Tanításkísérő szeminárium

Szerzők: Török Judit és Vásárhelyi Éva
Szerkesztette: Fried Katalin
Lektor: Székely Péter

TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007
Országos koordinációval a pedagógusképzés megújításáért

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ezt a jegyzetet úgy szeretnénk megírni, hogy a tanárképzés átalakulásának időszakában, az éppen kifutó tanári MA képzés tapasztalataiból az új osztatlan képzés számára szűrjük le a tanulságot.

Megjegyzéseinket, tanácsainkat árnyalják azok a benyomások, amelyeket a főiskolai, illetve az egyetemi tanárképzésben eltöltött évtizedek, iskolalátogatások, tanárklubok, konferenciák és vándorgyűlések alkalmával szereztünk.

A tanításkísérő szeminárium legnagyobb pozitívuma, hogy létezik és lehetőséget ad arra, hogy „semleges" terepen, közvetlen érintettség nélkül aktuális, néha nagyon is érzékeny témákat, szituációkat, problémákat beszéljünk meg.

Az iskolába kikerülve számos problémával találkozik egy tanárjelölt. A szemináriumon igyekszünk felhívni a figyelmet az előre látható problémákra és alkalmat ad az iskolai gyakorlat során felmerülő váratlan helyzetek elemzésére.

A megbeszéléseken sokféle élethelyzetet ismerünk meg, hasznos tanácsokat és ötleteket gyűjthetünk. Talán az információknál is fontosabb, hogy a hallgatók egymástól is kaphatnak megerősítést és támogatást, nem érzik magukat egyedül a problémájukkal (pl. túlzott mentori irányítás vagy éppen a segítség hiánya).

A jegyzet ennél tágabb tematikát érint azzal a céllal, hogy az aktualitások mellett általános tudnivalókra is felhívja a figyelmet. Igyekszik ötleteket és tanácsokat adni mind a tanítási órák lebonyolításával, mind az iskolai élet más mozzanataival kapcsolatban.

Dióhéjban kitérünk a tanítás keretrendszerére és a pedagógus életpályára. Összegyűjtünk néhány ötletet és tanácsot a matematikatanár tanórai és tanórán kívüli tevékenységéhez. Közzé teszünk néhány tapasztalatot és javaslatot a taneszközök készítéséről és használatáról.

Javaslataink középpontjában a játékosság, a tanulói érdeklődéshez való igazodás áll, de törekszünk arra is, hogy a kidolgozatott példákkal gazdagítsuk a kezdő tanár gyűjteményét.

Általában általános iskolás tanulókkal indítható problémákat választottunk ki, de utalunk rá, hogy hogyan lehet matematikailag is tartalmassá tenni a kedvcsináló, jókedvű tevékenységet.

Mivel tapasztalatban, mondanivalóban nincs hiány, a felvetett problémák kidolgozásának a terjedelem szab határt. Ahol feltétlenül szükséges a továbbgondolás, ott utalunk azokra a forrásokra, amelyek megkönnyítik a tanár dolgát.

Mi szeretettel gyűjtöttük az ötleteket, és kívánjuk, hogy az olvasó örömmel és eredményesen használja az iskolai élet színesítésére.

Budapest, 2015. július 15.

A szerzők

I. fejezet

A tanítás keretrendszere, a pedagógus életpálya

Egy matematikatanárnak a szakórák megtartásán, korrepetáláson, versenyre való felkészítésen, szakmai továbbképzésen kívül még számtalan feladat adódik az iskolában.

Az iskolai élet szempontjából hátráltató tényező, hogy a szervezeti kérdések (az iskolatípusok struktúrája, az egyes típusok képzési és nevelési céljai, az intézménytípusok közötti átjárhatóság) és a jogszabályi háttér (a központi szabályozás intézménye, a fenntartó) folyamatosan változik, továbbá nem világos az egyes iskolatípusoknak a tanárképzéssel való kapcsolata. Az egyes iskolák átszervezése, áthelyezése, összevonása vagy megszüntetése is állandóan napirenden van. Kérdéses, hogy 8 vagy 9 osztályos az általános iskola, kihez tartozik a szakmunkásképzés, melyek az érettségit adó iskolatípusok, melyik szakma milyen életpályával számolhat.

Eközben az oktatás folyik, működik a tanár hagyományos kapcsolatrendszere (tantestület, munkaközösség) és új elemekkel gazdagodnak a kapcsolattartási módok (e-napló, közösségi oldalak, internet). Megtartják a fogadó órákat és szülői értekezleteket, tartanak nyílt napot és iskolai ünnepségeket. Mennek városnézésre, kirándulásra, rendel az iskolaorvos, dolgozik a nevelési tanácsadó, logopédus és az iskolapszichológus. Beosztják az ügyeletet, a napközi vagy tanulószobai foglalkozásokat, amelyeken gyakornok, pedagógiai asszisztens és szaktanár is feladatot kap(hat).

Ha az iskola körülményei megengedik, az ebéd után a tanulók 1,5–2 órát az udvaron játékkal, kikapcsolódással töltenek. 2–2,5 óra időtartam alatt tanári felügyelettel, esetleg segítséggel elkészítik a tanulók a házi feladatot és megtanulják az új anyagot. A tanulószoba végén uzsonnáznak a tanulók. Ez alól egyedi kérésre mentesülnek a szakkörösök, különórások. Ha egy szaktanár korrepetálást tart, ő is elkérheti a tanulót. Mindez szigorú rendszer szerint kell, hogy működjön, hiszen például az iskola területének elhagyását, vagy az iskolába való belépés rendjét a házirend rögzíti (életkornak megfelelően).

A pedagógus életpálya modell egyik központi célkitűzése, hogy ösztönözze és ellenőrizze a pedagógus folyamatos tanulását, megújulását és fejlődését. Ezt szolgálja a minősítő és ellenőrző rendszer, amely 2 kötelező minősítését (a gyakornoki 2 év, illetve a 6–9 év gyakorlat után) és 5 évente a pedagógus, az intézmény és az intézményvezető ellenőrzését foglalja magába. A http://www.oktatas.hu/kiadvanyok/ honlapon részletes ismertető található a pedagógusok minősítési rendszeréhez, amely támogatja a pedagógusok felkészülését a minősítővizsgára, illetve a minősítési eljárásra, és segíti a 326/2013. (VIII. 30.) kormányrendeletben foglaltak alkalmazását. Mi is egy ilyen dokumentumból idézünk, a http://www.oktatas.hu/kiadvanyok oldalon található az „Útmutató a pedagógusok minősítési rendszeréhez. A második, javított változat kivonata.” 6. oldalán áll:

