össze általánosan:

„Általánossá vált a modellezés megnevezés alkalmazása arra a teljes folyamatra, amely magában foglalja a strukturálás, matematizálás, matematikai kidolgozás, és interpretálás/validálás (esetleges többszöri végrehajtását) a végső, elfogadható eredmény érdekében”(Blum, 2002). A folyamat lényegét pedig abban látja, hogy ennek során valamilyen feladat megoldásához kétoldalú kapcsolatot létesítünk a valóság és a matematika világa között (Blum, 2007).

Az elkészült modell és a valóság egybevetése gyakran szükségessé teszi a modell módosítását, esetleges teljes elvetését. A modell és a létrejöttéhez szükséges modellezési folyamat szoros kapcsolatban van egymással, és elmondható, hogy maga a folyamat éppen olyan fontos (néha talán még fontosabb is), mint eredménye, a modell.

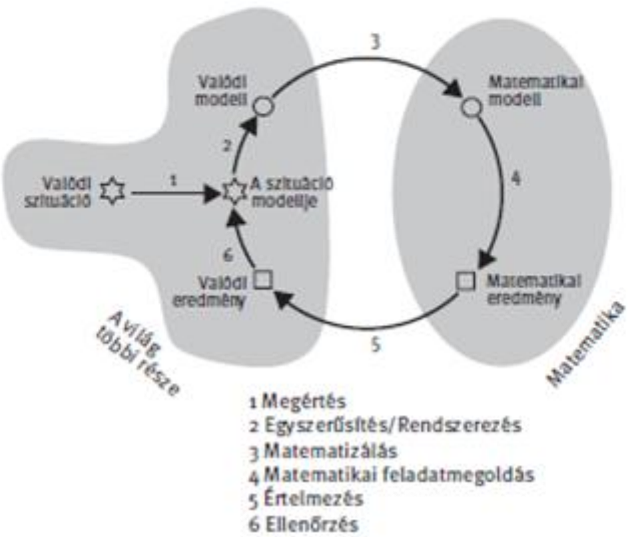
A következőkben a modellezési folyamat egy egyszerűbb és egy továbbfejlesztett változata látható a modellezést leíró számos létező folyamatábra közül. A modellezés fogalmának leírásához jelenleg ezek, illetve ezeken alapuló ábrák használatosak. (Blum, 2007, Schukajlow 2011)



PISA (2003)

A modellezésnek ezt az egyszerű, négylépcsős ciklusát vették alapul a PISA felméréseknél, melyek során egyszerű modellezési feladatok segítségével végeznek felmérést 15 éves tanulók körében.

ábra: Egyszerűsített modellezési ciklus



Blum/Leiß, 2006

Ebben a modellben fontos kiegészítés a *négylépcsős modellhez képest, hogy a szituáció megértése, a szituációból készített modell külön lépésként jelenik meg*.

E kezdeti lépés után a továbbiakban a modellezés folyamatában csak a szituációs modell vesz részt, vagyis az ahogyan a tényleges szituációt megértettük, értelmeztük.

.Ez az ábra kiegészíthető egy 7. lépéssel, amely az 1. nyíllal ellentétesen mutat és konkrétan a „válasz megadása az eredeti problémára" a jelentése.

ábra: Többlépéses modellezési ciklus

Az előbbi ciklikus ábrákon, nincs jelezve „kilépés" a folyamatból. Ez is jelzi, hogy a hangsúly elsősorban a cikluson, a folyamat végrehajtásán van.

A valóságtartalmú szituációk, problémák megoldásához gyakran van szükség modellezésre. Ennek során tehát először is azok a *tényezők kerülnek meghatározásra, amelyeket* *figyelembe veszünk* a probléma megoldásához, majd e rendszeren belül a szükséges (lehetséges) *matematikai eljárás megadása következik,* amit az *ehhez kapcsolódó megoldás* követ (kivitelezési fázis).

Végül kerül sor az *eredmény egybevetésére* a valóságos eredeti helyzettel (elfogadható-nem elfogadható) illetve az eredmény *értékelése* (validáció) azaz annak megadására, hogy az milyen körülmények, feltételek esetén érvényes. Ezután kerül sor szükség esetén a modell pontosítása, (akár többször is), ahogy erre a korábban említett Blum idézet is utalt.

Modellezési feladatnak azokat a feladatokat tekintik a didaktikai szakirodalomban, amelyek a modellezési ciklussal, annak teljes vagy részleges alkalmazásával, megoldhatók.

- **Feladat**

Keresse meg az interneten is elérhető Matematikamódszertani Példatár (ld. irod.) első fejezetében a „New Math” tanítási irányzatról írt részt és olvassa el! Gondolja meg, hogy az ilyen tanítási stílus mennyire egyeztethető össze modellezési feladatok alkalmazásával!

M.

A „New Math” vagy strukturalista-formalista irányzat a matematikát mint tudományt hangsúlyozza, az absztrakció és a szaknyelv precíz használata kiemelt szerepet kap benne. Ennek megfelelően legfeljebb olyan modellezési feladatok alkalmazása képzelhető el ennél az irányzatnál, amelyek megoldásánál a matematikai absztrakt modellek készítésén van a hangsúly. Ilyenek az iskolai gyakorlatban, kivételes esetektől eltekintve nem szerepelnek.

- **Feladat**

A modellezési ciklus ábráin a „valós világ”/„világ többi része” és a „matematika” elválasztva szerepel. Próbálja megmagyarázni, hogy ez miért szerepel így az ábrán és fogalmazzon meg érveket és ellenérveket az említett szétválasztás használatához.

M.

A modellezési ciklus ábráján szereplő „világ többi része” és a „matematika” szétválasztás arra utalhat, hogy a modellezés a különösen az utóbbi századokban megjelenő „tiszta matematika” és „alkalmazások” között teremt kapcsolatot. Az is tény, hogy a matematika tanításában az elméleti rész és az alkalmazások elkülönülten jelennek meg általában a tanulási folyamatban. A modellezés során viszont az elmélet és a gyakorlat szerves kölcsönhatásban van egymással.

Lehetséges érvek a szétválasztás használatához:

- Hangsúlyozza a kapcsolatot a tisztán matematikai és az azon kívüli világ között.
- Figyelemfelkeltő- felhívja a figyelmet arra, hogy ilyen feladatoknál a két „világ” között kell „mozogni”, egyébként formális (vö. Schukajlow, 2011, 77.o.) .

Lehetséges ellenérvek egy ilyenfajta szétválasztás ellen például:

- Matematika és a valóság többi része szétválasztott „világok” maradnak a tanuló számára továbbra is.
- Hangsúlyozza, hogy létezik ilyen két világ, noha a matematika korábbi történetében inkább a két világ egysége volt megfigyelhető

- **Feladat**

Oldja meg a következő modellezési feladatot és adja meg a modellezési ciklus konkrét lépéseit!

Egy ellenzéki párt 4 000 000 aláírást nyújtott be a kormány egyik új rendelete ellen. Minden újság közölte a hírt és a hatalmas ládák képeit, amelyek az aláírt íveket tartalmazták, valamint szerepelt a képeken 8 kisteherautó is, amelyekre a rengeteg papír szállításához volt szükség. Valóban ennyi teherautó kellett az aláírások elszállításához?

A feladat elvégzéséhez hasznos segítség lehet az interneten elérhető Módszertani Jegyzet (ld. irod.) 29-30. oldalán található kidolgozott feladat (Vízparti séta).

M.

Például a megoldási eljárás következő lehet:

Meg kell tudnunk (becsülnünk), hogy hány aláírás lehet(ett) egy aláírásgyűjtő lapon. Egy teherautó (a nyolc közül) 500 000 aláírást kell, hogy szállítson, azaz 500 000 : (az aláírások száma egy lapon)= darab oldalt szállít. Meg kell adni ennyi lapnak a tömegét és ezt összehasonlítani a teherautó teherbírásával.

Felmerül az a kérdés, hogy elég hely van-e ennyi papírhoz a teherautóban? Illetve, hogy mennyi papír fér el egy teherautóban? Ez utóbbi alapján az is megadható, hogy kb. hány teherautó elég az elszállításhoz, ami természetesen több, mint amit a feladat kérdezett, hiszen ott csak annak eldöntését várták, valóban szükséges-e a 8 darab jármű.

Egy másolópapír csomag méretei: kb. 23x32x8 (cm-ben),

Egy dobozban 5 csomag papír van, azaz 10 doboznak kell elférnie. Egy doboz méretei kb. 23x32x40 (cm)

Kérdés, hogy ez hogyan fér el?

Válasszuk például kisteherautónak a Ford Transitot, ennek méretei a következők, Hossz: 255,8cm, Szélessége:171,9 cm, Magassága: 133,8cm Teherbírás max:1028kg., (forrás: Internet)

Ennek alapján a modellezés folyamata például a következő lehet (az előbbi modellezési folyamatábrák közül a PISA 2003 lépései szerint):

-körülmények meghatározása (**valós probléma**):

„térfogat típusú", vagy „tömegtípusú" megközelítés

-Az eljárás megadása (**matematikai probléma**)

A "tömeg" típusú megoldási eljárás következőt jelentheti:

Meg kell tudnunk (becsülnünk), hogy hány aláírás lehet(ett) egy aláírásgyűjtő lapon. Egy teherautó (a nyolcbóll) 500 000 aláírást kell, hogy szállítson azaz 500 000 : (az aláírások száma egy lapon)= darab oldalt szállít. Meg kell adni ennyi lapnak a tömegét és ezt összehasonlítani a teherautó teherbírásával.

-Kivitelezési fázis (**matematikai megoldás**)

(Adatok, információk gyűjtése, pl. internetről)

Ha egy lapon 20 aláírást feltételezünk, akkor 25 000 lap van a teherautón, ez 25 000: 500 (egy csomagban ennyi lap van)=50 dobozt jelent.

Az egy dobozban levő 500 lapnak a felszíne $210X297X500\approx31{,}19x10^6$ mm^2. $1m^2$ papír tömege a csomagon található információ szerint (másolópapír) 80g. Ez a mennyiség körülbelül 2,5 kg papír.

Az 50 doboz esetében körülbelül 50x2,5=125kg papírmennyiséget jelentene. Azaz egy teherautóra is elférne.

-Egybevetés a valósággal, értékelés (**valós megoldás**)

A kisteherautók teherbírása alapján jóval kevesebb teherautó is elég így.

A megbeszélésnek mindenképpen tárgya lesz az a kérdés, hogy elég hely van-e ennyi papírhoz egy teherautóban? Azaz szükséges kiegészíteni, módosítani a modellt, tehát a 2. lépéstől újra (módosítva) végbemegy a folyamat. Ennek során a korábbiakban említett térfogatszámítással kapcsolatos modell készül e, melynek főbb gondolatát már vázoltuk.

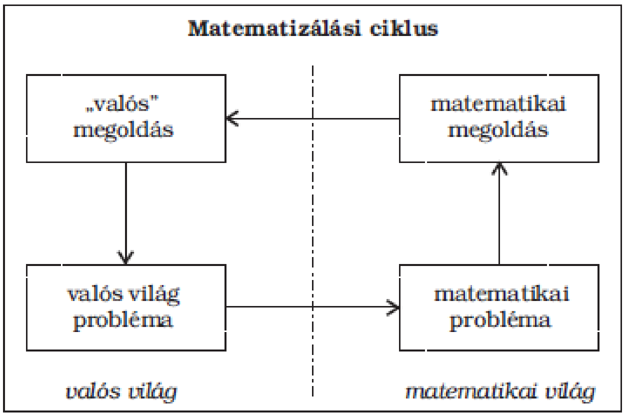
Ennek is az az eredménye, hogy nemcsak felesleges a nyolc teherautó, de gyakorlatilag egy is bőven elég.

További példákat modellezési feladatokra a 4. fejezetben (Valóságközeli feladatok készítése) találhat.

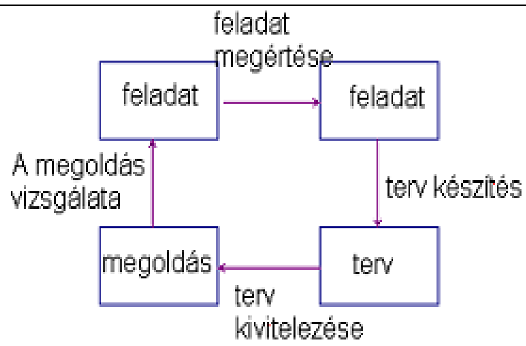
<u>Problémamegoldás és modellezés</u>

A Pólya-féle probléma megoldási folyamat tekinthető általában bármilyen (matematikán belüli vagy azon kívüli) problémamegoldás menetének.

A problémamegoldás és a modellezés folyamatával kapcsolatban Greefrath (2007) erős strukturális hasonlóságot emleget, és a modellezési ábrát véve alapul hasonló ciklikus ábrát készít Pólya György probléma megoldási fő lépéseihez (Hogyan oldjunk meg feladatokat? vö. Pólya, 1977):



ábra A modellezési egyszerűsített ciklus



ábra Pólya problémamegoldási folyamata, Greefrath, 2007 alapján

A hasonlóság fő oka nyilvánvalóan az, hogy mindkét esetben problémamegoldásról van szó, de a modellezési feladatok valós szituáción alapulnak.

Nézzük meg konkrétan, hogyan azonosíthatók be például a többlépéses, korábban ismertetett modellezési folyamat lépései a Pólya – féle négy fő lépéssel:

	Modellezési folyamat	**Probléma megoldási folyamat**
1.	A szituáció megértése	A feladat megértése, szöveg, téma
2.	Egyszerűsítés, feltételek, valós modell készítése	Tervkészítés: A feladat megértése, elemzése

3.	Matematikai modell készítése	Tervkészítés: megoldási terv, a terv átgondolása
4.	Matematikai feladatmegoldás	Megoldási terv kivitelezése
5.	Értelmezés, következtetések a valós modellre	
6.	Ellenőrzés, a valós modell értékelése	Visszatekintés: a megoldás vizsgálata
7.	Válasz a feladat kérdésére	Válasz a feladat kérdésére

Greefrath, 2010, táblázatának felhasználásával

A problémamegoldás és a modellezés folyamatát vizsgálva Greefrath (2010) az idealizált Blum/Leiß 2006 ábra alapján utal arra, hogy ezek a folyamatok elméletileg egymás mellett, párhuzamosan tekinthetők. A modellezés egyes lépései pl. az adatok feldolgozása külön problémának is vehetők, így az adott lépésnél a problémamegoldás többlépéses folyamata külön is lejátszódhat. Ilyen értelmezés szerint a Pólya féle ciklus tekinthető akár a modellezés során a matematikai modell részletes kidolgozásának is, azaz egy alciklusnak a modellezési folyamaton (cikluson) belül.

Greefrath (2010) vizsgálata során tanulókat figyelt meg modellezés közben és arra jutott, hogy bár elvileg tekinthető a modellezés a problémamegoldás szemüvegén keresztül, ez azonban a modellezési feladatok speciális jellegének nem felel meg.

A modellezési feladatok speciális jellegét és szerepét a matematika oktatásában Schukajlow (2010) több szempontból vizsgálta, ennek részletezésére itt nem kerül sor.

A modellezési feladatok jellemzői és típusai

A modellezési tevékenység modellezési feladatok segítségével történik. A modellezési feladat egy valós tartalmú feladat, amelynek megoldása során a modellezési ciklusban említett „fordítás” a valós világ szituációjából a matematika világába és viszont alapvetően szükséges. (Blum, 2007)

A modellezési feladatok jellemzőit a következőképpen foglalta össze K. Maaß :

- nyitottak
- komplexek
- valóságközeliek
- autentikusak

- problémaközpontúak
- modellezési folyamat végrehajtásával megoldhatók. (Maaß, 2007)

A modellezési feladatok fontos jellemzője tehát, hogy *valós problémát* tárgyalnak. Ez összhangban van a *„komplex”* tulajdonságukkal, ami arra utal, hogy nem egyetlen művelettel, rutinszerűen megoldható feladatokról van szó. Komplexitás tekintetében azonban a modellezési feladatok igen eltérőek lehetnek.

A *modellezési feladatok alaptípusai a leíró, a normatív, az előrejelző és a magyarázó* feladatok.

- **Feladat**

Az interneten elérhető Matematikamódszertani Példatár (ld. irod.) 32. oldalán olvassa el mi jellemzi a modellezési feladatok egyes alaptípusait és adjon meg további példákat minden típushoz!
M.
Egyéni

A feladatok típusba sorolási lehetőségeinek vizsgálata azért fontos, mert ráirányítja a figyelmet arra, hogy több olyan szempont is van, amely segítséget ad egyrészt modellezési feladatok kiválasztásához iskolai alkalmazásra másrészt ilyen feladatok készítéséhez különböző célokra.
A következőkben néhány fontos szempontot tekintünk át, amelyek szerint az alaptípusokon kívül további különböző feladattípusok is elkülöníthetők:

- A modellezési ciklus alapján:

1. A teljes ciklussal történik a megoldása
2. Csak a ciklus egy részét hajtjuk végre a megoldásnál

Lehetséges, hogy a modellezési feladat megoldása során csak a ciklus egy részének végrehajtására van szükség. Ez a helyzet például akkor, ha egy adott modell helyességének ellenőrzése a feladat. Ekkor a ciklus utolsó lépéseit hajtjuk csak végre.