„A minősítővizsga és a minősítési eljárás során a bizottság a gyakornok, illetve a pedagógus kompetenciáinak fejlettségét állapítja meg, a pedagógus tevékenységéről kapott dokumentumok és a személyes tapasztalatok alapján. Az országos pedagógiai-szakmai ellenőrzés visszajelzésének, valamint az intézményi önértékelés pedagógusra vonatkozó részének a minősítés rendszerébe való integrálása (30%) azáltal válik lehetségessé, hogy az értékelés egységesen kompetenciaalapú, azonos tartalmi és módszertani elemek alkalmazásával történik. Azért, hogy az értékelés ne csak minősítő, hanem fejlesztő/támogató szerepet is kapjon a pedagógusok minősítésében, a pedagógus írásos visszajelzést kap az erősségeiről és fejlesztendő területeiről. ... A minősítővizsgát és a minősítési eljárást a minősítőbizottság folytatja le, amely három főből áll. Elnöke az OH által delegált, Mesterpedagógus fokozatba sorolt, az Országos szakértői névjegyzéken pedagógiai-szakmai ellenőrzés (tanfelügyelet) és pedagógusminősítés szakterületen szereplő köznevelési szakértő, aki a külön jogszabályban foglaltak szerinti felkészítésben vett részt. Tagjai a gyakornoki minősítővizsga esetén valamely pedagógusképző felsőoktatási intézmény tanárképzési központjának javaslatára az intézmény oktatója vagy gyakorlóiskolájának, gyakorlóóvodájának, gyakorlókollégiumának legalább Pedagógus II. fokozatba sorolt alkalmazottja, aki a külön jogszabályban foglaltak szerinti felkészítésben vett részt, továbbá a pedagógust alkalmazó köznevelési intézmény vezetője vagy az általa megbízott, pedagógus-szakvizsgával rendelkező magasabb vezetői vagy vezetői megbízással rendelkező alkalmazott. Tagjai a minősítési eljárás esetén az OH által delegált ... köznevelési szakértő, ... továbbá a pedagógust alkalmazó köznevelési intézmény vezetője vagy az általa megbízott, pedagógus-szakvizsgával rendelkező alkalmazott. Az intézményvezető minősítési eljárása esetében a fenntartó képviselője. Minősítőként csak a minősített pedagógussal azonos vagy magasabb fokozatba besorolt, azonos munkakörben legalább öt év szakmai gyakorlattal rendelkező pedagógus vehet részt a minősítővizsgán és a minősítési eljárásban.

A tanár minősítési eljárása esetén a minősítőbizottság egyik tagjának végzettsége és szakképzettsége azonos kell, hogy legyen az értékelt tanárnak a minősítésre való jelentkezésében megjelölt tantárgya tanítására jogosító végzettségével és szakképzettségével."

Ebben az új rendszerben a pedagógus munkájának sokkal átfogóbb dokumentációja szükséges (szaktárgyi felkészülés, tanítás, reflexió és minden a szakmai és az iskolai élettel összefüggő tevékenység, esemény). Mindez feltételezi, hogy a tanár a tevékenységéről az eddig megszokottnál céltudatosabban gyűjti az adatokat, igazolásokat a portfóliója számára.

A tanári MA képzésben részt vevő hallgatók előnyben vannak a már régebben a pályán levő tanárokhoz képest, mert már a záróvizsgára készíteniük kell a kompetenciájukat alátámasztó elektronikus dossziét, portfóliót és a záróvizsga része ennek a portfóliónak a védése is.

A képzést lezáró portfólió a következő tanári kompetenciák szerint állítandó össze:

- A tanuló személyiségének fejlesztése (tehetségfejlesztés, speciális bánásmódot igénylő gyerekek számára készített egyéni terv, egy kiválasztott növendék jellemzése, esettanulmány egy kiválasztott növendék, vagy csoport fejlődéséről, órai megfigyelések)
- A tanulói csoportok, közösségek alakulásának segítése, fejlesztése (az iskola szociális kompetenciák fejlesztési gyakorlatának bemutatása, „osztályok" közösségének fejlesztése – közös hangverseny-látogatás, háziversenyek, iskolai konfliktushelyzetek értékelő elemzése, kooperatív munkát tükröző óra dokumentumai)
- A pedagógiai folyamat tervezése (pedagógiai program, helyi tanterv, tervezett anyag felépítése, intézmény bemutatás az iskolában begyűjtött dokumentációs anyagokkal, nevelési, oktatási folyamat tervezését, szervezését dokumentáló változatos médiumok – óraterv, versenyek és egyéb programok tervezése, óraterv, tematikus terv, órán kívüli tevékenység terve)
- A tanulók műveltségnek, készségeinek és képességeinek fejlesztése a tudás felhasználásával (prevenciós program, szabadidős programok, tankönyvelemzés – a hallgató reflexióival ellátva, saját készítésű taneszköz, poszter, vizuális segédanyag bemutatása, a gyerekek által egy adott témáról gyűjtött dokumentumok, valamely szakmai probléma megoldásának leírása – például helytelenül rögzült „szabály" vagy szóhasználat javítása, a gyakorlási hajlandóság növelése, eredményesebb gyakorlásra nevelés)
- Az egész életen át tartó tanulást megalapozó kompetenciák fejlesztése (tanulás-módszertani segédanyag összeállítása, pályaorientációs programok, motivációs kérdőív felvétele és elemzése, számítógéppel segített tanulás – keresőprogramok, elektronikus könyvtárak)
- A tanulási folyamat szervezése és irányítása (saját tematikus terv, módszertani tevékenység dokumentálása különböző médiumokkal, a szakmai gyakorlat egészéről írt rövid összefoglaló, reflexiókkal,

évfolyamtársak kritikai észrevételei a jelölt tanításáról, szervezési munkájáról, versenyek szervezésének dokumentumai, tanulásszervezésre vonatkozó felfogása)

- A pedagógiai értékelés változatos eszközeinek alkalmazása (szaktárgyi értékelés, mérésértékelés intézményi sajátossága, minőségbiztosítás, tanárral és intézménnyel szembeni elégedettség mérése, gyerekekkel, tanárokkal, szülőkkel készített interjúk, beszélgetések vázlata)
- Szakmai együttműködés és kommunikáció (külső szervekkel való együttműködés dokumentumai, az együttműködés formáinak bemutatása, gyermekekkel, szülőkkel való kapcsolat intézményi bemutatása – fogadóóra, nyílt nap, nevelőtestületi értekezlet, konferenciák, házi, megyei, országos és nemzetközi versenyek)
- Önművelés, elkötelezettség a szakmai fejlődésre (szakirodalmi áttekintés reflexiókkal, szakcikk összegzése, értékelése, szakmai fejlődési terv – közeli és távoli célkitűzések, valamint ezek teljesítésére vonatkozó tervek, önképzési tervei, tervezett továbbképzések, továbbtanulási tervek, nyelvtanulás, szakmai szervezetben, bizottságban való részvétel dokumentációja, szakmai előadáson, konferencián készített jegyzetek reflexiókkal (szakmai rendezvények – Bolyai Társulat, KöMaL, vándorgyűlés, módszertani napok)

A minősítési rendszer működésének kezdeti tapasztalatai alapján érdemes kiemelni, hogy

- elektronikusan is kell gyűjteni a dokumentumokat;
- diák beleegyezéssel sem szerepelhet feltöltött fotón, videón;
- a pedagógusnak saját magát, a teljes pedagógiai tevékenységét kell bemutatni, nem célszerű az előírt minimális információra és a szaktanári tevékenységre szorítkozni.

Az elvárások mellé persze segítő eszközök, rendszerek és személyek is társulnak. A legalapvetőbb segítség a kollégák egymás közötti tapasztalatcseréje, de jelentős szerep jut a mentoroknak és a szaktanácsadóknak is. A matematikatanárok meríthetnek a Bolyai János Matematikai Társulattól valamint a képző intézményektől a vándorgyűléseken és a módszertani konferenciákon megosztott tapasztalatokból, ötletekből és támogatásból. A tehetséggondozás fontos elemei a KöMaL és a különböző versenyek, amelyekről elektronikusan is elérhetők az információk.

II. fejezet

Gondolatok a matematikatanár tanórai feladatairól

A tanítás mindennapjai alapvetően három, egymással kölcsönhatásban lévő feladatkörből állnak, ezek az előkészítés, a lebonyolítás és az értékelés. Amikor egy feladatot kiválasztunk, akkor gondolni kell rá, hogy annak tanulságait gyakoroltatni és számonkérni is kell, tehát legalább három feladatot érdemes alkotni ugyanarra a tartalomra. Ha differenciálni is akarunk, akkor könnyű, közepes és nehéz változatban is érdemes gondolkodni. Az egész folyamat áttekintésében nagy hasznunkra lehet a tanmenet és az óravázlat. Azon túl, hogy kell, érdemes is óravázlatot írni, hiszen bizonyos tervezési fegyelem elengedhetetlen, hiszen az óra szakszerűségét szolgálja. Ellenőrizhetővé teszi, hogy a tervezés során hozott döntések a szándékolt eredményekhez vezettek-e. Ismételhetővé, javíthatóvá teszi az órát. Éppen a gondos tervezés teszi lehetővé a rugalmas reagálást. Érdemes utólag feljegyezni a sikeres és sikertelen mozzanatokat is. A tanítás fázisainak módszertani vonatkozásairól bővebben lehet olvasni a Matematika módszertani példatárban (Ambrus és társai, 2013).

II.1. Ünnepi óra

Matematikából nem is olyan nehéz ünnepi alkalmat találni (100. óra, április elseje, egy esemény évfordulója, egy híresség születésnapja, Mikulás, újév, péntek-tizenharmadika, stb.).

Nagyon emlékezetesek szoktak lenni a fordított órák. Ha elég magabiztosak a diákok, akkor rájuk lehet teljesen bízni az előkészítést és a lebonyolítást is, de ha eszközre, megerősítésre van szükségük, akkor segítenie kell a tanárnak.

Lehet, hogy egy egész órát szánunk az ünnepre, de érdemes egy-egy érdekes játékos feladványt szinte minden órába becsempészni. A tananyag rutin feladataihoz is kereshetünk népszerű rejtvénytípusokból, társasjátékokból ismert játékötletet, eszközöket. Az alsó tagozatban megismert játékok és eszközök (logikai készlet, színes rudak, LÜK készlet, stb.) később is jól használhatók.

A rászánt idő sokszorosan megtérül, mert jó hangulatot teremt a matematikaórán. Ha a tanulók érdeklődéséhez igazítjuk a feladványokat, akkor meggyőzhetjük őket, hogy a matematika egyrészt érdekes, másrészt hasznos és (sok)mindenhez van köze.

A jó feladványok gyűjtése, adaptálása összetett módszertani feladat.

A Matematikatanítási és Módszertani Központ összeállított „Elemi matematika példatár tanároknak” címmel egy elektronikus jegyzetet, amelyben számos ötletet és ajánlást összegyűjtött (Játékok, Bűvésztrükkök, Álbizonyítások és beugratók, Fejtörők, Paradoxonok).

A szaktárgyi tanításkísérő szemináriumon az egyik beadandó feladat éppen egy ünnepi óra terve. A szeminárium résztvevői ezt egy közös platformra küldik be, ahol más ötleteiket, sikereiket és problémáikat is megoszthatják egymással. Az összegyűlt anyag azt is megmutatja, hogy mennyire sokféle elképzelés él a hallgatókban arról, hogy a matematikáról és a matematikából mi számít érdekesnek. Van, aki görcsösen ragaszkodik a hagyományos matematika tananyaghoz, meg olyan is, aki a tartalom átgondolása nélkül ad fel sokféle feladványt, vagy éppen klasszikus (pl. sudoku) rejtvényekből szervez versenyt.

A legutóbbi szemináriumon feltöltött gyűjteményben található ötletek:

- más tantárgy felől megközelítve (csillagászat, trigonometria),
- alapismeretek versenyszerű átismétlése,
- a kocka éleire, lapjaira, hálózatára és térfogatára vonatkozó nem szokványos feladatok,
- híres emberekhez köthető feladványok, a tananyagon kívüli érdekes matematikai ismeretek (Möbius-szalag, Klein-kancsó),
- optikai csalódások,
- matematikatörténeti érdekességek,
- gyufarejtvények, logikai fejtörők,
- életjáték, kitalálós játék,
- mesematek, számkitalálós bűvésztrükk,
- kétnyelvű feladványok,
- kooperatív stratégiák.

A hallgatók által megtervezett rendhagyó órák leginkább munkaformában térnek el a többitől (feladatlapok, több csoportmunka, verseny). Szembetűnő, hogy a gyakorlóiskolában szokásos óravázlat sablonjába nehezen tudják belepréselni a gondolataikat. Általában gondot okoz az időtartam megbecslése, az időbeosztás. A kipróbálás nem feltétlenül illik a mentortanárral készített tanmenetbe, de helyettesítéskor, kiránduláson, szaktáborban és egyéb tanórán kívüli alkalmakkor szerezhetnek tapasztalatot a megvalósíthatóságról.

Gyakran előfordul, hogy csoportmunka során azzal szeretnének időt nyerni, hogy a különböző csoportoknak más-más feladatot adnak. Összességében tehát sok feladat szerepel, de minden csoport csak a saját feladataival küzd meg. Terveznek ugyan egy megbeszélést, ahol minden csoportból valaki elmeséli a többieknek a saját feladatát és annak megoldását, de ennek hatékonysága kérdéses. Az egyik hallgató ezt a problémát a következőképpen csökkentette:

- Minden csoport egy-egy feladatlapot kap, amelyen egy megoldandó feladat van. A csoport tagjai közösen megoldják a feladatot.
- Ezután a csoport egy tagja helyben marad, a többiek pedig szétszélednek, mindenki egy-egy másik csoport asztalához megy. A helyben maradó ismerteti az újaknak a csoport feladatát, majd segít nekik a megoldásban. Fontos, hogy átadja a megoldáshoz vezető gondolatmenetet is.
- A tanulók feladatlapot kapnak, amely a csoportban megoldott feladatokhoz hasonlókat tartalmaz. Ezeket kell megoldani, és a megoldások menetét leírni.

Így sem ismer meg mindenki minden feladatot, sőt, a helyben maradó egy újat sem. Javítható a helyzet, ha úgy szervezzük a csoportokat, hogy átrendezés után minden csoportban legyen minden feladatnak gazdája és mindenki megoldatja a saját feladatát.

A tanulók így nem csak a megoldást, hanem a megoldáshoz vezető út tudatosítását is gyakorolják. A tanár nehezen tudja a csoportokban folyó érveléseket követni, de a beadott megoldásokból eldöntheti, hogy maradt-e tisztáznivaló.

Az ünnepi órán alkalmazott eszközöknek, módszereknek és foglalkoztatási formáknak a megfelelő matematikai tartalomhoz igazítva helye van minden órán, mégis ünnepszámba megy ezeknek az alkalmazása. Ennek egyik oka, hogy olyan kedvcsináló feladatok jutnak elsőként eszünkbe, amelyeknek nincs közvetlen kapcsolata az aktuális tananyaggal (logikai rejtvények, becsapós feladatok, szám-keresztrejtvény, bűvös négyzet, stb.). Az is előfordul, hogy a kapcsolat nem nyilvánvaló (kockahajtogatás).

Másik akadály lehet az eszközök beszerzése, előkészítése (drága, időigényes, ügyesség és gyakorlat kell hozzá, stb.). Az éppen népszerű vetélkedőműsor, rejtvényforma, társasjáték kereteinek a tananyaghoz illesztéséhez nem elegendő tudni a tananyagot, hanem szakmai biztonságra, áttekintésre is szükség van.

A szokványostól eltérő módszertani megoldások és munkaformák mindenképpen gondosabb és tudatosabb felkészülést igényelnek, mint a tankönyvi vagy példatári feladatok kiválasztása. Vannak ugyan tankönyvek, amelyek nyomokban tartalmaznak matematikatörténeti érdekességet, játékot, tesztet, lyukas szöveget, kevert mondatot, kivágandó és összeragasztandó hálózatot, továbbá javaslatot tesznek a hagyományostól eltérő munkaformára (versírás, csapatverseny, stb.), de a tanár egyéni ötletei nem nélkülözhetők az óra emlékezetessé tételéhez.