- A matematika tanulás folyamatában betöltött szerep szerint

Például *valós problémafelvető bevezető feladat* egy témához, ebben az esetben a probléma megoldása elvezet egy új fogalom, összefüggés értelmezéséhez, bevezetéséhez. Adott *matematikai tartalmak alkalmazására* pedig sokféle modellezési feladat készíthető.

- A feladat mennyire nyitott

Eszerint például lehet: nagyon nyitott, részben nyitott is a modellezési feladat.

Ez befolyásolhatja azt is, hogy egy adott tanulócsoportnak feladható-e egy feladat, hiszen ha az adott csoportnak nincsenek tapasztalatai nyitott feladatok megoldása terén gyakran érdemesebb előbb kevésbé nyitott modellezési feladatokkal foglalkozni. A nyitottság hatással van gyakran a megoldáshoz szükséges várható időre is, hiszen számításba kell venni a lehetséges különböző elgondolások megjelenését, amely időigényessé teheti a feladat feldolgozását.

- A feladat összetettsége (matematikai tartalom, illetve az adott szituáció tekintetében)

Eszerint lehet például: nehéz, közepesen nehéz, könnyű a feladat illetve: nagyon összetett szituációt, közepesen összetett szituációt, egyszerű szituációt tartalmazó.

Például lehet egy összetett szituáció sok egyszerűsítés után végül egyszerű matematikai tartalmú, illetve egyszerű szituáció esetében is előfordulhat nehéz, összetett matematikai tartalom.

- Milyen matematikai terület(ek), esetleg konkrét témák szerepelnek (fordulhatnak elő) a megoldás során

A modellezési feladatok általában több területet érintenek, de adott feladatok esetében gyakran megadható egy vagy több „fő” terület illetve témakör. Ez meghatározza nyilvánvalóan az alkalmas tanulócsoport korát is valamennyire. Ebben az esetben természetesen „minimumkorról” van szó, hiszen a feladatok többsége egy-két évvel később is minden további nélkül feladható. Az sem ritka eset, hogy egy adott feladat esetében különböző korosztályok esetében különböző szintű modellek készíthetők ilyen esetre példa a 6. fejezetben, Tóth E. (2013) árnyjátékos példája.

- Mennyi idő szükséges a megoldásához

Eszerint lehetnek például: két vagy több tanórát igénylő, egy tanítási óra alatt elvégezhető, vagy akár ennél is kevesebb időt igénylő feladatok.

Mivel a feladatok megoldásához lehet, hogy csak az óra egy részére van szükség, de vannak több órán áthúzódó feladatok is. Ilyen esetben mérlegelni kell, hogy hova illeszthetők a tananyagban.

- A feladat alapanyagának forrása szerint

Eszerint lehet például: saját gyűjtött anyagon alapuló, átvett forrásanyagból készített vagy meglevő feladat átdolgozása.

Néhány lehetőség: Matematikai szemmel járunk és észrevesszük a körülöttünk levő világban adott lehetőségeket például tárgyak, szituációk megfigyelését használjuk fel, szórólapokat, újságcikkeket gyűjtünk. De a hagyományos tankönyvek vagy példatárak is jól alkalmazhatók. Feladatkészítésről külön részben még részletesen szó lesz.

- Az információs anyag (rendelkezésre álló információk) megléte alapján

Ilyen szempont szerint lehet például, hogy a feladatban,

- minden információ adott, részlegesen gyűjtés szükséges,
- a teljes anyag gyűjtése szükséges de konkrétan megadott célhoz,
- a teljes anyag gyűjtése szükséges de a cél többféle is lehet a tanulók bizonyos keretek között maguk határozzák meg a célt.

Történelmi távlatok

Régebbi korok több megvizsgált tankönyvében *nyitott*, gyakorlati élettel kapcsolatos feladatot nem sikerült találni. A mindennapi életben szükség volt nyilvánvalóan például gazdasági, pénzügyi tervek elkészítésére, vagy becslések elvégzésére, de ezekhez a szükséges ismereteket a tanulók konkrét példákon tanulták meg, illetve előre meghatározott/adott feltételekkel oldottak meg feladatokat. Ez a felfogás az oktatásban részben mind a mai napig megvan.

Kivételes esetnek tekinthető Beke Manó 1909-es Vezérkönyvében megjelent példája, amely egy egyszerű modellezési feladatnak is felfogható.

„Czél: Számítsuk ki, mennyi haszna volt egy asztalosmesternek egy szekrényen? (Formális czél: tizedestörtek kivonása)

Előkészítés: Ha meg akarjuk határozni, az asztalosmesternek mennyi haszna volt, mit kell tudnunk? Hogy mennyibe került a szekrény és mennyiért adta el.

I. Fokozat. Mire kellett az asztalosnak pénzt kiadni? Az anyagra és a munkára. Megbeszéli a tanító a gyerekkel, minő anyagból készült a szekrény? (deszka, zár stb.) Ez az anyag 2· 5 frtjába került. A munkáért fizetett a legényeinek 5·75frtot.”

….

(Beke, Vezérkönyv, 1909 212-214.o)

Ebben nincsenek megadva előre az adatok, így a feladat az eredeti alakjában kiegészítő feltételek megadására szorul, azaz nyitott kezdetű és valós így modellezésinek tekinthető. A tanulók maguk kereshetnek konkrét árakat, ám ezt a tényt Beke nem említi. A kidolgozásban megadott adatoknál sem hangsúlyozza, hogy esetleg másképpen is lehet számolni. A példa könyvbeli kidolgozása frontális óravezetésre, erős tanári irányításra utal.

Modellezési feladatok a tanítási órán

A tanítási gyakorlatban meghatározó a tanár tanítási stílusa, ami egyénenként változó és a tanár személyisége, felkészültsége és tapasztalata határozza meg. Egy tanár tanítási módszere többféle jellemzőből épül fel, és aszerint, hogy milyen típusú jellemzők dominálnak benne, általában besorolható valamilyen tanítási alaptípusba.

- Nézze át a Matematika Módszertani példatár első fejezetéből a tanítási stílusokra vonatkozó részt, és válassza ki azokat, amelyekbe véleménye szerint a modellezési feladatok alkalmazása beleillik.

M.

A stílusok jellemzése alapján elsősorban a realisztikus, a gyakorlatorientált, a projektorientált tanítási stílus esetén képzelhető el modellezési feladatok alkalmazása. A problémamegoldó tanítás kereteibe is jól beleilleszkednek ilyen feladatok. Legkevésbé a hagyományos és a „New Math” tanítási módszer alkalmazása esetén fordulhatnak elő.

A modellezési feladatok többféleképpen beilleszthetők a tanítási órába, azonban annak eldöntése, hogy mikor és milyen módszerrel kerüljenek alkalmazásra, a tanárra van bízva. Ehhez további segítség található majd a „Módszerek” fejezetben.

A következő részben konkrét vizsgálatok segítségével a modellezési feladatok iskolai alkalmazásáról lesz szó.

Modellezés a magyar iskolai gyakorlatban

A problémamegoldás magyar oktatási hagyományai jó alapul szolgálhatnak mindenféle új és újszerű tartalom tanításához, így a magyar NAT 2012-ban már hangsúlyosan is megjelenő modellezés tanításához is.

Felmerül tehát a kérdés, hogy mennyire lehet támaszkodni ezekre a hagyományos problémamegoldó alapokra a modellezési feladatok megoldása során.

Mivel a magyar matematikaórákon modellezési feladat még alig fordul elő, az is kérdésként jelentkezik, hogy *„vajon hogyan oldanak meg előzetes tapasztalat nélkül modellezési feladatokat magyar diákok?”*

Magyar fiatalok szöveges feladatok megoldásával kapcsolatban már több felmérés is készült (Csíkos et al.2011), Ezek közül az egyikben 5 egyszerű modellezési feladat esetében 4000 tanuló válaszát elemezve vizsgálták, milyen típusú válaszokat választanak 10-11 éves tanulók 3 választípus közül: (a) feladatmegoldási rutinon alapuló nem realisztikus (b) számokkal kifejezett válasz, amely figyelembe vesz realisztikus tényezőket (c) realisztikus válasz amely kitér a szituációból adódó problémákra a feladat megoldásával kapcsolatban, de ezekre hivatkozva azt állítja, hogy a feladat nem megoldható.

Az előbbiek közül a (b) válasz jelenti a modellezési megoldást. A szerzők leírják, hogy a feladatok valós szituációja ellenére a többség nem valós választ választott. Fontos azonban megjegyezni, hogy a (b) –t választók aránya több feladat esetében megközelítette, sőt volt, hogy meg is haladta a nem valós (a)-t választók arányát. Viszont csak a tanulók 26,4%-a adott legalább 4 feladat esetében (b) típusú választ.

A felmérés szerint azoknak a matematikajegyének átlaga, akik mind az 5 esetben a (b)-t választották 4,43.

Ha nem is teljesen igaz, hogy a jó jegy és a jó problémamegoldó képesség egybeesik, de az előbbiek alapján is úgy tűnik, hogy a jobb problémamegoldók jobban oldanak meg modellezési feladatokat.

Az előbbi témát tovább gondolva került sor magyar tanulók körében a következő kérdések vizsgálatára:

- Mennyire közelítenek meg „modellezéssel” egy modellezési feladatot?
- Milyen stratégiákat használnak modellezési feladatok megoldásához és mennyire ismerik fel stratégiák jelentősét a modellezési feladatok megoldásánál és ez a felismerés mennyire van összhangban a tényleges feladatmegoldásukkal?

A továbbiakban rövid betekintés következik ezekbe a vizsgálatokba, mely nemcsak a modellezési feladatok tanításával kapcsolatban szolgál információkkal, tapasztalatokkal, de ízelítőt is ad a téma módszertani kutatásából.

Az első kérdés gyakorlatilag a tanulók modellezési kompetenciájára kérdez.

A modellezési kompetencia magában foglalja azokat a képességeket és készségeket, amelyek lehetővé teszik a modellezési folyamat célra irányuló megfelelő végrehajtását, valamint a *szándékot is, hogy ezek a képességek és készségek gyakorlati alkalmazásra kerüljenek.* (Maaß, 2004)

A modellezési kompetencia mérésére több lehetőség is van, különböző korlátokkal (Riebel, 2010). Riebel említ egy olyan módszer is, amelynél az egyes modellezési lépésekre kapnak pontot a diákok. De a módszer buktatója, hogy aki például nem megfelelő modellt állít fel, a további pontokat is elveszti.

Tóth B. (2014) tudományos diákköri dolgozata szerint szerint érdemesnek tűnik tehát ezt kikerülni és azt a módszert alkalmazni, hogy ha a tanuló hibázik, de utána helyesen folytatja, a következő lépésre kap pontot.

Mivel a folyamat vizsgálata állt a középpontban, így nem a kapott eredmény, hanem a megoldás tervezése volt a lényeges. A modellezési folyamat vizsgálata a következő lépések alapján történt.

1. A valós problémából matematikai probléma
2. A matematikai probléma megoldása.
3. A kapott matematikai eredményből valós eredmény
4. A valós eredmény értékelése. (Tóth B. 2014)

A vizsgálathoz Tóth Bettina három korcsoport számára, azonos szituációból kiindulva (olimpiai stadion) készített modellezési feladatokat, majd ezeket egy iskola több mint 120 tanulójával megoldatta.

A három feladat komplexitás tekintetében tért el egymástól, mindhárom a 2012-es Olimpiai Stadion befogadóképességével illetve méreteivel volt kapcsolatos. Mivel a vizsgálatra 2012 őszén került sor egy magyar kisváros gimnáziumában, a 7-11. osztályokban, ez igen aktuális témának is számított a nyári Londoni Olimpiai játékok után. Minden évfolyamon 2 csoport (normál és emelt szint) oldotta meg a feladatokat előzetes modellezési tapasztalat nélkül. A megoldásra körülbelül fél óra állt a tanulók rendelkezésére.

Az eredmények részletes kiértékelése megtalálható a dolgozatban. Ebből most csak a következőket emeljük ki:

- A 124 tanuló közül az első lépést 60 esetben tették meg a tanulók, azaz készítettek modellt a feladathoz.
- Legkevésbé a 4. lépés a valós eredmény értékelése jelent meg a munkákban.
- Leginkább azok írtak valamilyen értelmezést megoldásuk végén, akik kételkedtek az eredményükben.

- Akik tudtak valamit kezdeni a feladattal, azok 3 lépést végre is hajtottak és ennek alapján valamilyen eredményhez is jutottak.
- Érdekesen alakul a korcsoportonkénti átlagos lépésszám. Majdnem minden korcsoportra igaz, hogy az emelt szinten magasabb az érték. Az eredmények alapján, magasabb évfolyamokon valamivel magasabb érték tapasztalható, de a tendencia nem lineáris.
- Minden korosztályra érvényes, hogy bár sok modell megjelent, ezek csak ritkán voltak elfogadhatóak. A hetedikesek között kimondottan sok olyan megoldás volt, ami helytelen összefüggést vett alapul a futópálya szélessége és hossza között. Az is előfordult elég gyakran, hogy jó elképzelésekkel indultak, de a képet nem tudták felhasználni munkájukban, teljesen a szöveg alapján próbáltak dolgozni.
- Az előzőleg elképzelt megoldásokhoz képest inkább egyszerűbb modelleket készítettek, sok megoldás inkább hasraütésszerű becslés volt indoklás és magyarázat nélkül.

A második kérdés vizsgálatához, a tudatos probléma megoldási stratégiák alkalmazásának megfigyeléséhez a „selbstberichtete Strategienutzung” (Schukaljov/Leiss, 2011) módszer került alkalmazásra (Ambrus, G. 2013). Ennek során a tanulók miután megoldották a modellezési feladatot, egy kérdőívet kaptak a feladatra vonatkozó a saját stratégiahasználatukra irányuló állításokkal. A megoldásuk alapján kellett eldönteniük, hogy mennyire értenek egyet az adott stratégia használatával a feladat megoldása során. A szakirodalomban szereplő állítások került ek felhasználásra, egy a feladathoz „szabott” módosított állításrendszer készítéséhez.

A képeken a 2012. évi Londoni Olimpiai Stadion látható.

Az épület 80 000 ember befogadására képes.

Itt rendezték a legtöbb atlétikai versenyt, így a pálya alkalmas 400 méteres futóversenyek és 100 méteres sprintfutások szervezésére is. Izgalmas lehetett ezeket a versenyeket a lehető legközelebbről megtekinteni.

Vajon hány néző fért el az alsó szint legelső sorában? Írd le, hogyan gondolkodtál

Tóth B. feladata

A következő állításokat osztályozd 1-5-ig számokkal aszerint, hogy mennyire igazak arra, mit tennél a sikeres feladatmegoldás érdekében.

Ennek a feladatnak a megoldásánál

1. néhány mondatot újra elolvasnék	
2. a fontos adatokat a szövegben külön megjelölném, például aláhúzással.	
3. megoldási tervet készítenék.	
4. vázlatot, ábrát készítenék.	
5. többször ellenőrizném közben, hogy jó úton haladok-e a megoldás felé.	
6. hasonló feladatot keresnék, és meggondolnám azt hogyan oldottam meg.	
7. a feladatot részfeladatokra bontanám megoldás előtt.	
8. egyszerűsíteném a feladatot, és előbb ezt a változatot oldanám meg.	
9. végül meggondolnám, hogy az eredményem körülbelül megfelelő-e.	

Ábra: A kérdőív a feladat megoldása után

Négy budapesti középiskolai tanulóval készült hang illetve videofelvétel a stadionos feladatok közül a 9-10 osztályosoknak készített változattal, 2013 tavaszán. Erre a feladatváltozatra azért esett a választás, mert az eredeti terv szerint különféle évfolyamon tanuló diákokkal akartuk megoldatni a feladatot és komplexitását tekintve ez illett legjobban ehhez a feladathoz.

A diákok azt a feladatot kapták, hogy minél részletesebben mondják is el gondolataikat megoldás közbe. A felvételre a szaktanár javaslata és kérése alapján a tanulók önként vállalkoztak és lyukas órában illetve tanítás után került sor az interjúra. A szaktanár rövid bemutatást adott előzetesen a tanulókról. A négy vizsgált személy közül három tanuló ugyanabba a gimnáziumba és azonos, 11. osztályba járt.