II.1.1. Ügyességi és logikai játékok

1. Ördöglakatok

A logikai játékok különleges családja az ördöglakat, amely készülhet fémből, fából, műanyagból, stb. A cél, hogy megkeressük a játék elemeinek azt a helyzetét, amelyben az szétszedhető, illetve összerakható. Akkor érdekes a játék, ha az osztály tanulói behozzák a saját (már úgyis ismert) példányaikat és a többiekkel nyittatják ki vagy rakatják össze.





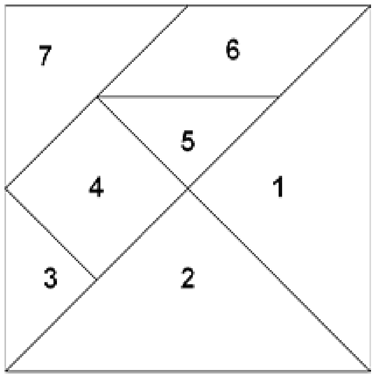

2. Tangram

Ősi kínai játék, amely a XIX. században került Amerikába. Ma már az egyik legnépszerűbb játék. Készülhet papírból, műanyagból, fából. Játszható kézzel fogható darabkákkal, aktív táblán, táblagépen vagy akár okos telefonon.

Minden tanuló készíthet magának készletet. Azzal is differenciálhatunk, hogy a feladatról és a megoldásról kiszínezett vagy megszámozott minta megmutatásával, illetve geometriai jellemzők megfogalmazásával beszélünk.

Egy négyzet egyenes szakaszokkal 7 részre kell vágni. A vágásra szolgáló szakaszok végpontja már létező szakasz végpontja vagy felezőpontja lehet.

Az egyik átló elfelezi a négyzetet, és a másik átló fele két derékszögű egyenlőszárú háromszögre osztja az egyik felet (1 és 2). A négyzet másik feléből az átlóval párhuzamos középvonallal levágunk egy derékszögű egyenlőszárú háromszöget (7). A maradék trapéz hosszabbik alapját négy egyenlő részre osztva egy négyzetre (4), egy paralelogrammára (6) és két kis derékszögű egyenlőszárú háromszögre (3 és 5) vágjuk.

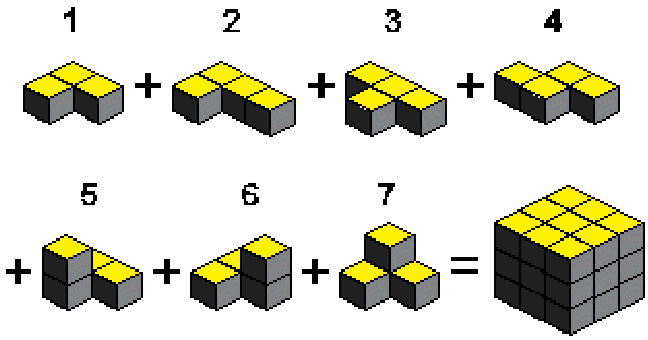


A részekből sokféle alakzatot lehet kirakni, konvex sokszöget, hiányos négyzetet, ember- és állatfigurákat. Színezett idomos feladványok és megoldások találhatók pl. Prok István honlapján http://www.ttk.bme.hu/~prok/Keszsegfejlesztes_Tangram.pdf. (Bővebben lásd Hársing, 1988.)

3. Kockakirakók (Szómák)

Ismert logikai játékok a kockakirakók. A cél egy kocka összeállítása a különböző alakú elemekből.

7 db adott részből



Piet Hein féle szómája

4. Rubik Ernő játékai

A gyerekek projekt-munkában vagy kutatási feladatként összegyűjthetik a játékok történetét, matematikai hátterét, stb. Egy-egy ilyen foglalkozásra a tanulók (és a tanár) behozhatják a saját játékaikat, tarthatnak bemutatót, adhatnak egymásnak feladványokat, szervezhetnek versenyt. A címlap képén szereplő Rubik Gubanc például nagyon alkalmas csoportmunkára.

Kockák, dodekaéderek, tetraéder, kígyó és még sok más

Forrás: http://www.motivalodok.hu/static/images/gallery/1/115-b.jpg

5. Bábel-torony

Dézsi István alkotása (1978), az egyik legismertebb magyar játék. 36 színes műanyag golyókból áll a 6 emeletes játék. A golyók a színskála különböző színeiben átmenetet képeznek a sötéttől a világosig. A műanyag gyűrűk elforgatásával más színsorrend alakítható ki. A játék célja, a színek eredeti állapotba visszarendezése, melyre összesen 42 számjegyű megoldási mód ismert.

A feltaláló többi logikai játékának is érdemes utánanézni az interneten (TREXI, a SUDOKU egy variációja).

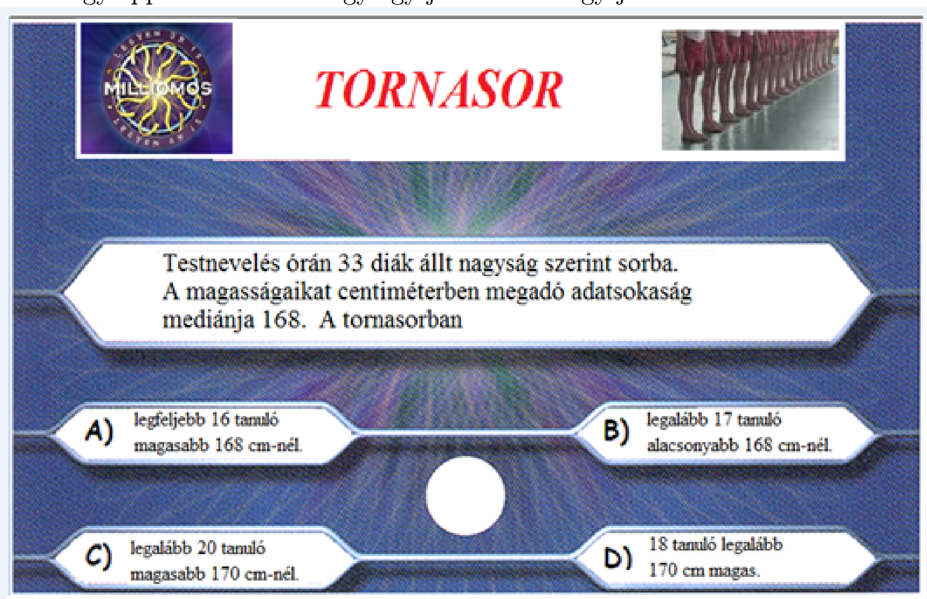
II.1. ábra. Forrás: http://blog.reflexshop.hu/wp-content/uploads/2015/06/b%C3%A1bel-tornya-1024x820.jpg

II.1.2. Ismert játékok módosítása

- Használhatunk dobókockás társasjátékot, ahol a számozott mezőkhöz kérdések tartoznak. Ugyanazt a táblát más-más kérdéskészlettel más-más témakörhöz vagy más korosztályhoz használhatjuk. Akár a diákok is megfogalmazhatnak kérdéseket.

- Aktualizálhatjuk a „Lehet egy kérdéssel több?” társasjátékot különböző kártyakészletekkel.