Géza[1]*:* A laza okos típus. Ötlete általában azonnal van, kedves, de időnként kevésbé megbízható. (A felvétel időpontjában is például nem a megbeszélt helyen várakozott, de szerencsére megtaláltuk.) Szeretne jobb lenni, fontos neki, hogy mit ér el matekból, de időnként az ötöst nem éri el. Előző évet külföldön töltötte, ebben az évben került az osztályba.

A feladathoz nyugodtan kezdett hozzá, láthatóan értette, mit kell tennie. Vázlatos rajzot készített, miután első tervét a képen látható sorok száma alapján történő becslést elvetette, Gyakorlatilag végighaladt a jelzett 4 modellezési lépésen a végső értékelés kivételével- megoldása során a stadion alakját körnek tekintette és r= 180/2 =90 m-rel számolt- és egy elfogadható eredményt is kapott (kb 700). A feladat megoldásához kb. 11 percre volt szüksége.

Legfontosabbnak (4 és 5 osztályzat) az újraolvasást, vázlatkészítést, a megoldás közbeni ellenőrzést, a részfeladatokra bontást és a végső kontrollt tartotta. Ezek a stratégiák megoldásában megjelentek, a végső értékelés kivételével.

Zsuzsi: Nagyon aggályos típus, de utána tökéletes dolgozatokat is képes írni. Aprólékos, újat nemigen tud hozzátenni dolgokhoz, viszont igen kötelességtudó. Inkább végrehajtja azt, amit tanítanak neki, de megbízhatóan ötös.

A feladat meglepte. A megoldáshoz kizárólag az ábrát használta, a rajz alapján becsüli a kerületet, közben próbálgat és többször elveti a becsült értéket- a rajz alapján. Végül közel 500m-nek veszi a kerületet és kb. 880-nak a nézők számát az első sorban (60cm egy embernek). A négy lépésen végigmegy, de a végső eredményt nem értékeli. A megoldás körülbelül 12 percet vett igénybe.

Legfontosabbnak az újraolvasást, az ábra és rendezést, a saját haladásának vizsgálatát a megoldás közben, a részfeladatokra bontást, egyszerűsítést és a végső kontrollt ítélte. Ezek közül az újraolvasás, az ábra és a rendezés, az egyszerűsítés (csak az ábrából dolgozik), jelenik meg a megoldás során.

[1] A neveket megváltoztattuk.

Árpád: Jó matekos és érdeklődő. Kreatív, de nehezen fogadja be az új információkat. Jó problémamegoldó, gyorsan tud átlátni dolgokat. Viszont nehezen adja fel, ha valami nem megy, inkább kínlódik, problémázós alkat.

Láthatóan nagyon zavarja a feladat, elmondása szerint valamilyen nehéz matematikafeladatot várt. Nem érti mit várnak tőle, többször próbálja megtudni, hogy jó úton jár-e, szeretne megfelelni. Ábrát készít, a belső pálya kerületéhez a félkörök és az egyes részek hosszát becsüli, ebből becslést ad az átlagos sugárhosszra és utána körrel számol. 836 fő lesz az eredménye, soknak találja, és ezért az ábrából, ránézésre végül 700-nak becsüli a nézők számát.

A megoldás kb 24 percet vett igénybe. A négy jelzett modellezési lépés a végső értékelés kivételével gyakorlatilag megjelenik nála.

Legfontosabbnak a rendezés –ábra-t, az egyszerűsítést, és a végső kontrollt tartja.

Ezek közül megjelenik nála: az ábrakészítés, az egyszerűsítés többszöri kísérlete, a végső kontroll-a kép alapján, de az elfogadott 700-as eredményt már nem gondolja át.

Érdemes megjegyezni, hogy a megoldásánál a kevésbé fontosnak ítélt stratégiákból (1-2) a terv készítése (kicsit elnagyoltan), analógia keresés (de nem talál), elég jól halad-e (visszakérdezés formájában) megjelenik.

Zoli: a negyedik tanuló is 11.-es, mivel kéttannyelvű gimnáziumba jár, ez 10. osztálynak felel meg az előkészítős év miatt. Gyors gondolkodású, jó matekos. Szereti hamar megcsinálni a dolgokat, kimondottan eredménycentrikus.

Hosszasan gondolkodik, de csendben. Felszólításra lassan kezd beszélni. Az ábrából próbál dolgozni. 72 szektort számol össze és ennek alapján 80 000:72 alapján 1111 embert gondol egy szektorba. Itt megakad. Eddig kb. 4 és fél perc telt el. Majd másképpen folytatja, a pályát egy 100x100-as négyzetnek feltételezi, egy oldalán 250 embert számol, így összesen 1000 ember ülne az első sorban. A felvételt készítő tanár megkérdezi, hogy reális-e az eredmény? Erre az előbbi 40 cm-es emberenként helyet 50-re javítja, mert az túl kicsi lenne és 800 embert kap végül.

A megoldás valamivel több. mint 11 percig tart, a négy modellezési lépésen gyakorlatilag végigmegy.

Legfontosabbnak a rendezés –ábrát, annak ellenőrzését, hogy jól halad-e, és a végső kontrollt ítéli. Ezek megjelennek megoldásában, de a végső kontroll csak felszólításra, illetve a 800-as eredményről már nem nyilatkozik.

A tapasztalatok rövid összefoglalása a két vizsgálat alapján:

- A modellezési lépések elég jól megjelentek a tanulók munkáiban, annak ellenére, hogy ilyen feladattal gyakorlatilag nem is találkoztak, azaz sokan közelítenek „ösztönösen” modellezéssel a feladatokhoz.
- A modellezési lépések megjelenése nem jár együtt szükségképpen elfogadható megoldással, sőt…
- A jobb problémamegoldók jobban boldogulnak a feladat nyitottságával, amire itt a megjelenő magasabb átlagos lépésszám alapján illetve az interjúkból lehetett következtetni. Ez utóbbi esetben láthatóan próbál az is megoldást készíteni, akinek a feladat nyitottsága nagyon idegen- feltehetően ez okozta a magasabb lépésszám átlagot az emelt szintű csoportokban is.- Azaz a jobb problémamegoldók megoldandó problémát látnak, és nem riadnak vissza. Valószínűsíthető az is, hogy ebben erősen segíti őket a matematikával szembeni pozitív beállítottságuk is.
- A tervezés és a végső értékelés gyakran elmaradt mindkét vizsgálat esetén. A tervezést a külön vizsgált négy tanuló nem tartotta fontosnak, viszont a végső értékelést igen, viszont ez megoldásukban nem vagy csak részlegesen jelenik meg.
- A feladatmegoldáshoz a jó problémamegoldóknak úgy tűnik, sok stratégia eszébe jut a feladattal kapcsolatban, annak megoldása után, de ezek csak részben jelentek meg a feladatmegoldásban. lehet, hogy inkább utólag tudatosult bennük, mi minden. is használható (lett volna)
- A személyiség és konkrétabban a matematikai gondolkodásmód (mathematical thinking style Borromeo Ferri, 2010) is belejátszik erősen a feladatmegoldásba ez itt is érezhető volt.

Következtetések

- Biztató az az eredmény, hogy előismeret nélkül is a modellezési folyamat főbb lépései megjelennek, a modellezési kompetencia alapvető vonásai megvannak elsősorban a jobb problémamegoldóknál.
- Jó hatású lehet modellezési feladatok előtt tudatosítani, milyen feladatot oldunk meg, miben más ez, mint a hagyományos feladatok. Ez különösen a gyengébb teljesítményűek esetében segíthetné a feladatmegoldást.

- Nem lehet a tanulókat „magukra hagyni” ezekkel a feladatokkal- különösen amikor még járatlanok ilyen feladatok megoldásában. A tanári biztatás, segítő kérdések mellett az interjúk alapján érezhető, hogy ha egymással megbeszélhetik (megbeszélhették volna) a feladatmegoldást nemcsak többet is kihoztak volna magukból, hanem pozitívabb érzésekkel is távoztak volna a megoldás után.

  Ez utóbbi azért is fontos, mert a negatív érzések a modellezési feladatok iránt tovább gátolják az alkalmazások felé irányuló transzfer létrejöttét- így a modellezési feladatokkal a segítés helyett inkább gátoljuk az alkalmazási folyamat létrejöttét.
- **Feladat**

Borromeo Ferri, (2010, 105.o.) háromféle gondolkodási típust különít el 9-10 osztályos tanulók körében végzett vizsgálata alapján. A gondolkodásmódok röviden a következőképpen jellemezhetők:

- Vizuális gondolkodásmód (visual thinking style): Előtérbe helyezi a belső képi megjelenítést és a képi megjelenítések külső kivetítését. A matematikai ismeretek és összefüggések megértésénél előszeretettel alkalmaz holisztikus reprezentációkat. A belső elképzelések gyakran asszociálnak valamilyen megélt szituációra.
- Analitikusan gondolkodásmód (analitical thinking style): Előtérbe helyezi a belső formális megjelenítést, és a formális megjelenítés külső kivetítését. Képesek arra, hogy matematikai ismereteket, összefüggéseket meglevő szimbolikus és verbális reprezentáció segítségével értsenek meg, és ezt a módszert előtérbe is helyezik. Ennek során lépések sorozatán keresztül jutnak el leginkább céljukhoz.
- Integrált gondolkodásmód (integrated thinking style): Az így gondolkodók a két gondolkodásmódot kombinálják és képesek rugalmasan váltani is a vizuális és analitikus reprezentáció és eljárás között.

  A leírt négy tanulói feladatmegoldás alapján próbálja eldönteni, melyik tanulóra melyik gondolkodásmód a jellemző inkább.

  M.

A tanulók megnyilatkozása csak rövidítve olvasható, de az alapvető gondolkodásmód elég jól kirajzolódik belőle. Természetesen a felvétel részletes elemzése illetve további feladatmegoldások vizsgálata nélkül teljes biztonsággal nem állíthatók a következők.

Géza: integrált (gondolkodásmód) g.m., amely kissé analitikusba hajlik. Vizuálisan indít, a reális szituációban dolgozik, majd ezt elvetve készíti el matematikai modelljét, amellyel eredményesen dolgozik.
Zsuzsi: vizuális g.m., inkább a képet ragadja meg, matematikai ismereteket gyakorlatilag nem kíván „előhívni”, kevés indoklását is kép illetve a szituáció alapján adja.
Árpád: analitikus g.m., rögtön matematikai modellt készít, sokat gondolkodik, matematikai ismereteket mozgósítva. Végül szinte lemond erről a módszerről és a kép alapján becsül. Sok verbális, matematikai tartalmú megnyilatkozás.
Zoli: analitikus g.m., rögtön matematikai modellt készít, ezt elveti és újabbat készít. Elképzeléseit számításokkal többször korrigálja.

A modellezési feladatok megoldásával kapcsolatos megfigyelések között külön figyelmet érdemel a nehézségek vizsgálata, hiszen ezek a feladatok szokatlanok és még a jó problémamegoldók számára is gondot okozhatnak.

<u>Nehézségek modellezési feladatok megoldása során</u>

A modellezési feladatokkal kapcsolatos nehézségek fő okaként a szakirodalomban többen a feladatok kognitív igényességét említik (Blum, 2007, Schukajlow 2011).
A tanulók számára a modellezési feladatok megoldása többféle ok miatt is nehézséget okozhat. A feladatszöveg, a szituáció megértésével kapcsolatban, valamint a feladat nyitott voltának kezelése során várható elsősorban probléma. Az előbbi annak alapján, hogy a szöveges feladatok megoldásánál ez rendszeresen jelentkező gond, míg az utóbbi esetében azért, mert a feladatok hagyományosan zártak, így a nyitott, leginkább a nyitott elejű és végű problémák megértésbeli gondokat okozhatnak, bizonytalanságot kelthetnek. Ez utóbbira az előző részben is láthattunk példát.
A magyar oktatási hagyományokban a többféle megoldási út keresése nem ismeretlen, így azok a szintén nyitottnak számító feladatok, amelyek látszólag zártak, de megoldásuk többféle úton is lehetséges kevésbé okoznak gondot. A modellezési feladatok többségénél azonban a nyitottság éppen nem a feladat megoldási útjának sokszínűségében rejlik, hanem a feladat megfogalmazásának nyitottságában. Ez pedig nemcsak a magyar, de például a német iskolások számára is problémát okoz (Schukajlow, 2011).

Magyar középiskolás tanulók körében végzett felmérések (Tóth B. 2013, Ambrus, G. 2013) többféle nehézséget is említenek, de ugyanakkor arra is rámutatnak, hogy nem idegen a tanulók többségétől a modellezés, a modellezési feladatok megoldása.

Tanulók tényleges modellezési tevékenységét és az így felmerülő problémákat és lehetőségeket vizsgálta Borromeo Ferri (2010), és kiemelte az egyéni utak jelentőségét attól függően, hogy milyen gondolkodási típusú a megoldó.

Bonyolultabb modellezési feladatok jelenlegi matematikatanítási integrációjának lehetőségeit vizsgálta K. Mass egy hónapokon át tartó vizsgálat keretében német iskolások egy csoportja körében (Mass, 2004). A kutatási eredmény szerint pozitív fejlődés volt tapasztalható a modellezési kompetencia terén a tanulók többségénél és az is kiderült, hogy 7. osztálytól a modellezési kompetencia fejlesztése lehetséges.

Több projektben szerzett számos tapasztalatra hivatkozva Blum megjegyzi, hogy a modellezés tanulható (Blum, 2007). Ehhez megfelelő óraszerkezetet, a tanulók kognitív aktivitásának fokozását valamint hatékony és tanulóorientált óravezetést javasol. Véleménye szerint többek között érdemes kevésbé komplexebb feladatok megoldásával kezdeni, és a komplexitást lassan fokozni a továbbiakban.

Modellezési feladatok alkalmazásának megkezdésekor az adott tanulócsoportban gyakran jól alkalmazható az úgy nevezett lépésenkénti módszer. Ez azt jelenti, hogy a tanár az adott szituáció feldolgozását kérdésekkel, segédinformációkkal irányítja, de teret enged további tanulói kérdéseknek is. De természetesen megteheti azt is, hogy felveti a valósággal kapcsolatos problémát, és a konkrét probléma (problémák) megfogalmazását, illetve a kidolgozást (többféle lehetőség!) teljesen a tanulókra bízza, biztatva, esetleg rövid tanácsokkal segítve őket. Mindkét módszer lehet sikeres. (Blomhoj/Jensen, 2003.)

- **Feladat**

Oldja meg a következő modellezési feladatot és gondolja meg, hogy milyen kérdésekkel segítené a megoldását szükség esetén. Hányadikosokkal oldatná meg?

Károly egy kisváros külvárosi részén lakik, körülbelül 4 km-re a központtól és így kb. 17 km-re a legközelebbi kedvezményes benzint áruló benzinkúttól, ahol az aktuális árnál 10 Ft-tal olcsóbb a benzin litere. Oda a környékre, csak tankolás céljából menne.

Számítsd ki, hogy az aktuális MOL benzinár mellett mennyit spórol meg körülbelül, ha kedvezményesen jár tankolni?

Szerinted részt fog-e venni az akcióban?

M.

Például a következő megoldás készíthető:

Tegyük fel, hogy van egy 7 l-es országúti fogyasztású autója, 50 l-es benzintankkal.

Egy tankolás során 50-szer 10 Ft-t, azaz 500 Ft-ot spórol meg.

Ha a benzin árát 300 Ft/l-nek vesszük például, akkor $\frac{7 \cdot 300}{100} = 21$ Ft/km a költsége. Egy út oda-vissza ennek 34-szeresébe, azaz 583,1 Ft-ba kerül, így ezzel az autóval nem fognak Tokodra járni.

Megállapodhatunk abban, hogy pl. 200 Ft megtakarítása esetén már érdemes az adott töltőállomásra menni. Ekkor a benzinkút legfeljebb $\frac{300}{2 \cdot 21} \approx 7{,}1$km-re lehet.

Ha 6 l-t fogyaszt, akkor 18 Ft/km a költség, ekkor az út Tokodra és vissza 612 Ft lenne. Ha a tank űrtartalma csökken még kedvezőtlenebb a helyzet.

Általában elmondható, hogy a minél nagyobb tank és a minél kisebb fogyasztású az autó, akkor a kedvező a diszkont benzinárral való tankolás.

A tapasztalatok szerint a tanulók számára a legnagyobb problémát a feladat nyitottsága okozza. Úgy érzik nem megoldható a feladat, hiszen nincsenek adatok megadva. Érdemes segítségükre lenni abban, hogy megfelelő feltételeket határozzanak meg a modell elkészítéséhez, és hogy belássák, hogy az adatok alapján többféle helyes eredmény is születhet.

- **Feladat**

Gondolja meg, hogy milyen nehézségeket okoz a tanár számára modellezési feladat alkalmazása a tanórán, és ezek a nehézségek hogyan küzdhetők le.

M.

Az óra komplexebb, nehezebben tervezhető előre, és matematikán kívüli ismeretek is szükségesek. Kevés anyag áll a tanár rendelkezésére az óra tervezéséhez. Ezeket említi Blum (Blum 2007), de megjegyzi, hogy az utóbbi már Németországban nem áll fenn, hiszen sok kiadvány foglalkozik modellezési feladatokkal illetve tartalmaz tanórán használható feladatokat.

Az előbbiekhez még hozzátehető, hogy új ismeretek is szükségesek mind a modellezési feladatokról, mind a felhasználásukkal kapcsolatos módszertani tudnivalókról, ez, valamint az órákra való készülés időigényes, akárcsak a modellezési feladatok alkalmazása, hiszen egy-

egy feladat megoldásához sokszor legalább egy teljes tanóra szükséges, márpedig az idő kevés- hangzik a tanárok gyakran hangoztatott érve.
A nehézségek leküzdéséhez javasolható az önképzés illetve tanártovábbképzés, tanári szemléletváltás, illetve annak átgondolása, hogy hol jut idő egyszerűbb és mikor hosszabb lélegzetvételű modellezési feladat megoldására. Érdemes meggondolni, hogy a tapasztalatok szerint az év vége felé az utolsó egy-két hét jól kihasználható általában modellezési, akár hosszabb feladatok megoldására is, de erre sok iskolában, ki tudja miért, mégsem kerül sor.

M*odellezési feladatok értékelése*

Az értékelés során a tanár önmaga és a tanulók számára is megfogalmazza, hogy adott ismeretek, eljárások, folyamatok mennyire sikeresen jelennek meg a tanulók ismeretrendszerében.
Az értékelés kérdését a továbbiakban a modellezési feladatok esetében a gyakorlati lehetőségek szempontjából vizsgáljuk.
A modellezési feladatok esetében a feladatok nyitottsága miatt, azaz a modelltől illetve a modellhez rögzített konkrét feltételektől függően többféle helyes eljárás és eredmény is létezhet. Míg a zárt feladatok esetében sem helyes csak a végeredményre koncentrálva megítélni, - azaz annak helyes vagy helytelen voltából - a megoldás egész folyamatát, a modellezési feladatok esetében ez gyakorlatilag nem is jöhet szóba. Mivel a modellezési feladat megoldása során az elvégzett folyamat a meghatározó, így ennek alapvető szerepe van a megoldás értékelésében is.
Például értékelhető, egyéni munkájuk alapján, hogy hány modellezési lépést végeztek el (Tóth B. 2013), illetve hány modellezési lépést végeztek el jól/közepesen/helytelenül vagy egyáltalán nem tanulók megoldásuk a során. A csoportban végzett munka értékelése is történhet hasonlóképpen (Maaß, 2007). Az említett értékelési módokkal elsősorban az illetők modellezési kompetenciája kerül értékelésre.
A modellezési kompetencia magában foglalja azokat a képességeket és készségeket, amelyek lehetővé teszik a modellezési folyamat célra irányuló megfelelő végrehajtását, valamint a szándékot is, hogy ezek a képességek és készségek gyakorlati alkalmazásra kerüljenek. (Maaß, 2004)
Az értékelés függ attól, hogy milyen jellegű a modellezéssel kapcsolatos feladat, milyen nehézségű, mi volt a feladat konkrét célja, mi várható el reálisan az adott tanulócsoporttól.

Egy egyszerű értékelési sémát ad meg Maaß (2004, 40.o.), ennek alapján készült el a következő értékeléshez használható táblázat, amely alapul szolgálhat konkrét modellezési feladat –megoldás értékelésének elkészítéséhez:

1.	A valós modell elkészítése -Megfelelőek-e a megfogalmazott feltételezések? -A probléma egyszerűsítése reálisan történt-e	0-10 pont
2.	A matematikai modell és kidolgozása - Megfelelően történt-e a matematizálás - Matematikailag korrekt-e a megoldás	0-14 pont
3.	Az eredmény interpretálása - megtörtént-e az eredmény interpretálása a valóságra - Megfelelő-e ez az interpretálás	0-6 pont
4.	A kapott eredmény vizsgálata, a modell kritikája	0-10 pont
5.	Az elvégzett munka megfelelő dokumentálása	0-10 pont
		50 pont

Táblázat: Modellezési megoldásához értékelési szempontok és pontrendszer K. Maaß 2004 nyomán.

Fontos, hogy az értékelési szempontokat az adott csoport a feladat kiadásakor megismerje és az is, hogy a pontok mellett szóbeli értékelés is szerepeljen.

A modellezéssel kapcsolatban feladatok *megoldásán* kívül másféle „feladatok” is adhatók a tanulók számára. Például adott modell értékelése vagy modellezési feladat készítése.

Ez utóbbiak szerepelnek például kötelező feladatként tanárszakos hallgatók Valóságközeli Matematika II speciálszemináriumán. Ennek során az elkészítendő feladathoz adott kritériumok figyelembevételével mindig közösen a csoporttal készül el előre az a szempontrendszer, ami alapján a feladat bemutatása után a gyakorlatvezetői értékelés készül.

A szempontrendszer elkészítése során először a szempontok kerülnek a táblára, majd megállapodás következik egy összpontszámban és abban, hogy ez hogyan kerül elosztásra a szempontok között (súlyozás).

Például így készült el a következő szempont/pontszám rendszer is az egyik félévben (zárójelben a pontszámok találhatók):

1. **Korosztály**

- Téma autentikussága ennek a korosztálynak (1)
- matematikai tartalom megfelelő-e (1)

2. **Design** (a feladat kivitelezése alkalmas és igényes-e) (1)
3. **Kommentár** (A feladathoz kell csatolni, adott szempontok szerinti tartalommal)

- Korosztály feltüntetése
- A feladatban érintett matematikai tartalom
- Megoldás, legalább egy lehetséges modell végiggondolása, kidolgozása
- A feladat továbbgondolása, variálása

(4X1)

4. **Modellezési feladat-e valóban** (2)

Összesen 9 pont

Ebben a pontozásban gyakorlatilag egyenlő súllyal szerepeltek az egyes tényezők. Emiatt, valamint a kevés szempont és az alacsony összpontszám következtében kevésbé differenciált képet adott a hallgatói munkákról. A csoport a félév végén ezt meg is jegyezte. Fontos lett volna még például a bemutatás módja-t is hozzávenni. Voltak már olyan csoportok is, akik úgynevezett bónuszpont beiktatását javasolták. Ez azt jelentette, hogy a feladat bemutatása/megoldatása után az illető kiment és a csoport szavazott, hogy mennyit kapjon bónuszként az erre a célra korábban már meghatározott pontszámból, amihez aki akart indoklást is fűzhetett. A szavazás eredményét az érintett hallgató is megismerte ezután.

Ez a fajta értékelési kiegészítés általában nemcsak reális, de hasznos is volt.

Az előbbi értékelési módszerek eltérnek a hagyományos tanári értékeléstől sok tekintetben. Arra is példát mutatnak, hogyan lehet különböző „feladatokhoz" különböző szempontok segítségével, de a lehetőségekhez képest egységes értékelési rendszert készíteni. Érdemes továbbgondolni, hogy az értékelésbe hogyan lehet minél hatékonyabban bevonni a tanulókat.

- **Feladat**

Készítsen értékelő szempontrendszert ha a feladat az, hogy adott modell megértését kell értékelni.

M.

Többféle szempontrendszer készíthető, különböző pontozással. Fontos, hogy a szempontok között szerepeljenek a következők:

A modell megértése. A modell (valós és matematikai) értékelése, kritikája a feladat szempontjából. A megfelelő dokumentáció. Szükség/lehetőség esetén javaslat más modellre.

Modellezés megjelenése a tantervekben

A következőkben a magyar NAT 2012 mellett összehasonlításként rövid bepillantás következik a Német Alaptantervbe is. Ennek során a modellezési kompetencia különböző szintjei ismerhetők meg. A szintek átgondolásának a hazai gyakorlatban is jelentősége van a modellezési feladatok iskolai alkalmazásának tervezésénél.

A Német Alaptanterv (Bildungsstandard) a kompetenciaszintek segítségével állapítja meg az egyes kompetenciák esetében, hogy a különböző korosztályok milyen szintre kell, hogy eljussanak.

A modellezési kompetencia korábbiakban említett megadásánál (Maaß, 2004) részletesebb megfogalmazást ad meg Henning és Kaune (2011):

A modellezési kompetencia alatt értjük a modellezés folyamatára irányuló képességek és készségek rendszerét, a folyamatra vonatkozó ismereteket, a matematika alkalmazásának metaanalízisére vonatkozó képességet, valamint azt a szándékot hogy mindezen képességek és ismeretek egy valós probléma megoldásához szükséges sokféle szituáció esetében bevetésre kerüljenek. A modellezési kompetencia magában foglal így matematikai és interdiszciplináris valamint tevékenységekkel kapcsolatos kompetenciákat is. . (Henning/Kaune, 2011, 18.o.)

A kompetenciaszinteket Henning és Kaune (2011) a következőképpen fogalmazza meg:

1. szint. *Modellezési folyamat felismerése és megértése*

- A modellezési folyamat leírásának képessége
- A folyamat egyes lépései jellemzésének képessége
- A folyamat lépései megkülönböztetésének képessége

2. szint. *Önálló modellkészítés*

- Különböző megoldások készítésének képessége
- Képesség arra, hogy a matematika különböző területei (algebra, geometria..) alkalmazásra kerüljenek a modellezés során

- A modellezési folyamat önálló végrehajtásának képessége

3. szint. *Metareflexió modellezésről*

- Matematikai alkalmazások akár konkrét problémától független értékelési képessége
- A modellezési folyamat kritikus értékelésének képessége
- A modellezési folyamat értékeléséhez kritériumok megfogalmazásának képessége

Ahhoz, hogy jobban érzékelhető legyen, milyen komplexek a 3. szintben megfogalmazottak, bemutatásra kerül egy példa ehhez a szinthez készíthető feladatra:
Vizsgáld meg a Forint vásárlóértékének alakulását az elmúlt 10 évben! Keress különböző lehetőségeket a változás bemutatására és hasonlítsd össze ezeket! Gondold meg, hogy általában vásárlóérték alakulását milyen módon érdemes bemutatni!

A háromféle kompetenciaszint tanulmányozása azért hasznos, mert így jobban átgondolhatók azok a lépések, amelyek során elmélyíthető a tanulók modellezési kompetenciája. Az egyes szintek eléréséhez készíthető feladatok segítségével fokozatosan nehezebb modellezéssel kapcsolatos feladatok kerülnek megoldásra. Modellezési feladatok tanításánál általában célszerű inkább „lépésenként", azaz szintek szerint haladni, bár egyes esetekben a nehezebb feladatokkal történő indulás is alkalmas lehet.

- **Feladat**

Adjon meg feladatokat a Henning és Kaune (2011) által megfogalmazott 3 szinthez.

M.

Egyéni, például:

2.szinthez:

A Föld térképének felhasználásával add meg, mekkora földterület jut egy-egy lakosnak a Földön! Oldd meg a feladatot! Számolj be arról, hogyan gondolkodtál, add meg feltételeidet és eredményeidet is.

A NAT 2012-ben a hét fejlesztendő területben megfogalmazott részfeladatokban jelenik meg a modellezési kompetencia fejlesztése. A következőkben ezekből idézünk:

„2.Megismerés

2.1Tapasztalatszerzés: a tapasztalatok tudatosítása, közlése, rögzítése, jelölése, ezek értelmezése, visszaolvasása
„Modellezés; fogalmak, összefüggések megjelenítése. (7-12)
Szavakban megfogalmazott helyzetről, történésről készült matematikai „szöveg" értelmezése. Konkrét matematikai modellek (nyitott mondat, szakaszos ábra stb.) értelmezése a modellnek megfelelő szöveges feladat alkotásával. (1-12)
2.2. Képzelet (követő, alkotó)
Matematikai úton megoldható probléma megoldásának elképzelése, becslés, sejtés megfogalmazása; megoldás után a képzelt és tényleges megoldás összevetése.
2.4. *Gondolkodás*
Kérdés tartalmának megértése adott tárgyi szituációban és megfogalmazott
problémában (szituáció, változás, szöveges feladat, egyéb probléma).
Matematikai modellek megértése (pl. számok, műveletek, nyitott mondatok, sorozatok, függvények, táblázatok, rajzos modellek, diagramok, gráfok, grafikonok); átkódolás más modellbe. Adott modellhez példa, probléma megfogalmazása." (NAT 2012,)

A 2.1 pontban a matematikai modell megalkotása áll a középpontban. Nemcsak a „szöveg" matematizálása szerepel, hanem az inverz feladat is: matematikai tartalomhoz szöveg készítése. Itt azonban természetesen hagyományos szöveges feladatról van szó.
A 2.2 esetében a becsléshez és a matematikai megoldáshoz is készülhet modell.
A 2.4 esetében szituációs modell elkészítéséről is szó lehet a kérdés tartalmának megértése során. A modellek megértése illetve átkódolása az adott szituációhoz adható többféle elképzelés alapján készíthető többféle modell lehetőségét készíti elő.

- **Feladat**

Nézzen utána a matematikával kapcsolatban a NAT 2012 –ben megfogalmazott fejlesztési területekben hol és hogyan fogalmazódik még meg a modellezési kompetencia fejlesztése! Értelmezze mit is jelentenek ezek a modellezési kompetencia szempontjából!

M

A következő területeken, az alábbi formákban:

3. Az ismeretek alkalmazása: Régebbi ismeretek mozgósítása, összeillesztése, felhasználása új helyzetben; sejtés, ellenőrzés.
4.Problémakezelés és –megoldás
-Önálló eljárások keresése, megoldási kísérletek, tippelések szabad végzése, összevetése a kapott információkkal, a valósággal. 7-8-tól
-A problémához illeszthető matematikai modell választása, keresése, alkotása. (A probléma részekre bontása; összetett probléma áttekintése. Átfogalmazás más, ismertebb problémává; analógia keresése.)

-Megoldás a matematikai modellen belül. Matematikai modellek (pl. nyitott mondatok, gráfok, sorozatok, függvények, függvényábrázolás, számítógépes programok, statisztikai elemzések) ismerete, alkalmazásának módja, korlátai (pontosság, értelmezhetőség).
A-z eredmény vonatkoztatása az eredeti problémára. Az eredmény összevetése a feltételekkel, az előre vetített eredménnyel, a valósággal, illetve magasabb évfolyamokon: diszkusszió. (A lehetőségek számbavétele. A feltételekkel való összevetés során annak tudatosítása, hogy miben és hogyan befolyásolják
a feltételek az eredményt. Ha elhagyjuk, megváltoztatjuk valamelyiket, hogyan módosul a megoldás?)

5. Alkotás és kreativitás

-Modell alkotása helyzet megértéséhez: eljátszás, mímelés, képek, egyszerűsített képek, egyszerűsített mozgatható kirakások, szakaszos ábrák, gráfok készítése probléma, szöveges feladat értelmezéséhez.
-Modell alkotása, értelmezése fogalmakhoz. A természetes szám modellként való kezelése (különféle fogalmi tartalmak – darabszám, mérőszám, értékmérő, jel – szerint), tört szám, negatív szám, egész szám, racionális szám modellként való kezelése; számegyenes; az aritmetikai műveletek mint történések és viszonyok matematikai modelljei; egyenletek, egyenlőtlenségek; reláció, függvény, sorozat mint modellek; ábra, diagram mint modell.
6

6.2 Együttműködés

Vitakészség, kifejezőkészség fejlesztése. Az együttműködő partnerek részeredményeinek értelmezése, értékelése, összerendezése. Együttműködés projektben.

7. Matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei

Modellek alkotása a matematikán belül; matematikán kívüli problémák modellezése. 9-12

A továbbiakban szó lesz a modellezési feladatok matematika tanításában betöltött szerepéről, kitekintéssel nemzetközi tapasztalatokra.

Modellezési feladatok jelentősége

A jelenlegi kutatások szerint nem elegendő kizárólag matematikán belüli kérdéseket például algebrai átalakításokat végezni, vagy szöveges feladatként kizárólag beöltöztetett feladatokat vizsgálni ugyanis az így szerzett ismeretek valóságra történő alkalmazása problematikus (Schukajlow, 2011, Renkl, 1996).
Az iskolai körülmények között, más szituációban szerzett tudás megmarad az „iskolai tudás”-nak (Dobi J./Csapó B., 1998) nem lesz alkalmazásképes, pedig erre lenne szükség. Ezért fontosak a valós tartalmú problémafelvetések, amelyek megoldása során a valóság és a matematika közötti kapcsolat létrejön. Az ilyen feladatok a tanulóktól nem-sematikus

gondolkodásmódot, aktív részvételt igényelnek. A gondolkodásra serkentő feladatok vagy problémák segítségével a tudás felépítésére kerül sor, míg a példafeladatokon vagy minták segítségével történő tanulás során a tudás befogadására.