- Használhatjuk a televízióból ismert „Legyen ön is milliomos” játék sémáját elektronikusan vagy papíralapon. A versenyző megszavaztathatja az osztályt, hogy ki szerint helyes az A), a B), a C) és a D) válasz. Ennek alapján kizárhat 2 választ, vagy elfogadhatja azt, amelyik a legtöbb szavazatot kapta. „Telefonos segítséget” 5 előre megadott osztálytárs közül választhat. Ha a tanulók élvezik a játékot, megértették a játékszabályokat, maguk is készíthetnek a sablon segítségével feladványokat egymásnak vagy éppen a tanárnak egy-egy játék után vagy játék közben.



- A dominó játékot is „matematizálhatjuk”, ha fogalom és tulajdonság, egyenlet és gyöke, stb. alkotják az összetartozó mezőket. Például a speciális négyszögekről:

- Számtalan témakörhöz különböző nehézségű játék készíthető a „Memory” játék módosított változatához – az összetartozók alkotnak párt (pl. egy alakzat képe és valamilyen hozzá tartozó képlet).

II.2. Kiegészítő anyagok, kutatási feladatok

A tananyagban közvetlenül nem szereplő tartalmak a tájékozódást, kitekintést segítik, a tananyag matematikai vagy matematikatörténeti hátterét vagy éppen a mindennapi élettel való kapcsolatát mutathatják be. Adhatunk kutatási feladatot az osztálynak, szervezhetünk projektet csoportoknak, vagy kitűzhetünk egyénre szabott témát is. A munka folyhat a tantermen kívül is (otthon, könyvtárban, interneten, stb.). Munkájuk eredményét csoportosan vagy egyénileg beadhatják vagy bemutathatják poszteren, kiselőadásban, megoszthatják internetes fórumokon.

Tartalék feladok akkor is kellenek, ha egy gyerek túl gyorsan készül el a tervezett munkával, mert fontos, hogy ne szaladjon túlzottan előre, hanem inkább az adott anyag kapcsolatrendszerében mélyedjen el.

A kutatási feladatok során a tanulók saját kérdéseikre keresik a választ. A tanárt az is tájékoztatja a tanulók ismereteinek rendszeréről és mélységéről, valamint a matematikai megközelítés igényességéről, hogy hogyan közelítik meg a kutatási feladatot.

Kutatás közben megtanulhatják a tanulók, hogy a megfogalmazott kérdés – a matematikában általában is – még akkor is fontos, ha még nem tudjuk a választ.

II.2.1. Példa önálló vagy csoportos kutatáshoz

Kiindulási feladat

Hajtsunk félbe egy (téglalap alakú) papírcsíkot, majd a hajtásvonallal párhuzamosan ismét hajtsuk félbe, és így tovább. Hány hajtásvonal lesz a papíron 5 hajtogatás után.

Egy feldolgozási lehetőség

Ha pusztán a feltett kérdésre szeretnénk válaszolni, akkor a legegyszerűbb, hogy veszünk egy papírlapot, kellően sokszor félbehajtjuk, kisimítjuk és megszámoljuk, hogy hány hajtásvonal látható a lapon (31). Közben megállapíthatjuk, hogy – őszintén szólva – sem a kérdés, sem a válasz nem túl érdekes, semmiféle intellektuális kalandban nem volt részünk a feladat megoldása közben.

Izgalmasabb a helyzet akkor, ha csak képzeletben végezzük el a hajtogatásokat.

Az első félbehajtáskor egy hajtásvonal keletkezik, és két papírréteg kerül egymásra. A második hajtás elvégzésekor e két réteg mindegyikén keletkezik egy-egy új hajtásvonal (és a régi is megmarad), és négyrétegű lesz a papírlapunk. A harmadik hajtásnál mind a négy rétegen kapunk egy-egy új hajtásvonalat és nyolcrétegű lesz a papírlapunk.

Minden hajtogatásnál megduplázódik a rétegek száma és a következő hajtogatáskor minden rétegen keletkezik egy új hajtásvonal.

Ha ötször hajtottuk félbe a papírcsíkot, akkor összesen $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ hajtásvonalat kapunk.

Úgy is okoskodhatunk, hogy ha minden hajtogatáskor megduplázódik a rétegek száma, akkor 5 hajtogatás után 32 réteg fog egymásra kerülni. A széthajtogatott papírlapon ezeket a rétegeket éppen a hajtásvonalak választják el. Ahhoz, hogy egy papírlapot párhuzamos vonalakkal 32 tartományra bontsunk, 31 elválasztó vonalra van szükség.

Mindkét gondolatmenetünknek megvan az az előnye a „kísérleti" megoldással szemben, hogy könnyen általánosítható, akárhány hajtogatás esetén ugyanígy meg tudjuk mondani a hajtásvonalak számát, míg a hajtogatások tényleges elvégzése egy idő után gyakorlatilag lehetetlenné válik.

A két gondolatmenet egybevetéséből egy szép összefüggéshez is juthatunk: n hajtogatás esetén ugyanazt az eredményt egyszer $1+2+4+\ldots+2^{n-1}$, egyszer meg 2^n-1 alakban kaptuk, tehát $1+2+4+\ldots+2^{n-1} = 2^n-1$.

A valóságos papírlap tényleges hajtogatásakor is bőven akad meggondolnivaló. Legyen például 0,1 mm vastag a lapunk. Ezt ötször félbehajtva 3,2 mm vastag papírcsíkot kapnánk. Vajon hány hajtás kellene ahhoz, hogy 1 méter vastag legyen az összehajtott csík?

A rétegek száma megduplázódik és a csík vastagsága kétszeres lesz. Az elvi meggondolás szerint 14 hajtás elegendő. Ha megpróbálunk egy füzetlapot ennyiszer összehajtani, akkor a legügyesebbeknek sem sikerül. Ügyetlenek voltunk? A papír mérete az oka? Lehetséges egyáltalán?

A kisimított papírlapot is érdemes szemügyre venni. Megfigyelhetjük, hogy homorú és domború hajtásvonalak vannak. Milyen szabály szerint követik egymást (ha mindig egy irányba hajtogatunk)?

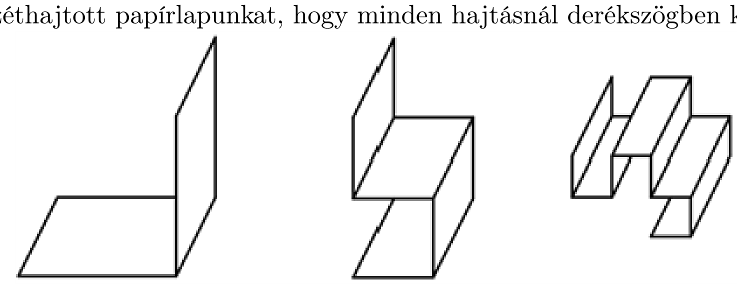
Ha a hajtásvonalak által határolt sávokat megszámozzuk aszerint, hogy a hajtogatás során milyen sorrendben kerülnek egymásra, akkor a következőket kapjuk:

<table>
<tr><td>1 hajtás (2 réteg) esetén:</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">2</td></tr>
<tr><td>2 hajtás (4 réteg) esetén:</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>3 hajtás (8 réteg) esetén:</td><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

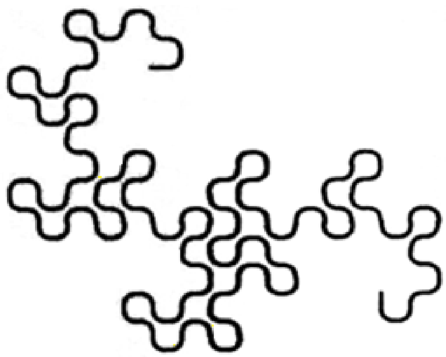
Nem is olyan könnyű például arra a kérdésre válaszolni, hogy 4 vagy 5 hajtás esetén milyen számsorozatot kapunk. Próbálkozás közben sok érdekességet fedezhetünk fel, megfigyelhetjük például, hogy

- páratlan számot mindig páros követ és viszont;
- egy páratlan szám és a rákövetkezője mindig egymás tükörképei;
- az előző sorozatban szereplő számok megtartják egymáshoz viszonyított sorrendjüket;
- a páratlan számok olyan rétegeket jelölnek, amelyeknél a papír „elülső" oldala, a párosak pedig olyanokat, amelyeknél a papír „hátsó" oldala kerül felülre.