Még a megfelelően választott, kognitív aktivitást igénylő feladatok sem biztosítják önmagukban a tanulás sikerét. A megfelelően választott feladatok mellett ezeknek az adott körülmények között való alkalmas feldolgozására is szükség van.

A valóságos helyzeteken alapuló feladatok jelentősége a matematika tanításában összefoglalható a következőképpen:

Egyrészt azért szükségesek, mert megváltoztak az igények, elvárások és ezek teljesítéséhez, mint azt a felmérések, kutatások bizonyították (például PISA, magyar kompetenciamérések), a matematikán belüli, hagyományos feladatok nem elegendőek.

Másrészt, de az előbbiektől nem teljesen függetlenül felsorakoztatható, az a sok lehetőség és pozitívum, amely valós tartalmú feladatok alkalmazásában rejlik. Ugyanis ezekben a feladatokban

- a matematika segítségként jelenik meg a világ megértéséhez
- a valós tartalmak hozzájárulnak különféle matematikai és nem matematikai kompetenciák fejlődéséhez, megfelelő álláspontok, beállítódások kialakításához,
- a matematikáról alkotott megfelelő kép kialakításához, mint például
    - A matematikai tartalom fontosabb, mint a formalizmus
    - A matematikai gondolatok legalább olyan fontosak, mint a matematikai eredmény
    - A jó matematikai tudás nem hibátlanságot, hanem jó matematikai gondolatokat jelent.
    - Mindkettő egyaránt fontos: a gondolatok megfogalmazása és ezek kritikus vizsgálata
    - A matematikai tudást fel kell építeni, nem késztermék
- segítséget kapnak a tanulók a matematika tanulásához (például: motiváció, fogalomalkotás, megértés, tanultak rögzítése terén).

Modellezési feladatok alkalmazása

- erősíti a matematikával szembeni pozitív beállítottságot.
- során gyakran van lehetőség arra, hogy a tanulók önálló kreatív munkát végezzenek, valamint, hogy fejlesszék problémamegoldó képességüket.

- során gyakran van lehetőség, hogy matematikán belüli illetve a matematika és más tárgyak közötti összefüggések megtapasztalására.

Sokaknak jelentik ilyen feladatok a matematikatanulás értelmét is, illetve hozzásegítheti őket ahhoz, hogy a matematikatanulásban örömet leljenek.

Fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy a valóságközeli, illetve modellezési feladatok nem a hagyományos matematikai feladatok helyét akarják átvenni. A gyakorló feladatok körét kiegészítve, egy sokoldalúbb, rutineljárásokat ésszerűen és nem kizárólagosan tanító,„tiszta" matematikai problémákat is megfelelő szinten tárgyaló matematikatanítás eszköztárának fontos részét alkotják.

- **Feladat**

Keressen olyan példát, amikor az iskolai matematikatanítás során inkább nem használna modellezési feladatot.

M.

Eljárások adott tétel gyakorlására, hiszen a modellezési feladatok komplexebbek, nem feltétlenül segítik a szükséges rutin kialakulását. Például tesztfeladatok esetében, dolgozatpéldaként sem igazán jók, bár elképzelhető megfelelő értékelési rendszer kidolgozásával ilyen esetben is ilyen feladat.

Beöltöztetett és valóságközeli feladatok

A matematika tanításában szereplő feladatok között gyakran szerepelnek olyanok, melyek látszólag valós helyzettel kapcsolatosak, de valójában igen távol vannak attól a szituációtól, amelyet szövegezésük szerint felhasználnak. Vegyük például a következő feladatot egy régebben elterjedten használt tankönyvből:

Egy szem kockacukor tömege $3\frac{17}{36}$ *g. Fél kilogramm cukor hány szem? Hogyan helyezhető el egy téglatest alakú dobozban?*

Rögtön szembeötlik a vegyes tört alakban megadott mennyiség, hiszen ilyen alakban nem szokás tömeget megadni a mindennapi életben.

De a szituáció sem tekinthető valós helyzetnek, hiszen a kockacukor és a hozzátartozó doboz méretét feltehetően inkább valahogy „összehangolják", mintsem hogy egy meghatározott „kockaméréthez" keressenek dobozt. Ez abból is következik, mivel néhány „kockacukros" dobozt megvizsgálva, a dobozméretek igen különbözőek voltak, akárcsak a bennük lévő kockacukor darabszáma. Arról nem is beszélve, hogy több kockacukorfajta már egyáltalán nem kocka alakú…

Nyilvánvaló, hogy a feladatban szereplő helyzet csupán abból a szempontból érdekes, hogy az eredményül kapott 144 szem (12x12) többféleképpen is bontható 3 tényezős szorzatra, így többféle dobozban elhelyezhető ez a cukormennyiség. Így tehát a kockacukrok csak „kerettörténetül" szolgáltak, azaz „beöltöztetett" feladatról van szó.

A beöltöztetett feladatok megoldása során általában a következő 4 lépés szerepel: 1. Olvasás, megértés 2. „Kiöltöztetés" 3. Számolás 4. A számítás ellenőrzése és a válasz megadása. Blum (2007) megjegyzi, hogy ennek során gyakorlatilag alig van modellezésre lehetőség, hiszen például a szituációs modell és a valós modell megalkotása teljesen elmarad. Ha az előbbi lépéseket egybevetjük a modellezési ciklussal, akkor a modellezés folyamatából a megértés, a matematikai modell, illetve a számítás elvégzése marad. Bár a modellezési ciklus egy részének alkalmazása révén is modellezési feladatot oldhatunk meg ebben az esetben erről szó sincs, hiszen nem a valósággal, valós helyzettel kapcsolatos feladatokról van szó.

A beöltöztetett feladatok megoldása során általában kevesebb kompetencia is kerül fejlesztésre.

A beöltöztetett, vagy ahogy még nevezni szokták „prototípus" feladatok azonban fontosak a matematika tanulásában, hiszen alkalmasak például matematikai tartalom szövegösszefüggésben való felismerésének, a szöveg megértésének gyakorlására, így ezek is hasznos gyakorlófeladatok lehetnek.

Arra azonban már nem alkalmasak jellegüknél fogva, hogy valódi alkalmazást, életközeli helyzetekben való problémamegoldást tanítsanak, hiszen mesterséges és erősen leegyszerűsített, nem ritkán kimondottan életidegen szituáción alapulnak illetve ilyen kérdésfeltevést tartalmaznak.

Bár így is hozzájárulnak matematikai tudásunkhoz, hiszen például eljárásokat, szövegértést, probléma megoldási lépéseket tanulhatunk segítségükkel, mégis fontos tisztázni a tanulókkal, hogy ezek nem a matematika mindennapi alkalmazását gyakoroltatják. Ugyanis ha beöltöztetett feladatok valódi alkalmazásokként kerülnek tárgyalásra erősítik a matematika és az élet szétválasztását a diákok fejében, hiszen életidegenek. Egyúttal felmerülhet a diákokban egy olyan „világ" lehetősége is, ami csupán a matematika órán érvényes, idealizált, sőt esetenként értelmetlen tárgyakat, helyzeteket használ. Ezáltal erősödhet a tanulókban az a gyakran amúgy is ott motoszkáló gondolatot, hogy a matematika a gyakorlati élet számára lényegében használhatatlan.

Szükség van tehát arra, hogy a beöltöztetett feladatoknál tisztázzuk, nem valós alkalmazásokról van szó, esetleg kitérve arra is, hogy az adott szövegezésű feladat hogyan alakítható valós tartalmú feladattá, vagy/és hogyan egészíthető ki ilyen valós tartalmú kérdésekkel.

Az előbbi „kockacukros”feladatot például a következő kérdésekkel lehet kiegészíteni, és így a valós élettel összekötni, de a kiegészítés tekinthető akár önálló feladatváltozatnak is a kockacukros” feladathoz.

Válassz ki kétféle kockacukros dobozt és leszámolva a bennük levő „kockák” számát add meg egy kockacukor tömegét az adott dobozban. Gondold meg, hogy ennyi kockacukor számára tudsz-e másféle méretezésű dobozt javasolni. Vajon az általad készített, vagy a „gyári” doboz lehet az előnyösebb? Keress szempontokat és ennek segítségével válaszold meg a kérdést!

- **Feladatok**

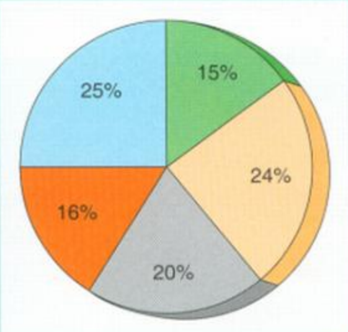
A következő feladat szintén egy nemrég még elterjedten használt tankönyvből való. Döntse el, hogy valós vagy beöltöztetett szituációról van szó, állítását indokolja!

Kidolgozott mintapélda

Egy család havi nettó jövedelme májusban 310 000 Ft volt. A kördiagram szemlélteti, hogy a család mire költötte a jövedelmét.

- Törlesztések.
- Élelem, mosó- és tisztítószerek.
- Közlekedés, autó.
- Ruházkodás, egyéb.
- Lakás, gáz, világítás, víz stb.

Mire mennyit költött ez a család májusban?



Törlesztésre a jövedelem 15%-át költötték:	310 000 · 0,15 = 46 500 (Ft)
Élelem, tisztítószerek:	310 000 · 0,24 = 74 400 (Ft)
Közlekedés, autó:	310 000 · 0,20 = 62 000 (Ft)
Ruházkodás, egyéb:	310 000 · 0,16 = 49 600 (Ft)
Lakásfenntartás:	310 000 · 0,25 = 77 500 (Ft)
Összesen:	310 000 (Ft)

M.

A kerettörténet csupán azért kellett, hogy százalékszámítási feladatot kapjanak a gyerekek, és a „háttér” életszagú legyen. A helyzet azonban „élettől távolira”sikerült, hiszen valószínű, hogy egy családban a kiadásokat kördiagrammon ábrázolják azért, hogy valaki ebből

visszaszámolja az egyes tételekre kiadott összegeket. A feladat viszont gyakorlási lehetőség kördiagrammokon megadott információ olvasásához.
Ha például egy család (bizonyos feltételek melletti) átlagos kiadásainak ábráját adták volna meg és azzal kellene dolgozni, más lenne a helyzet. Ezzel további, például más feltételek melletti kiadáscsökkenés/emelkedés kérdés is vizsgálható lenne.

- **Feladat**

A fejezetben szereplő két „kockacukros" feladatváltozat esetében gondolja meg, hogy milyen képességek és ismeretek gyakorlódnak a beöltöztetett változat és milyenek a valóságközeli változat esetében. Ez utóbbi változat miért tekinthető modellezési feladatnak?
M.
Beöltöztetett feladat: szövegértés, téglatest térfogata, műveletek törtekkel, átváltás g-kg, egy szám többféle felbontása szorzatalakra,
Valós feladatváltozat: szövegértés, meglevő modell értékelése- az adott doboz méretezése szempontjából, modellkészítés-dobozméretezés, téglatest térfogata, műveletek tizedes törtekkel, átváltás g-kg, egy szám többféle felbontása szorzatalakra, kis tömegek meghatározásának egy lehetséges módja: nagyobb mennyiség (nagyobb darabszám) együttes tömegéből. Valós probléma megoldása, fél kg adott darabszámú kockacukor mennyiség lehetséges elhelyezése dobozban.

- **Feladat**

a) Válasszon egy jelenleg használatban levő tankönyvet és a szöveges feladatai között keressen beöltöztetett feladatokat. Vizsgálja a tankönyvben a valóságközelinek illetve beöltöztetettnek tekinthető feladatok arányát is hozzávetőlegesen.
b) Válasszon egy 5-10 évvel korábban kiadott olyan tankönyvet, amely hasonló korosztálynak készült, mint az a) feladatban használt tankönyv. Végezze el ezen is az ott leírt vizsgálatot. Lát-e változást, fogalmazza meg részletesebben tapasztalatait?
Megjegyzés
Az a) és b) feladatokra adott válasz függ attól, hogy mennyire tudja szétválasztani ezt a két feladattípust, illetve attól is, hogy milyen tankönyveket hasonlít össze. Általában azonban elmondható, hogy az utóbbi években érezhető a törekvés a tankönyvekben a valós/valóságközelibb alkalmazások szerepeltetésére.

- **Feladat**

Az alábbi feladatokat jellemezze a következő szempontok szerint:

a) nyitott-zárt

b) valós-beöltöztetett

1.*„Hazánkban pénteken délelőtt többnyire erősen felhős lesz az ég az ország felett. Kisebb hószállingózásra legfeljebb csak elszórtan, főként a délnyugati országrészben lehet számítani. Délután az északi, északkeleti megyékben elvékonyodik, helyenként felszakadozik a felhőzet. Máshol továbbra is túlnyomóan felhős lesz az ég. A szél napközben élénk északkeleti lesz. Hajnalban -4, 1 fok várható. A hőmérséklet csúcsértéke -1, 4 fok között alakul. Késő este -4, 1 fok lesz. Minimum:* ***-4, 1*** *Maximum:* ***-1, 4" (Forrás: idojaras.origo.hu)***

Milyen érdekességeket látsz 2008.01.29. várható hőmérsékletalakulásában?

M.

Valós, inkább zárt feladat. Érdekességként említhető a megadott hőmérsékleti értékek alakulása (ellentett).

2.Az egyik joghurt fajtát négyes csomagokban is árulják. Egy színes matrica hirdeti a csomagon az árát: dobozonként csak 56 Ft. Ha két csomagot veszel, mennyi az ára?

M.

Ilyen akció ismert, így valós a helyzet és zárt a feladat.

3.Orosházán 2008. augusztus 20-án huszonöt méter hosszú kenyeret sütöttek, amit kétezer szeletre vágtak fel.

Milyen széles lehetett egy-egy szelet?

M.

Valós, inkább zárt feladat. Ha feltételezzük, hogy minden szelet közel azonos szélességű. De készíthető többféle felvágási mód is, ha ilyenre gondolunk, akkor nyitott feladatról van szó.

4. Egy kisváros 526,5 m hosszú főutcájának szélén facsemetéket ültetnek. Hány fára van szükség, ha 9 m-enként ültetnek egy fát?

M.

A feladat klasszikus beöltöztetett, zárt feladat.

4.Tudod, hogy legalább másfél liter folyadékot meg kellene innod naponta, mennyit ittál ma? – Kérdezte Lillát édesanyja estefelé. Szerintem minden rendben, hangzott a válasz. Sejtettem, hogy meg fogod kérdezni, ezért megszámoltam, hogy 4 pohár vizet, 1 pohár tejet és egy bögre teát ittam ma. Szerintem elég folyadékot ittam.

Mi a véleményed erről?

M.

Ha 1 pohár folyadék 2 dl-nek vehető, 1 bögre tea körülbelül 2,5 dl, 1l és 2,5 dl volt ez összesen. Mindenképpen kellene még legalább 1 pohár folyadék. A helyzet valós, ha rendszeresen visszatérő téma Lilláéknál a folyadékivás, különben nem valószínű, hogy a leányzó megjegyzi, mennyit ivott. A jelzett pohár illetve bögretérfogatok helyett 2,5 dl-es pohárral és 3 dl-es bögrével is lehet számolni, ekkor viszont már megvolt a másfél liter folyadék. A válasz láthatóan a feltételektől függött, nyitott feladatról van szó.

5.A müzliszelet ára 4 darabtól darabja 64 Ft helyett 50Ft. Olvasható egy 2009-es akcióban.

Szerinted mennyit lehet így megtakarítani?

Hány darabot érdemes vásárolni?

M.

Először számítsuk ki, hogy 4 db esetén mennyi a megtakarítás:

Ez történhet így: 4x64 - 4x50=56Ft, vagy így 4(64-50)=56 Ft mind a kétféle lehetőségre érdemes kitérni, ha a tanulók nem is „hozzák” a kétféle megoldást.

Ezután számolhatunk tovább és meggondolható, hogy például hány darab vásárlása esetén hányat tudnánk még venni a nem akciós esethez képest. Itt többféle számítás is végezhető.

A második kérdés arra irányul, hogy szakadjunk el az akció vonzásától és gondoljuk meg például, mennyire van szükségünk, egyáltalán szeretjük-e ezt a terméket.

Az akció létezett, tehát valós, nyitott feladatról van szó, de mivel hasonló jellegű akció valós helyzetben is elképzelhető, így ha nem is tudtunk róla, akkor is valóságközeli feladatról van szó..

6. „Egy vödörben kb. 6,5 kg narancs van, a vödör ajándék. Az ára 999.- azaz kb. 153,69 Ft/kg” olvashatjuk a hirdetésben, 2009 januárjában..

Mi a megjegyzésed ezzel kapcsolatban?