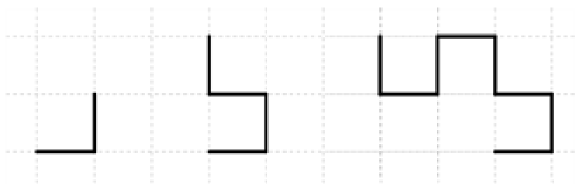
Tartsuk most úgy széthajtott papírlapunkat, hogy minden hajtásnál derékszögben kanyarodjon a papír:



Ha lerajzoljuk a papír széle által leírt zegzugos vonalat, máris egy sárkánygörbéhez jutunk. Az ábrán (a félbehajtások számának megfelelően) egy első-, egy másod- és egy harmadrendű sárkánygörbe látható:

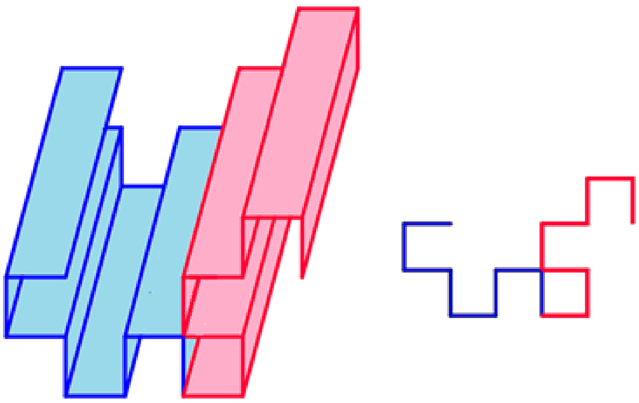


II.2. ábra. Hetedrendű sárkánygörbe lekerekített sarkokkal



A görbe onnan kapta a nevét, hogy ha egy magasabb rendű sárkánygörbe lerajzolásakor lekerekítjük a derékszögeket, akkor egy tekergőző tengerikígyóra emlékeztető ábrát kapunk:

Első-, másod-, harmad- és negyedrendű sárkánygörbét könnyen rajzolhatunk úgy, hogy megfelelő sokszor félbehajtunk egy lapot, majd megfigyeljük, hogyan kanyarog a papír. Az ötödrendűt már akkor is nehéz lerajzolni, ha sikerül ötször félbehajtani a lapot, magasabb rendűeket pedig ezzel a módszerrel lehetetlen. Észrevehetjük azonban, hogy minden sárkánygörbe két egybevágó részre bontható, melyek egymás 90°-os elforgatottjai, és amelyek mindegyike egybevágó az eggyel kisebb rendű sárkánygörbével, vagyis például két harmadrendű sárkánygörbe összeilleszthető egy negyedrendűvé:



Észrevételünk a papírhajtogatás természetéből következik; az első félbehajtással a lapunkat két részre osztjuk, és a továbbiakban mindkét résszel ugyanazokat a hajtásokat végezzük el.

Megfigyelésünk lehetőséget ad magasabb rendű sárkánygörbék rajzolására, bár alkalmazása egyre nehézkesebbé válik. Jó lenne valamilyen más módszert is találni.

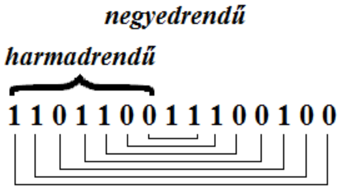
Ha már tudjuk, hogy a széthajtogatott papírlapon a homorú és a domború hajtásvonalak milyen szabály szerint követik egymást, akkor ennek alapján könnyen készíthetünk „útitervet” akárhányad rendű sárkánygörbéhez, hiszen homorú hajtásvonal esetén balra, domború esetén jobbra kell kanyarodni a görbénknek.

A következő útitervekben 1 = homorú = balra, 0 = domború = jobbra:

elsőrendű	1
másodrendű	110
harmadrendű	1101100
negyedrendű	110110011100100
ötödrendű	1101100111001001110110001100100

A szabályt többféleképpen is megfogalmazhatjuk. Itt most három lehetőséget írunk le (bármelyikről könnyen belátható, hogy a papírhajtogatás természetéből következik).

1. szabály: Írjuk le először az előző számot, majd egy 1-est. A további számok pedig legyenek másmilyenek, mint az erre az 1-esre vonatkozó tükörképük. Az n-edrendű sárkánygörbe esetén (2^n-1) számjegyből áll útitervünk. Ha a k-adik számjegy 1-es, akkor a $(2^n-1-k+1)=(2^n-k)$-adik számjegy 0, ha pedig a k-adik számjegy 0, akkor a (2^n-k)-adik számjegy 1.

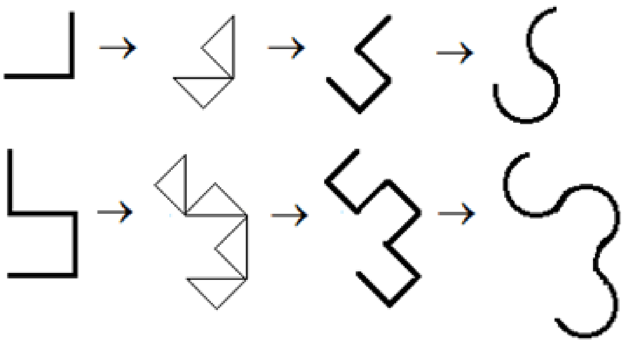


2. szabály: Írjuk le először az előző számot, majd egy 1-est, ezután pedig ismét az előző számot, megváltoztatva annak középső számjegyét. 110**1**100**1**110**0**100

3. szabály: Írjuk le először az előző számot úgy, hogy némi helyet hagyunk ki a számjegyek között, majd a szám elejére, közeibe és végére felváltva írunk be 1-et és 0-át (1-essel kezdve).

	1		1		0		1		1		0		0	
↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑
1		0		1		0		1		0		1		0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0

A 3. szabály rajzos szemléltetését mutatja az ábra:

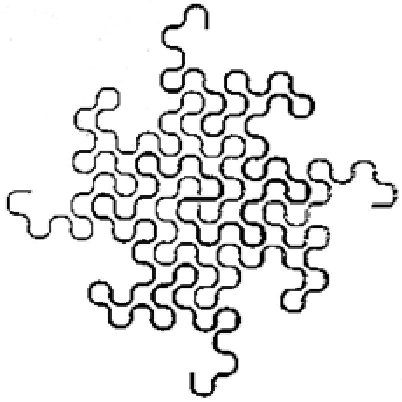


A sárkánygörbékkel kapcsolatban sok érdekes kérdés vethető még fel, például:

- Átmetszheti-e valamelyik görbe saját magát?
- Eljuthat-e a görbe „akármilyen” messzire? (Ez a kérdés önmagában is többféleképpen pontosítható.)
- Négyzetrácson kijelölve egy tetszőleges tartományt, lehet-e olyan sárkánygörbét rajzolni, amely a tartományon belül minden rácsszakaszon áthalad?
- Mekkora az egyes görbék maximális kiterjedése?
- Milyen méretű téglalapba foglalhatók bele?
- Négyzetrácsra rajzolt rögzített helyzetű görbék hány „vízszintes” és hány „függőleges” szakaszból állnak?