M.

Ismert akció, egy/több nagyobb élelmiszeráruházlánc évek óta meghirdeti, csak a narancs ára változik. Mivel többféle helyes megjegyzés is lehet ezért nyitott feladat..

Megjegyzés:

A feladatok kapcsán az is látszik, hogy nem lehet mindig egyértelműen eldönteni egy feladatról, hogy beöltöztetett vagy valós tartalmú-e, sőt az is értelmezés kérdése, időnként, hogy zárt vagy nyitott egy feladat.

Valóságközeli feladatok készítése

Valós szituációt feldolgozó, de különösen modellezési feladatok alkalmazásával kapcsolatban gyakran hozzák fel ellenérvként, hogy nem áll rendelkezésre elegendő feladat. Az utóbbi időben magyar nyelven is megjelentek olyan feladatgyűjtemények, amely általános és középiskolások számára készült valóságközeli illetve modellezési feladatokat tartalmaz. Ilyenek a jegyzet irodalomjegyzékében is találhatók.

De a készen található feladatokon túlmenően számos feladat készíthető is, különböző módokon. A készített feladatoknak nagy előnye, hogy az adott tanulócsoportra, adott helyzetekre, aktualitásokra illetve matematikai tartalmakra „szabhatók”. Érdemes megjegyezni, hogy nemcsak tanár készítheti ezeket diákjai számára, hanem ebbe a munkába diákok is bevonhatók. Például tanár által előkészített információs anyag segítségével vagy akár általuk gyűjtött anyagok különféle módon való felhasználásával.

Feladatkészítés különböző információs anyagok felhasználásával

Sokféle módon juthatunk olyan szituációkhoz, információkhoz, amelyek alkalmasak valóságközeli feladatkészítésre. A téma sokszor az utcán (interneten) hever, csak észre kell venni. A teljesség igénye nélkül bemutatunk néhány példát (kedvcsinálónak). Ezek segítségével látható az is, hogy milyen változatos témájú és matematikai tartalmú feladatok készíthetők.

1. Példa

   Interneten gyűjtött anyagból

   A következő igényes kivitelű feladatot egyetemi hallgató készítette[2]. A matematikai tartalom lényegében kör kerületének kiszámítása, de más ismeretekre is szükség van.

[2] Csatári Tamara feladata
Forrás:
http://hu.wikipedia.org/wiki/Sherman_t%C3%A1bornok_f%C3%A1ja

SHERMAN TÁBORNOK FÁJA

Sherman tábornok fáját (eredeti nevén General Sherman) tartják a legnagyobb fának a világon. Az Egyesült Államokban található óriás mamutfenyő főbb adatait az alábbi táblázat[1] tartalmazza:

térfogata	1487 m^3
magassága	83,80 m
kerülete a törzs aljánál	31,10 m
a törzs aljának legnagyobb átmérője	11,10 m
átmérője 1,5 m magasságban	8,25 m
átmérője 18 m magasságban	5,30 m
átmérője 55 m magasságban	4,30 m
a legnagyobb ágának átmérője	2,10 m
az első nagyobb ág elhelyezkedése a földtől mérve	39,60 m
a lombkorona átlagos szélessége	32,50 m

Mit gondolsz, legalább hány emberre van szükség ahhoz, hogy körbe lehessen fogni a fát?

2. Példa

Tankönyvi feladatból

A következő tankönyvi feladat felhasználásával többféle valóságközeli feladat is készülhet:

Rómeó és Júlia találkoznak. Amikor megpillantják egymást, távolságuk 60 méter.. Természetesen azonnal elkezdenek egymás felé szaladni: Rómeó 5 m/s sebességgel, Júlia 3 m/s sebességgel. Hány másodperc elteltével érkeznek meg egymáshoz?

- Gondolja meg mennyire reális a feladat szituációja!
- Rómeó és Júlia alkonyatkor találkoznak. Amikor megpillantják egymást, természetesen futni kezdenek egymás felé. Hány másodperc elteltével érkeznek meg egymáshoz?
- Rómeó az egy kerti 50 méteres úszómedence egyik végénél áll és szomorúan nézi a vizet. Mikor felpillant a medence másik végénél Júliát látja meg, aki felé tart. Ekkor mindketten futni kezdenek egymás felé. Hány másodperc elteltével érkeznek meg egymáshoz?

Az eredeti feladat nyilvánvalóan „beöltöztetett” feladat, hiszen a találkozáskor nem mérték le az egymástól való távolságot, és azt is meg kell gondolni, hogy a jelzett sebességek reálisak-e. A matematikai tartalom tekintetében egyszerű mozgási feladatról van szó.

Az első kiegészítő feladat reflektáló típusú, a feladatban már megfogalmazott „valós modellt” vizsgálja, míg a másik kettőben már modellezésről van szó, valóságközeli szituációban.

3. Példa

Reklámanyag felhasználásával

A következő kép nem is olyan régen a Budapesti Metró egyik állomásán készült, várakozás közben.

A gyanakvó vásárló például ellenőrizheti az adatok helyességét a reklámon:

- Számolj utána, hogy helyesen számoltak-e, amikor a feliratot elkészítették. Ha nem, tégy javaslatot a javításra.

A reklámokkal kapcsolatban sok hasonló feladat megfogalmazható. Fontos, hogy ne csak kritika érje az esetleg rosszul kiszámított és/vagy felírt számadatokat, hanem javaslat is készüljön a kijavításra. A racionális számokkal végzett műveletek gyakorlásához jól alkalmazható.

4. Példa

Újságcikket, rövidhírt alapul véve

Óriás cipő Debrecenben

A világ legnagyobb férfi félcipőjét készítette el a debreceni Kovács József cipészmester, a 217-es méretű, több mint 60 kilogramm súlyú lábbelit nemrég mutatták be a debreceni Aranybika Szálló halljában. Kovács József elmondta: a munkával 43 nap alatt, összesen 345 óra ráfordítással készült el. - A 217-es nagyságú cipő belső mérete 145 centiméter, külső mérete 152 centiméter, súlya a kaptafával együtt 65 kilogramm - mondta a mester. Tájékoztatása szerint a cipőhöz 2,45 négyzetméter felsőrész-bőrt, 2,8 négyzetméter bélésbőrt, 2,3 négyzetméter bélésvásznat használt fel, a 4,5 centiméter vastagságú talp 16 kilogrammot nyom. A cipő elkészítéséhez 10 kilogramm ragasztóanyag, 2 kilogramm bognárszeg, 0,2 kg faszeg, 247 darab rézszeg, 87 méter fonal, két doboz cipőkrém és 2 doboz talpfesték kellett.   Forrás: Bányavidéki Új Szó   2002 április

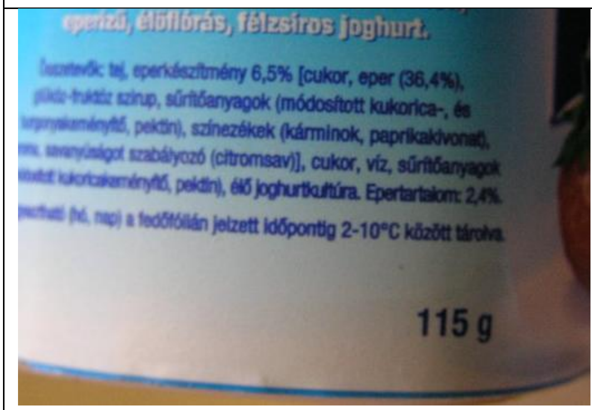
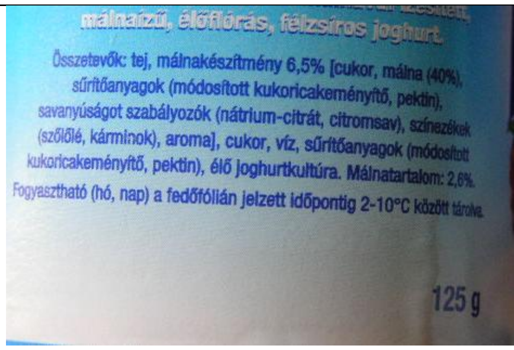
Lehetséges feladatok például:

1. Mérd le, hány centis a Te lábad, számold ki, és gondold meg, hányas méretű lenne az óriáscipő! Kérdezd meg néhány osztálytársad cipőméretét és lábhosszát is, és hasonlítsd össze az előbbi számítással kapható eredményeket!
2. Az előbbi nyitottabb megfogalmazásban: Hányas méretnek felel meg ez a cipő?
3. Nyomozz utána az interneten, hogy mennyi lehetett kb. Kovács József anyagköltsége.

Racionális számokkal végzett műveletek, egyenes arányosság gyakorlásához ajánlható elsősorban.

5.Példa

Saját napi tapasztalat (kép) felhasználásával

	Ezeket a joghurtakciókat évekkel ezelőtt közel azonos időben hirdették meg. Mindkét akció egy-egy poharát oldalról is lefényképeztük. A felső nyolcpoharas akció pohara a baloldali képen, a négypoharasé a jobboldalin látható.
	

Az éles szemű vásárló sok hasonló jelenséget észrevehet és felhasználhat „alapanyagul” feladatok készítéséhez.

Ebből a szituációból is többféle feladat készíthető, például:

- (zárt feladat) Számítsd ki mennyibe kerül 8 (10, 16 stb.) pohár joghurt a két akcióban, és azt is, hogy mennyi joghurtot vettünk így!
- (modellezési feladatok, ezek akár az előbbi feladat kiegészítői is lehetnek)
  Szerinted melyik akció éri meg jobban a vevőknek? Állításodat számításokkal igazold!
  Olvasd el figyelmesen a kétféle akció poharainak szövegét! Az összetevők ismeretében végezz számításokat és fogalmazd meg a véleményedet.

Ez utóbbi elég sok területet érint: alapműveletek racionális számkörben, százalékszámítás, arány mindenképpen szerepel közöttük.

6.Példa

Egyéb ismeret, tapasztalat felhasználásával

a) *A DIN A3, DIN A4 stb. formátumok jellegzetessége, hogy a következő kisebb formátumra való áttérésnél (például DIN A4-ről DIN A5-re) az előbbi papírt felezzük, de olyan az eredeti papír méretezése, hogy ennek során az oldalak aránya nem változik. Ha tudjuk ezen kívül, hogy a nagyítókészülékeken a nagyítás- illetve kicsinyítés aránya az oldalhosszakra vonatkozik, adjuk meg a nagyítás/kicsinyítés mértékét (százalékban) a táblázatban:*

A nagyítás/ kicsinyítés módja	mértéke (%)
A4 $\rightarrow$ A3:	
A3 $\rightarrow$ A4:	
A5 $\rightarrow$ A4:	

Elsősorban arányok, százalékok gyakorlásához használható.

b) Tervezz fogkrémes dobozt kedvenc fogkrémedhez!

Testek térfogatával és felszínével kapcsolatos számítások gyakorlásához például jól használható. Különösen érdekes lehet azok számára, akik szeretik a kreatív ötleteket igénylő feladatokat.

c) A Clematis nevű növény növekedését feljegyezték 15 napon át, ötnaponként, az adatokat az alábbi táblázat mutatja:

eltelt napok száma	0	5	10	15
A növény hossza (m)	0,02	0,042	0,09	0,19

Mutasd meg, hogy a növekedés leírható exponenciális függvénnyel és add meg az adatok alapján a megfelelő függvényt. (Greefrath/Mühlenfeld 2007, 38. o feladatának felhasználásával)

Exponenciális függvények megadása, exponenciálisan végbemenő folyamatok vizsgálata szerepel a feladatban.

d) A „Pro-Bahn-Mitteldeutschland" kezdeményezés adatai szerint a helyi közlekedésben az utasok kb. 4%-a bliccel. Két ellenőr a 6-os és 10-es villamosok vonalán összesen 98 utast ellenőrzött és 4 bliccelőt kaptak el.
Mi volt előzetesen annak a valószínűsége annak, hogy legalább 2 bliccelőt kapnak el? (Greefrath/Mühlenfeld 2007, 76. o feladatának felhasználásával)

A feladat megfogalmazása nem szokványos, így érdekes gyakorlófeladat lehet binomiális eloszlás gyakorlásához.

<u>Feladatok készítése feladatvariáció segítségével</u>

Nemcsak új ötletek, de a már meglevő feladatok felhasználásával is lehet készíteni további valóságközeli feladatokat, ahogyan azt az előbbiekben már láttuk. Ebben az esetben vagy az eredeti matematikai tartalom, vagy az alapszituáció „marad meg", esetleg mindkettő, de mindenképpen (további) valós tartalom kerül az eredeti többnyire zárt feladatba.

Az első példa kiindulási feladata egy tankönyvi példa:

Mennyi víz megy egy év alatt veszendőbe, ha a csöpögő csapból egy óra alatt fél liter víz folyik el? Naponta hozzávetőlegesen $2\frac{8}{10}$ *liter vizet használunk el főzéshez. Hány napig tudnánk főzni a veszendőbe menő vízzel?*

A feladat nyilvánvalóan zárt, adott számítással válaszolhatjuk meg a kérdéseket. A szituáció viszont valósnak tekinthető, hiszen valóban reálisak a feladatban szereplő mennyiségek. De modellezési feladat lehet belőle. Például a következő egyszerű változtatási lehetőségek azonnal adódnak a szöveg alapján, aszerint, hogy mely adatokat nem adjuk meg:

a) *Mennyi víz megy veszendőbe egy nap alatt, ha egy csöpögő csapból egy óra alatt kb. fél liter víz folyik ki? Hány napig lehetne ennyi vízzel főzni?*

Ebben a feladatváltozatban valamilyen modell alapján kell becslést adni a napi főzéshez szükséges átlagos vízmennyiségre, és ezzel lehet számolni. Ezzel már nemcsak nyitott, de egyszerű modellezési feladatot is kaptunk.

b) *Mennyi víz megy veszendőbe, ha egy csap csöpög? Hány napig lehetne ezzel a vízmennyiséggel főzni, ha naponta körülbelül 2 liter vizet használunk főzéshez?*

Ebben a feladatváltozatban a csöpögő csap napi „vízhozamát" kell valamilyen módon megbecsülnünk- például megmérjük, hogy valamely időegység alatt mennyi víz csöpög ki egy ilyen csapból. Így többféle eredményt kaphatunk, többféle módon. A feladat kérdésének megválaszolásához ezekkel fogunk számolni.

Nyilvánvalóan az a legnyitottabb modellezési változat, amelynél a legkevesebb konkrét előfeltétel adott:

c) *Mennyi víz megy veszendőbe körülbelül 1 nap alatt, ha csöpög egy csap? Hány napig lehetne ennyi vízzel főzni?*

Ebben a változatban mind a csöpögés révén elfolyt vízmennyiség, mind pedig az egy napi főzéshez szükséges vízmennyiség becslése szükséges.

Feladatok valós tartalmúvá illetve modellezési feladattá alakításához számos lehetőség van. Schupp (2002) könyvéből került kiválasztásra néhány feladat variálási típus, amelyek például különösen alkalmasnak tűnnek arra, hogy segítségükkel további valós tartalmú feladatokat készítsünk. A következőkben ezekhez mutatunk be variálási példákat. A különböző variálások között természetesen lehetnek átfedések.

- *Általánosítás*

  Ez a módszer a feladatban szereplő feltételeket általánosabbá tételét alkalmazza a variáció készítéséhez.

Az eredeti feladat:

Felmérések szerint a középiskolások közül sokan kapnak zsebpénzt. Ám az is kiderült, hogy ennek jelentős része gyorsan elfogy. Egy ötlet lehet, ha valaki úgy takarékoskodik, hogy pénzét otthon „teszi" bankba (MI Bank). Egyszerűen úgy, hogy rábízza édesanyjára vagy édesapjára, a „betett" pénz pedig kamatozik. Mennyi pénzed lenne a MI bankban december 31-én, abban az évben, amikor januártól havonta, a hónap első napján 1000

Ft-t kapnál, ebből nem költenél semmit az év folyamán és a betett pénzösszeg havi 2%-t kamatozik, amelyet minden hónap utolsó napján „írnak jóvá” neked?

Általánosabban, ami ebben az esetben egy modellezési „változat”:

Felmérések szerint a középiskolások közül sokan kapnak zsebpénzt. Ám azt is kiderült, hogy ennek jelentős része gyorsan elfogy.

Egy ötlet lehet, ha valaki úgy takarékoskodik, hogy pénzét otthon „teszi” bankba (MI Bank). Egyszerűen úgy, hogy rábízza édesanyjára vagy édesapjára, a „betett” pénz pedig kamatozik. Persze ezt úgy kell megoldani, hogy mindkét félnek megfelelő legyen.

Gondolod át milyen szempontokat érdemes figyelembe venni és dolgozz ki modellt, hogyan működjön a bank.

Modelled helyességét számításokkal tedd meggyőzővé.