- Milyen távol lesz egymástól a görbe két végpontja?
- Milyen görbéket kapnánk akkor, ha a papírlapunkat nem mindig azonos irányban hajtottuk volna félbe?

Kísérletezhetnénk azonos rendű görbék különböző egymáshoz illesztésével is. A következő rajzot például négy közös kezdőpontú, hatodrendű sárkánygöbe összeillesztésével kaptuk:



II.2.2. Ötletek önálló vagy csoportos kutatáshoz

1. A távolságról

Kicsiknek és nagyoknak bőségesen tartalmaz kihívásokat egy alakzattól adott távolságra levő pontok összességének felkutatása, vagy a körvonalra való tükrözés értelmezése (a tengelyes tükrözés analógiájára. Szeredi Éva számos könnyen elkészíthető segédeszközt (például átlátszó papírt, fóliákat) javasolt, amelyekkel a felfedezés változatosabbá válik, de nem veszik el a problémamegoldás örömét. (Részletesen lásd Ambrus és társai, 2013.)

Izgalmas kutatási feladat lehet, és ugyanakkor hozzájárulhat a távolság fogalmának elmélyüléséhez annak vizsgálata, hogy milyen távol van egy adott körvonaltól a kör síkjának valamely pontja. A fogalom fejlettségi szintjétől függően különböző mélységű és igényességű meggondolásokra van mód.

- Kereshetjük különböző stratégiákkal a kiválasztott pontot a körvonal pontjaival összekötő szakaszok hosszának minimumát vagy magát a legrövidebb összekötő szakaszt (pl. a pont örül írt kör sugarának érintkezésig való folyamatos növelésével). Felfedeztethetjük a két megközelítés közötti különbséget, hiszen a távolság egyértelmű, de legrövidebb szakaszból végtelen sok van, ha kör középpontját választjuk éppen ki.
- Megvizsgálhatjuk a sík pontjait abból a szempontból, hogy különböző-e a körlemeztől és a körvonaltól mért távolsága.
- Összehasonlíthatjuk a pont körül írt adott kört érintő kör keresésének problémáját a körvonaltól mért távolság meghatározásának kérdésével.
- Mi a változás, ha nyílt körlemeztől mérjük a távolságot?
- Hogyan mérjük egy pont távolságát egy félegyenestől, két közös kezdőpontú félegyenestől, egy szögtartománytól?

Megjegyzések:

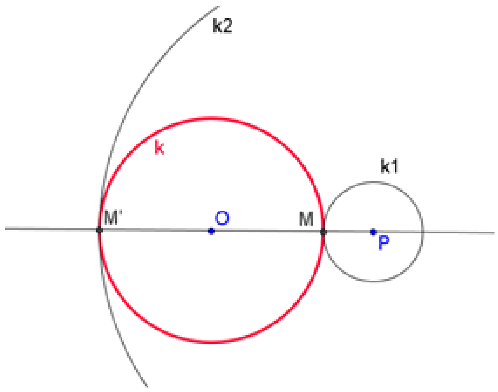
Rövid kísérletezés után kialakul a sejtés, hogy a ponton átmenő, a középpontból induló félegyenes metszi ki a körvonalból a ponthoz legközelebbi pontot.

Kiderül, hogy van olyan pont, amelyre nem alkalmazható a szabály (ha a középpontot vizsgáljuk, nem egyértelmű a félegyenes). A kör középpontját a körvonal tetszőleges pontjával összekötő szakasz hossza éppen a sugár hossza. Bármelyik szakasz tekinthető legrövidebbnek. Ebben az esetben tehát (más úton) végtelen sok legrövidebb szakaszt találhatunk.

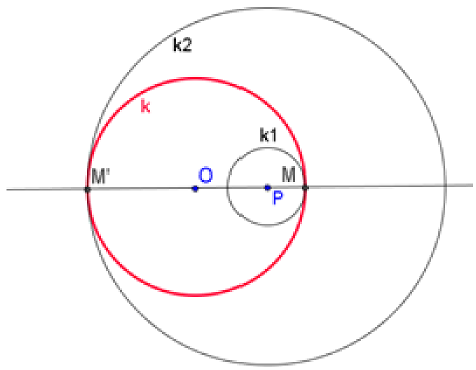
A kör síkjának többi pontján át egyértelműen húzható középpontból induló félegyenes, de van olyan pont, ahol nem kapunk legrövidebb szakaszt, mert a körvonallal alkotott metszéspont maga a kiindulópont. Ezen a ponton elválik egymástól a körvonaltól való távolság és a legrövidebb szakasz megkeresésének kérdése.

A körvonal pontjaihoz nem találtunk legrövidebb szakaszt, de távolságot tudunk értelmezni, hiszen minden alakzatra igaz, hogy az alakzathoz tartozó pontok 0 távolságra vannak az alakzatról.

A középponttól és a körvonal pontjaitól különböző pontokra működik a félegyeneses eljárás, csak azt kell még belátni, hogy valóban a legrövidebb szakaszhoz jutunk. Ezen a ponton érdemes dinamikus geometriai feladatlapot használni és az érintő kör problémájával is összekötni a kérdést.



A P pont a körön kívül van.



A P pont a körön belül van.

A körre nézve külső pontnak a (zárt) körlemeztől való távolsága ugyanannyi, mint a körvonaltól. A körlemez pontjaihoz nem tartozik legrövidebb szakasz, de a távolság értelmezhető, 0.

2. Kutyageometria – távolságmérés a négyzetrácson

A kutyaváros utcái egy négyzetrácsot alkotnak. Ha a kutyák el akarnak jutni egyik helyről a másikra, akkor nem az érdekli őket, hogy milyen messze van egymástól légvonalban a két hely, hanem az, hogy mennyit kell kutyagolniuk, hiszen csak az utcákon tudnak közlekedni. Egy utcán belül a távolságot a szokásos módon értelmezzük. Egységnek két szomszédos rácspont távolságát választhatjuk. Két tetszőleges pont távolsága ebben a világban a pontokat összekötő legrövidebb, rácsegyenesek mentén haladó töröttvonal hossza. (Az útvonal nem feltétlenül egyértelmű!) Kereshetjük ismert alakzatok analogonjait ebben a geometriában.

Például:

Mértani helyek

- adott ponttól adott távolságra levő pontok halmaza (kutyakör);
- két ponttól egyenlő távol levő pontok összessége;
- ellipszis, parabola, stb.

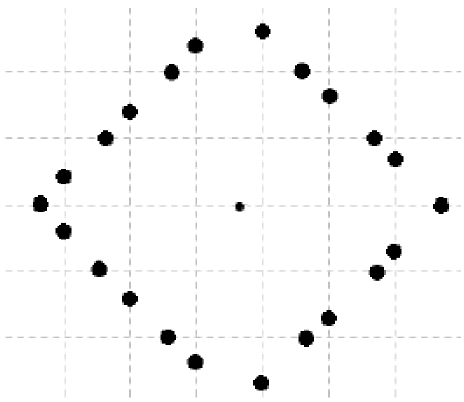
Kombinatorikai kérdések

- Hány különböző útvonalon juthat el Bodri Cézárhoz, ha a legkevesebbet szeretne kutyagolni?

- Hogyan változik a feladat, ha egy adott helyet (pl. az elásott csontot) érintenie kell?

- Hogyan változik a feladat, ha egy adott hely érintése tilos?