- *Kritikai hozzáállás*

Például egy adott feladat modelljének értékelése.

Az eredeti feladat:

‚Két gyerek életkoruk arányában osztotta meg a munkát. Imre 12 éves és 180 m^2 kertet gyomlált ki. Jancsi 15 éves. Hány négyzetméter kertet gyomláltak ki ketten?

Ha a feladat rákérdezne mondjuk a munkamegosztás tárgyalt modelljére, akkor már modellezési feladatról lenne szó. Például:

Vizsgáld meg helyes-e ez a munkamegosztás az adott esetben, illetve általában emberek között!

- *Nehezítés*
  Túra[3]

Az eredeti feladat:

Norbi, Flóra és Emőke túrázni mennek. Norbi hátizsákja 9,6 kg, Flóráé ennek ¾ Emőkéé pedig a 2/3 része. Hány kg a három gyerek hátizsákja együtt?

Modellezési „változat”:

Norbi, Flóra és Emőke túrázni mennek. Norbi hátizsákja 9,6 kg, Flóráé ennek ¾, Emőkéé pedig 2/3 része. Hány kg a három gyerek hátizsákja együtt?

Hány kg-t nyomnak a hátizsákok a túra végén?

[3] Kisics István feladata

A feladat eredetileg zárt, beöltöztetett feladat, viszont a hozzátett kérdés már modellezést tesz szükségessé, és valós a kérdésfeltevés. Ezzel azonban nehezebbé is vált a feladat.

- *Könnyítés*
  Gépelés[4]

Az eredeti feladat:

Egy gépírónőnek 120 oldalt kellett legépelnie. ha óránként két oldallal többet írt volna le, két órával hamarabb lett volna kész.

Hány óra alatt írta le a szöveget?

Modellezési „változat”:

Egy gépírónőnek a főnöke 120 kézzel írt oldalt ad, hogy gépelje le. Hány oldalt fog gépelni? Hány óra alatt végez vele?

Míg az eredeti hagyományos feladat megoldásához az összefüggések elemzésével algebrai ismeretek szükségesek, a modellezési feladat esetében a feltételek könnyen tisztázhatók (a kézzel írt oldal hány gépelt sor, milyen sebességgel tudhat valaki gépelni) és ezután gyakorlatilag már csak némi egyszerű számítás szükséges az egyébként ötletes feladat megoldásához.

- *Egyszerű variálás*

Ilyenkor az eredeti feladaton csak egyszerű változtatást hajtunk végre és így készül a variációja.

Például ilyennek tekinthetők a fejezet elején ismertetett „csöpögős csap” feladatvariációk

- *Más nézőpontból tekintjük a feladatot*

Túró Rudi

[4] Kardos Andrea feladata

1968-ban kezdték gyártani gyártani Magyarországon. 2002 óta Lengyelországban is forgalmazzák „Danio Batonik” néven, Romániában és Szlovákiában pedig „Dots” névvel.

Legfontosabb összetevői: Zsírszegény tehéntúró 42%, kakaós étbevonómassza 36%, cukor, vaj.

	kicsi pöttyös Rudi	Óriás pöttyös Rudi
tömeg	30g	50g
hossz	8 cm	11,6 cm
átmérő	2 cm	2,4 cm

Az eredeti feladat:

Iskolátokban a diákok többsége szereti a Túró Rudit. A farsangra az a terv, hogy csináltatnak egy óriás Túró Rudi-tortát, amelyből mindenkinek jut legalább annyi, mintha egy Túró Rudit kapna.

A cukrász segítséget kér a megvalósításhoz. Tervezd meg a tortát és számítsd ki a hozzávalókat!

Az adatokból nem a Rudi elfogyasztására koncentráló feladat is készülhet például:

Egy vásár alkalmával 3 fős csapatok indulhatnak azon a versenyen, amelyen a lehető legkevesebb Túró Rudi felhasználásával kell kirakni a „Túró Rudi” feliratot. Te milyen tervet javasolnál csapatodnak?

- *További kérdés hozzátétele*

Afrika szavannáinak jellegzetes állata a zsiráf. Nyaka olyan hosszú, mint az elülső lába. Vállmagassága 300 cm, súlya 500 kg.

„A hirtelen jött tavasz nemcsak az embereket, hanem az állatokat is kicsalogatta eddigi zárt közegükből: Budapesten, a hét elején megszületett az Állatkert sorrendben 22. zsiráf bébije. A mintegy 190 centiméteres kis jövevény szinte rögtön talpra állt, de nemét nem lehet meghatározni, mert ötesztendős mamája óvja őt, és nem engedi közel hozzá az ápolókat.” (Egy hír 2002 -ből)

Feladat

1. *Milyen magas lehet körülbelül a zsiráfmama?*

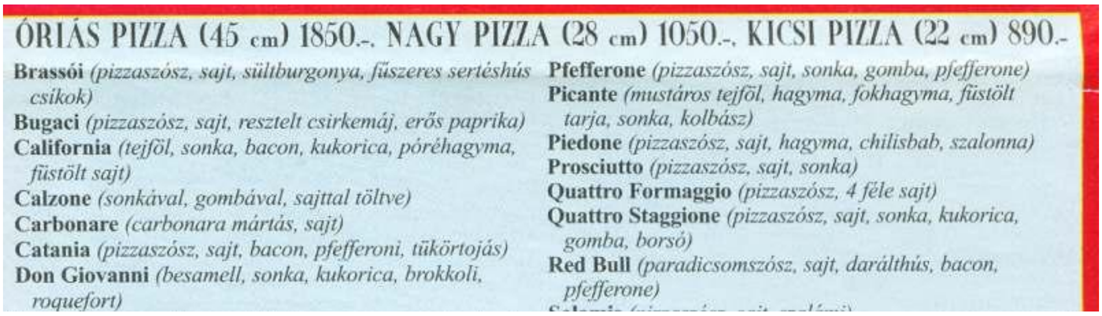
   Érdeklődj/Nézz utána jól számoltál-e?

   További kérdés:

   Hány kilogrammos lehet a kiszsiráf?

- *Aktualizálás*

  Ha egy meglevő feladat adatai elavultak, illetve érdekes lenne újabbakkal összehasonlítani akkor érdemes ezt a feladatvariálási módszert alkalmazni. Mint például a következő esetben, ahol az adatok 2006-ból valók.


ÓRIÁS PIZZA (45 cm) 1850.-, NAGY PIZZA (28 cm) 1050.-, KICSI PIZZA (22 cm) 890.-

Brassói *(pizzaszósz, sajt, sültburgonya, fűszeres sertéshús csíkok)*
Bugaci *(pizzaszósz, sajt, resztelt csirkemáj, erős paprika)*
California *(tejföl, sonka, bacon, kukorica, póréhagyma, füstölt sajt)*
Calzone *(sonkával, gombával, sajttal töltve)*
Carbonare *(carbonara mártás, sajt)*
Catania *(pizzaszósz, sajt, bacon, pfefferoni, tükörtojás)*
Don Giovanni *(besamell, sonka, kukorica, brokkoli, roquefort)*
Pfefferone *(pizzaszósz, sajt, sonka, gomba, pfefferone)*
Picante *(mustáros tejföl, hagyma, fokhagyma, füstölt tarja, sonka, kolbász)*
Piedone *(pizzaszósz, sajt, hagyma, chilisbab, szalonna)*
Prosciutto *(pizzaszósz, sajt, sonka)*
Quattro Formaggio *(pizzaszósz, 4 féle sajt)*
Quattro Staggione *(pizzaszósz, sajt, sonka, kukorica, gomba, borsó)*
Red Bull *(paradicsomszósz, sajt, darálthús, bacon, pfefferone)*

Az eredeti feladat:

1. *Az ajánlat alapján melyik pizza (óriás, nagy vagy kicsi) éri meg szerinted a legjobban? Indokold meg választásodat!*

Ez a feladat eredetileg is modellezési feladat, az árak azonban elavultak, új árajánlatra van szükség, és ennek alapján feladható az eredeti feladat. De további kérdés(ek) is feltehető(k) a régi és új ajánlat összehasonlításával kapcsolatban.

- **Feladat**

Készítsen további modellezési feladatot Túró Rudi témában.

M.

Íme két lehetőség:

- Túró Rudi Napra a szervezők azt tervezik, hogy a Hősök Terén felállítanak egy valódi alapanyagokból készült 20 méter magas Óriás Túró Rudi-t.

Hány kilogrammos lenne szerinted az így készült Rudi szobor?

- Az iskolátokban holnap reggel mindenki kap egy Túró Rudit érkezéskor. Hányan tudják majd elhozni a szükséges mennyiséget?

- **Feladat**

Készítsen valóságközeli zárt feladatokat:

a) Törtekkel kapcsolatos számításokhoz
b) A Pythagoras tétel gyakorlásához

M.

Egyéni.

- **Feladat**

A feladatvariálási lehetőségek között nem szerepeltek az *analogizálás (analóg feladat készítése), a valós tartalom beiktatása, a továbbdolgozás az eredménnyel* lehetőségek. Készítsen ezekhez is megfelelő valóságközeli/modellezési példa-feladatokat!

M

Analogizálás

Például legyen az alapfeladat egy akciós ajánlat kedvezményének ellenőrzése. Keressen változatnak hasonló vagy más jellegű akciókat és ellenőrizze a bennük szereplő adatok valóban megfelelően adják-e meg az akcióban meghirdetett kedvezményt.

Valós tartalom beiktatása

Útkövezés[5]

Az útépítők 21 óra alatt kövezik ki egy utca felét. Óránként 42 m^2-t köveznek ki. Mennyi idő alatt készülnek el az út másik felével, ha most óránként 42 m^2-rel köveznek ki többet.

Modellezési „változat”:

Felújítják az iskola előtti utcát. Az utca 100 méter hosszú, egy sáv van az egyirányú közlekedésre, két oldalt parkoló autók és mellette járdák. Az egészet kockakővel fogják

[5] Velkey Kristóf feladata

kikövezni. Mit gondolsz menni időbe telik a munkásoknak a feladat elvégzése? Hány kockakőre lesz szükségük?

Az eredeti változat tipikus iskolai gyakorlófeladat. A modellezési változatban csak a téma maradt meg ugyanis nemcsak valós helyzet került beiktatásra, de megváltozott a matematikai tartalom is. Míg az eredeti következtetéssel, egyenletfelírással kapcsolatos, és a munkások munkaidejére kérdez rá, itt geometriai számítás, illetve a munkaidő valamilyen feltételek, ismeretek alapján történő becslése szükséges a válasz megadásához.

Továbbdolgozás az eredménnyel

Például a korábbi aláírásgyűjtés feladat esetében:

Egy ellenzéki párt 4 000 000 aláírást nyújtott be a kormány egyik új rendelete ellen. Minden újság közölte a hírt és a hatalmas ládák képeit, amelyek az aláírt íveket tartalmazták, valamint szerepelt a képeken 8 kisteherautó is, amelyekre a rengeteg papír szállításához volt szükség. Valóban ennyi teherautó kellett a szállításhoz?

A kapott eredmény után megkérdezhetjük:

Milyen szállítási módokat javasolnál a kapott eredmények tükrében az aláírások elszállításához?

- **Feladat**

  Készítsen valóságközeli feladatot a következő szituációkhoz:

a) Ljubljana és Maribor között fizetős autópálya van. 1996 nyarán az autópálya 67 %–a autóútként működött. Az autópálya kapujában 350 tolárt kellett fizetni.

M.

Például lehetséges feladatok:

- (zárt) Mennyit kellett volna fizetni, ha végig autópálya lenne?
- (nyitott) Mennyibe kerülne Budapestről az út ha Maribor-ba mennél Ljubljana érintésével?[6]

b) Az Európai Unió 2008-tól betiltotta a hagyományos, 100 W-nál nagyobb fogyasztású égők használatát és takarékos égők használatára buzdított minden országot. Az egyes égőfajtákat fokozatosan vonták ki a forgalomból. 2012-ben már 40 W-os égő gyártása is megszűnt.

M.

[6] Szabados Lajos ötlete nyomán

Mennyire éri meg egy családnak a még meglevő, működőképes izzóit most energiatakarékosra cserélni?

c)

„Jól bírta a terhelést a Megyeri híd a teherbírási próbán, a szerkezet kevesebb mint fél métert hajlott meg a mintegy félszáz kamion alatt - mondta el Rapkay Kálmán, a kivitelező Hídépítő Zrt. igazgatója vasárnap az előző esti tesztelésről.

…A próba során összesen 42, homokkal megrakott teherautót engednek a hídra, ezeknek összsúlya egyenként 43 tonna. A méréseket azért éjszaka végzik, hogy a napsütés okozta hőmérséklet-különbség a híd teteje és alja között ne befolyásolja a mérési eredményt….

A híd része az M0 körgyűrű északi Duna hídjának, amely a 2. számú főúttól indul, majd áthalad a Szentendrei szigeten és a Szentendrei Duna-ágon is. Együttesen 1.862 méter hosszú. A Megyeri hídnak nevezett fő-Duna-ági híd ebből 591 métert tesz ki.” Forrás: http://www.origo.hu/itthon/20080824-jol-birta-a-terheles-probat-a-megyeri-hid.html

M.

lehetséges feladat:

Miért ilyen terhelés mellett végezték szerinted a tesztelést?[7]

Módszerek és egyéb lehetőségek valóságközeli feladatok feldolgozásához

Ebben a fejezetben olyan módszerekről lesz szó, amelyek jól használhatók valóságközeli feladatok megoldása során. Ezek a módszerek kiegészíthetők más lehetőségekkel is, például új technikai lehetőségekkel, amelyek segíthetik a feladatokkal végzett munkát. Erre is szó lesz röviden a fejezet végén.

[7] Karácsonyi Csaba ötlete nyomán

<u>Módszerek a feldolgozáshoz</u>

Modellezési feladatok iskolai feldolgozásánál általában valamilyen csoportos tevékenység a legalkalmasabb. Az is fontos, hogy a tanár megfelelő módon, inkább segítő kérdésekkel a háttérből támogasson, de ne direkt módon avatkozzon be a feladat megoldásába.

Az előbbiek figyelembevételével módszerek adhatók meg, amelyek közül az adott körülmények figyelembevételével lehet választani.

A „módszer”-t a továbbiakban a következő értelemben használjuk:

A módszer olyan tipikus tevékenység a tanítás során, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- *általános jellegű, új összefüggésben rugalmasan alkalmazható*
- *adott cél érdekében kerül alkalmazásra, ami jól meghatározható*
- *strukturált, azaz megadott, hogy a résztvevők (ideális esetben) hogyan tevékenykednek és kommunikálnak egymással.*

Így a *módszer* lehet (Barzel, Büchter, Leuders, 2007):

- pontosan megadott tevékenység, együttműködési forma pl. kooperatív módszerek
- rokon tevékenységsorozat, amely konkrét esetben igen különbözően is végbemehet pl. „állomások”
- általános együttműködési forma pl. csoportmunka
- általános összefoglaló módszer pl. projekt
- tanítást kísérő tevékenység pl. portfolió

A módszer így nem egy biztos „trükk”, hanem egy lehetőség egy olyan tanítás kialakításához, amely során a tanuló egyéni lehetőségeit kibontakoztathatja és továbbfejlesztheti. Egy módszer alkalmassága mindig csak a tanítási cél és a szándékok összefüggésében ítélhető meg.

A következőkben néhány olyan módszer rövid ismertetése következik, amelyek jól használhatók modellezési feladatok megoldása során is.

Ablak (például szempontok, feltételek gyűjtése, reflektálás)

- 4+1 részre osztott lap, az egyes részeket megszámozzuk. (1, 2, 3, 4, a középső rész üresen marad) a megfelelő számmal ellátott részbe jegyzik fel a csoporttagok azt a véleményt, tulajdonságot, dolgot, tényt, amit gondolnak. A középső részbe a csoportvélemény kerül.

Irka (például szempontok, feltételek gyűjtése, reflektálás)

- A csoport tagjai egymás után, kerekasztal módszerrel, némán, tetszőlegesen folytatják egymásét, az A/4-es lapra húznak egy-egy vonalat írásuk után.
- Meghatározott ideig tart.

Szóforgó (például szempontok, feltételek gyűjtése, reflektálás)

- A csoport tagjai sorban, az óramutató járásával egyező irányban elmondják egymásnak a gondolataikat, egy tag beszédidejét meg lehet határozni.

Kupaktanács – ötletelő (például szempontok, feltételek gyűjtése, matematikai modell kidolgozása)

- A felvetett problémán mindenki egyénileg elgondolkozik.
- Párban is megbeszélik.
- A két pár közösen is megvitatja a problémát.

Páros szóforgó (például szempontok, feltételek gyűjtése)

- A diákok csoporton belül párokban beszélik meg gondolataikat.
- A csoportbéli párok megbeszélik, milyen azonos gondolatok merültek fel a témában, melyek azok, amelyek csak egyiküknél

Szóháló – pókháló (például szempontok, feltételek gyűjtése)

- A csoport minden tagjának legyen saját színe, amivel a csomagolópapírra dolgozik. A lap közepére kerüljön fel a téma, a diákok írjanak köré kulcsfogalmakat, illetve azokhoz tartozó kifejezéseket. Ezután a szorosan összetartozó kifejezéseket kössék össze egy vonallal.

Felfedező riporter (például szempontok, feltételek gyűjtése)

- A csoportok egy adott feladaton dolgoznak, miközben egyikőjük a többi csoporttól számukra hasznos információt gyűjt.

Szerkesztés (például szempontok, feltételek gyűjtése matematikai modellek kidolgozása különböző feltételek figyelembe vételével, reflektálás)

Adott témában előzetesen önállóan kidolgoznak egy-egy részletet a csoporttagok, majd ezt közösen rendezik és egységes munkát készítenek belőle

Plakát (a modellezés folyamatának bemutatása, a matematikai modell bemutatása)

- A kijelölt témában a csoporttagok esetleg különböző színekkel dolgoznak a csomagolópapíron.

Képtárlátogatás (a modellezés folyamatának bemutatása, a matematikai modell bemutatása)

- A csoportok megtekintik a többi csoport munkáját.
- Megbeszélik a látottakat és értékelik a munkákat.

Szakvélemény (például különböző modellek kidolgozásához értékeléséhez adott valós probléma esetén)

- A feladat során összehasonlító, értékelő vizsgálatot kell elvégezni és valamilyen formában megindokolt ajánlást kell készíteni- álláspont kifejtése levél, tanács stb. formájában.

A Jigsaw-módszer (például különböző modellek kidolgozásához adott valós probléma esetén)

- A tanulócsoportok mindegyike egy résztéma „szakértőjévé” képezi ki magát, a majd a gyakorlat második részében továbbadja ezt a tudását a többieknek.

Projekt (például komplex modellezési feladatok)

- Bizonyos mértékig szabadon választható témában a tanulók választják meg a vizsgálandó kérdéseket, kidolgozás módját és módszereit. Az eredményekről szóban írásban pl. poszter, beszámolnak.

- **Feladat**

Válasszon két feladatot a jegyzetből és gondolja meg, hogy az előbbi módszerek közül melyiket és hogyan alkalmazná ezek megoldás során.
M.
Egyéni

- **Feladat**

Válasszon ki három módszert az ismertetett módszerek közül és mutasson példát arra milyen modellezési feladat/feladatrészlet esetén használná!
M.
Egyéni

Új technika segítsége valóságközeli feladatok megoldásában

A valóságközeli feladatokat leggyakrabban már meglevő ismeretek, eljárások alkalmazásához használjuk, de előfordul az is, hogy valamely új matematikai tartalom tanításánál kerülnek elő. Ez utóbbi esetben főleg motiváció a cél, és később az ismeretek birtokában kerül majd elő újra a feladat.
Ezekben az esetekben főleg a következő technikai lehetőségek lehetnek segítségünkre:

- grafikus kalkulátor
- Computeralgebra-rendszer
- Dinamikus geometria-software
- Táblázatkezelő
- Különböző valószínűségszámításhoz és adatelemzéshez használható software-k
- Internet

  Ezeknek az új technikai lehetőségeknek alkalmazásának előnyei közül említünk röviden néhány fontosabbat:

  - Számítási hibák elkerülése
  - A számításokat a segédeszköz végzi, nem tereli el a feladatról a tanulókat ezek elvégzése.
  - Igen komplikált számítások is könnyen elvégezhetők
  - Szisztematikus próbálkozások nagy számban könnyen kivitelezhetők
  - Grafikonok, táblázatok segítségével könnyen megjeleníthetők és így jobban felhasználhatók adatsokaságok
  - A kapott eredmények sok esetben az interneten található információk segítségével ellenőrizhetők

Az új technikai segítségek közül két lehetőséget emelünk itt csak ki.
Az *Interneten* mint láttuk ötleteket találhatunk feladatok készítéséhez, illetve kereshetünk ötleteket például adott témához ld. még feladatkészítés fejezet.
Jó segítséget kaphatunk hiányzó adatok gyűjtéséhez is.
A csoportos feladatmegoldás pedig könnyen folytatható akár házi feladatként is hiszen e-mailben, vagy közösségi felületeken gond nélkül tovább lehet dolgozni. Ugyancsak jó lehetőséget ad így projektfeladatok közös kidolgozása esetén.

A *GeoGebra program,* mint ingyenesen letölthető dinamikus software, szintén segítheti a megoldást modellezési feladatok esetében. Elkészíthetők például olyan mozgatható ábrák, amelyek segítségével többféle feltétel változtatható és emellett adatok számíthatók. Ilyen segítség adható is a tanulóknak olyan modellek vizsgálatához például, amelyek elkészítése az adott tanulócsoportnak nehéz lenne.

A következőkben egy ilyen lehetőségre idézünk példát [8] (Tóth E. 2013, 71.o.).

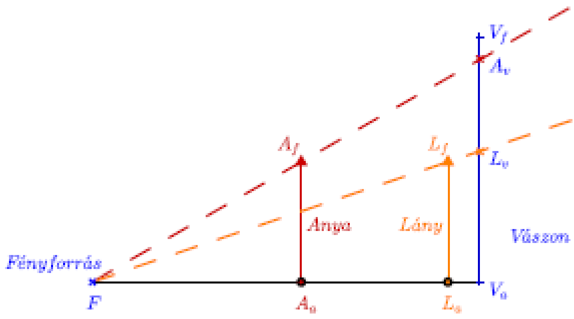
A feladat: *2013-ban Nagy-Britannia leghíresebb tehetségkutató versenyén egy magyar csapat is részt vett. A nézőtér felé, a színpad elejére egy vásznat feszítettek ki, amelyen árnyékukkal jelenítettek meg történeteket. Különleges játékukkal olyannyira elkápráztatták a közönséget, hogy megnyerték a műsort. A képen egyik előadásukból láthatsz egy jelenetet. A sírokat is egy-egy táncos formázza, ahogy az édesanyát és kislányát is.*

Hogyan helyezkedhetnek el a vászon mögött az előadók? Mekkora lehet a valóságban a két szereplő kezének távolsága?

Ábra A dolgozatban vizsgált jelenet

Forrás: https://www.youtube.com/watch?v=phGyJyp3MBg.

A feladathoz különböző osztályokban elképzelt megoldást is megadott a szerző. A 9.-10 osztályosok megoldásához, amely az alábbi ábra alapján készült, dinamikus feladatlap is készült, amelyhez, akárcsak a feladat kidolgozás többi részéhez részletes elemzés is tartozik.

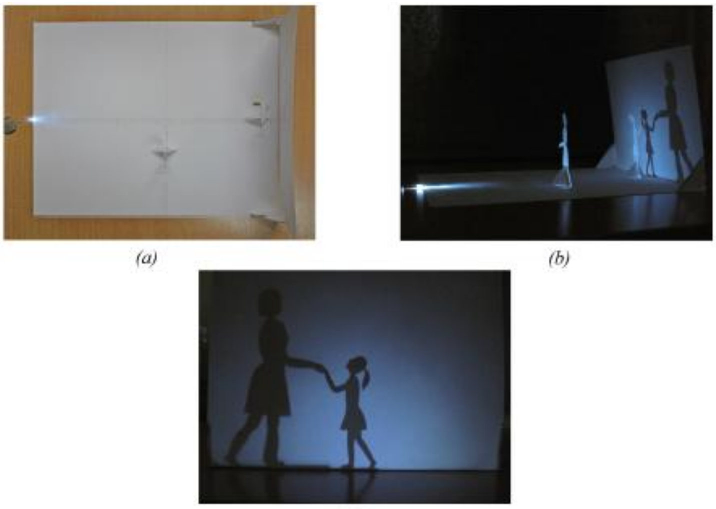


7.8. ábra. *A két főszereplő elhelyezkedése a színpadon - oldalnézet*

[8] http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/alkmat/2014/toth_erzsebet_rita.pdf

ábra Részlet a szakdolgozatból

A modell segítségével kapott eredményt igen ötletesen úgy is ellenőrzi a hallgató, hogy a számított eredmények alapján elkészíti a színpadi képet papírból és ezt hátulról megvilágítva elkészíti az árnyképet (80.o.).



(a) (b) (c)

7.11. ábra. *Az ellenőrzéshez készített makett (a) felül- illetve (b) oldalnézetből; (c) a maketten kapott árnykép.*

ábra részlet a szakdolgozatból

A feladathoz használt technikai segítség nemcsak hatékonyabbá, de élvezetesebbé tette a feladat megoldását, amely önmagában is izgalmas volt.

Végül érdemes még kiemelni mégegyszer azt a lehetőséget, amikor *egy modell elkészítéséhez nem áll rendelkezésre elég ismeret a tanulók számára*, ám technikai segítséggel az adott feladat számukra is megoldhatóvá válik.
Ez nemcsak érdekes kihívás a tanulóknak, de egyben arra is felkészíti őket, hogy a valós életben is szükség lehet olyan feladat megoldására, amelyet annak ellenére el tudunk végezni, hogy ismereteink nem elegendőek. Ilyen feladatokkal arra is példát látnak, hogy ismereteiket alkalmazva, továbbiakkal ezek bővíthetők és még alkalmazás- képesebbekké válhatnak. Ennek során a matematikáról alkotott képük a statikus lezárt ismeretrendszer helyett a nyitott, dinamikus és kiegészíthető felé változik.

- **Feladat**

Keressen a jegyzetben/vagy készítsen olyan feladatokat (legalább kettőt amelyek feldolgozásánál használná a Geogebra programot! Gondolja át és fogalmazza meg elképzelését!
M.
Egyéni

- **Feladat**

Keressen példát olyan problémára, amelynek megoldásához az általános (közép) iskolai ismeretek nem elegendőek viszont a technikai lehetőségek segítségével megoldhatók, (a középiskolában (egyetemen) szerzett ismeretek birtokában már megoldhatók)!

M.

Például az említett szakdolgozat *Sportrekordok* feladata esetében is olvashatunk ilyen lehetőségről.

Irodalom

Tóth Erzsébet:Fourier-analízis alkalmazása a digitális holográfiában Diplomamunka 7. Fejezet: Modellezési feladatok megoldása a GeoGebra program segítségével (55-80) ELTE, TTK, 2013, http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/alkmat/2014/toth_erzsebet_rita.pdf

Hinrichs,G.: Modellierung im Mathematikunterricht , Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008

IRODALOM

Ambrus G.: Valóságközeli problémák, hétköznapi matematika (tanítási segédanyag a 6-10. évfolyamok számára, In: Tanári Kincsestár, RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft., 2007 március 1-32

Ambrus G.:Modellezési feladatok a matematikaórán, RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft., 2007c december 1-25

Ambrus G.:Titanic a Balatonon és más modellezési feladatok matematikából középiskolásoknak, Műszaki Kiadó 2012

Ambrus G.:Valóságközeli matematika (munkafüzet és tanári segédkönyv CD), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007

Ambrus G./Vancsó Ö.: Modellezés az iskolai gyakorlatban In: A Matematika Tanítása, 2008/5, 3-11

Ambrus, G./Vancsó Ö./ Koren B. (2012). The Application of Modelling Tasks in the Classroom - Why and How? 10/2 TMCS, Debrecen 231-244

Ambrus, G.Problem solving and Modelling- Traditions and Possibilities in Hungarian Mathematics Education, In: Problem Solving and Mathematics Education, (Szerk.: Ambrus A., Vásárhelyi É.) 2013 Eger, ELTE TTK & Eszterházy Károly College, 7-17

Ambrus, G./Munkácsy, K.,/Szeredi É./Vásárhelyi É./Wintsche, G.: Matemtikamódszertani Példatár, Matematikatanítási és Módszertani Központ, TÁMOP 4.1.2.A/1-11/1-2011-0064, 2013 (2013.06.10)

Barzel, B., Büchter, A., Leuders, T.: Mathematik Methodik, Cornelsen Scriptor, 2007

Beke M./Mikola S.: A középiskolai matematikatanítás reformja, Bp A Franklin Társulat Bizománya, 1909

Beke: Rechenbuch für die V. und VI Klasse der Volksschule, Eigentum der königlichen ungarischen Universitäts-Buchdruckerei, 1907

Beke: Vezérkönyv a népiskolai oktatáshoz, Bp. Magyar Királyi Tudományegyetemi nyomda 1909

Blomhoj, M./Jensen, T. H.: Developing Mathematical Modelling Competence: conceptual clarification and educational planning.In: Teaching Mathematics and its Applications, Vol. 22. No. 3., 123–139. p., 2003. Oxford University Press, Oxford, 2003.

Blum W./Drücke-Noe, Ch./Hartung R./Köller O. (szerk.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Cornelsen Scriptor, 2006)

Blum, W./Leiss, D.: „Filling up"- The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. I.: Bosch, M. (Ed.) CERME-4 –Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Guixol (2006)

Blum, W.: ICMI study 14: Application and Modelling in Mathematics Education-Discussion Document. Educational Studies in Mathematics, 51, 149-171. 2002

Borromeo Ferri, R.:On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modelling Behaviour In. JMD, 2010, 31: 99-118,

Csíkos, Cs., Kelemen, R., Verschaffel, L.:, Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics problem solving: a large sample Hungarian study, 2011, 43: 561-571, ZDM, Springer Verlag

Dobi János: Megtanult és megértett matematikatudás In: Csapó B. (szerk.): Az iskolai tudás, Osiris, Budapest, 1998., 169–191. o.

Greefrath, G.: Modellieren lernen mit offenen realitätsnahen Aufgaben, Aulis Verlag, Köln, 2007

Greefrath, G.: Problemlösen und Modellieren- zwei Seiten der gleichen Medaille In. Mathematikunterricht 2010/3: 44-56, Friedrich Verlag

Henning, H./Keune, M.: Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen In. Henning, H./Freise F.Hrsg.: Realität und Modell, WTM, München, 2011 17-27

Maaß, K.:Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I, Cornelsen Verlag, Berlin, 2007

Pólya Gy.: A gondolkodás iskolája, Gondolat, 1977

Renkl, A.: Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird, In. Psychologische Rundschau, 1996, 47, 78-92 Hogrefe Verlag, Göttingen,

Riebel, J.:Modellierungskompetenzen beim mathematischen Problemlösen. Inventarisierung von Modellierungsprozessen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und Entwicklung eines diagnostischen Instrumentariums. Dissertation, Universität Koblenz-Landau, Fachbereich Psychologie, Landau, 2010.

Schukajlow, S., Leiss, D.: Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz, 32: 53-77 JMD, 2011, Springer Verlag

Schukajlow, S.: Mathematisches Modellieren –Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozesorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur, Waxmann, 2011

Schukajlow, S. (2010). *Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik , Dissertation*

http://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2010081133992/7/DissertationSchukajlowWasjutinski.pdf (18.06.2013)

Tóth B.: Modellezési kompetencia és modellezési lépések. Esettanulmány egy nyolcosztályos gimnázium tanulóiról. szakdolgozat, ELTE TTK, 2014

A LEMA EU projekt honlapja:

http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/de/tout.php

Oláhné Erdélyi Mária: A protestáns iskolák középszintű matematika oktatása, Pedagógiai Szemle, 1976/3

Oláhné Dr. Erdélyi Mária: Az 1777-es Ratio Educationis In. A Matematika Tanítása, 1977/3. sz. 75-79

Ambrus, G.: Valóságközeli feladatok munkafüzet és tanári CD, Műszaki kiadó, 2007

Beke M./Mikola S. : A középiskolai Matematikai Tanítás reformja, Franklin Társulat Bizománya , Budapest, 1909

Filep L.: A tudományok királynője, Budapest, Typotex, 1997

Mocznik F. (ford. Szabóky A.): Mértan, Alsó reál iskolák használatára, Bécs, 1855

Veress L.: Gyakorlati Számolókönyv, a népiskolák növendékei számára, 1856, Debrecen

Szerk. Vancsó Ö. Matematika 6, Nemzeti Tankönyvkiadó…

Blum, W./Wiegand, B.: Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? In. Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker Verlag 1999

Suták, J.: Mennyiségtan (algebra-geometria), 1927

Corzan –Avendano G.: Számtani Példatár, 1865

Arányi B.: Betűszámtani példák gyűjteménye, Budapest, 1871

Beke M./Mikola S.: 1909

Beke M.: Számtan a középiskolák alsó osztályai számára, 1892

Greefrath G./Mühlenfeld U.: Realitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe II, Bildungsverlag EINS, Troisdorf, 2007

Hans Schupp: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Franzbecker Verlag, Berlin (2002)

Zádor Eszter: Feladatvariációk készítése (szakdolgozat, ELTE, 2009)

Tankönyvek és példatárak