Egy 3 egység sugarú kör a kutyageometriában:

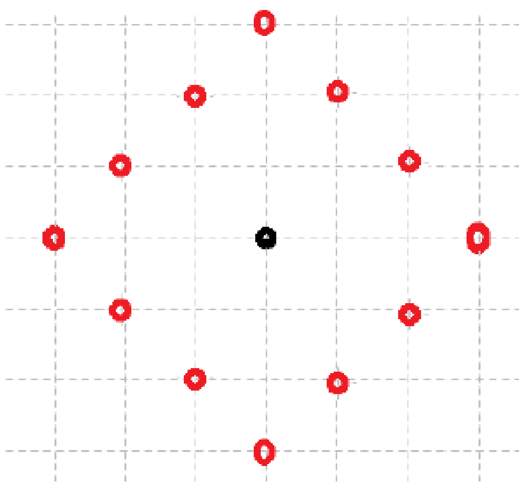


További ötletek találhatók az interneten, pl. Fazakas Tünde és Hraskó András írásában

http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_i.pdf.

A távolságfogalom ezen módosításával értelmezett „geometria” komoly matematikai tapasztalatokkal kecsegtet. A tanulók képességüknek és érdeklődésüknek megfelelő célt tűzhetnek ki, saját kérdéseket fogalmazhatnak meg.

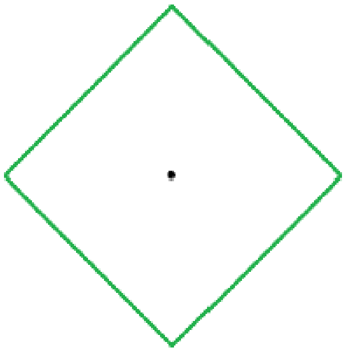
Egyszerűbb a feladat, ha a pontjaink csak rácspontok lehetnek. Ebben a rendszerben a 3 egység sugarú kör az alábbi:



Egy hasonló „kirándulás” az úgynevezett „Taxicab geometry”, amelyet Hermann Minkowski a XIX. században vizsgált. Itt a távolságot úgy mérjük, hogy vesszük a megfelelő derékszögű koordináták különbségének abszolútértékét és összeadjuk:

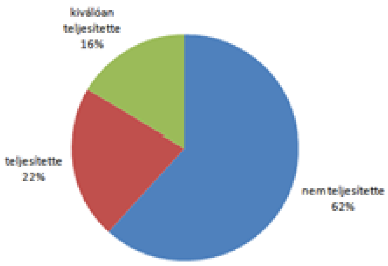
$$d(P(x_1;y_1);Q(x_2;y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

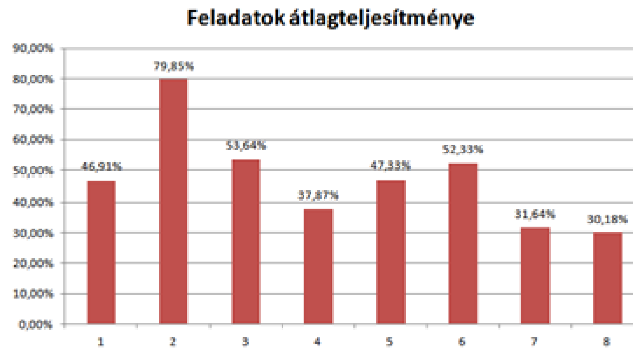
Ebben a geometriában egy kör képe:



3. Statisztikai adatok gyűjtése és elemzése

Számos témakörhöz (százalékszámítás, függvényábrázolás, valószínűség, stb.) kapcsolódhat a környezetből vagy az internetről gyűjtött adatok (a tanulók magassága, üzlet forgalma, népesség alakulása, időjárási adatok, lázgörbe, osztályzatok, stb.) feldolgozása.

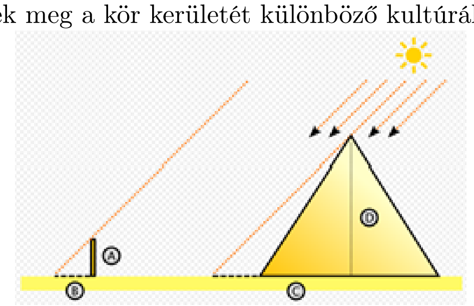




Egy kritériumdolgozat eredményei

4. Matematikatörténeti kutatások

Érdemes a tananyaghoz kapcsolódóan olyan matematikatörténeti témákat keresni, amelyeknél a fogalmi háttér is tisztázható. Például utána nézhetnek a tanulók, hogy hogyan mérte meg Thalész a piramis magasságát, hogyan állítottak merőlegest, hogyan becsülték meg a kör kerületét különböző kultúrák.



Gizai piramisok és a mérés elve
(http://de.wikipedia.org/wiki/Pyramide_(Bauwerk)#/media/File:Altes_%C3%84gyptenó02.jpg és
http://de.wikipedia.org/wiki/Thales#/media/File:Thales_theorem_6.png)

5. A Pascal-háromszög érdekességeinek felfedezése

Mi is az a Pascal-háromszög?

Első ismerkedéskor a Pascal-háromszög számok elrendezése egy egyenlőszárú háromszög alakban, ahol a háromszög szárain mindenhol 1-es áll, és minden közbülső helyen a fölötte álló két szám összege áll. (Ez a megközelítés látható például a következő internetes címen: https://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:PascalTriangleAnimated2.gif).

0. sor									1								
1. sor								1		1							
2. sor							1		2		1						
3. sor						1		3		3		1					
4. sor					1		4		6		4		1				
5. sor				1		5		10		10		5		1			
6. sor			1		6		15		20		15		6		1		
7. sor		1		7		21		35		35		21		7		1	
8. sor	1		8		28		56		70		56		28		8		1

⋮ ⋮ ⋮

Van, aki eleve úgy gondolja, hogy a Pascal-háromszögben a binomiális együtthatók állnak. Már a két álláspont összevetése is sok felfedezésre ad alkalmat. Eközben a binomiális együtthatók között számos kapcsolatot beláthatunk kombinatorikus úton. Például:

- Az n. sorban álló számok (binomiális együtthatók) összege 2^n (pl. az 5. soré $2^5 = 32$).

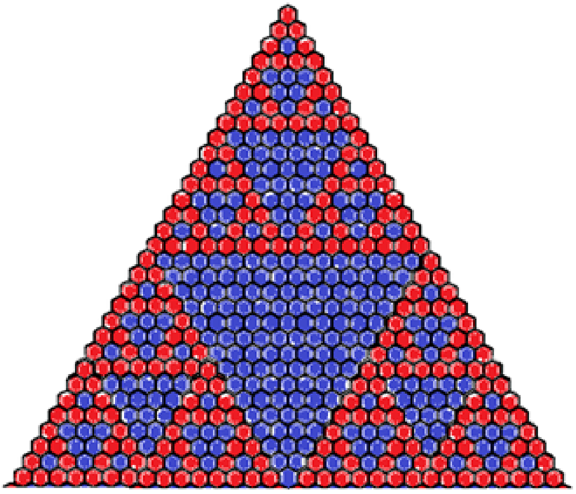
- A szárral párhuzamosan haladva a pozitív egész számok sorakoznak, az első n szám összege pedig az $(n+1)$. sorban az $(n+1)$ szomszédja (pl. a 8. sorban a 8 szomszédja $1+2+3+4+5+6+7 = 28$). A többi párhuzamoson haladva is hasonló szabályt ismerhetünk fel.

- Az n. sorban álló számok négyzetösszege a $2n$. sor középső eleme.

- Rendezzük át a háromszöget, toljuk balra a számokat és tekintsük a valamelyik ferde átló (ebben az elrendezésben mellékátló) menti összeget, ekkor Fibonacci-számot kapunk (pl. a 7. sorból indulva $1+6+10+4 = 21$ a 8. Fibonacci-számot kapjuk).

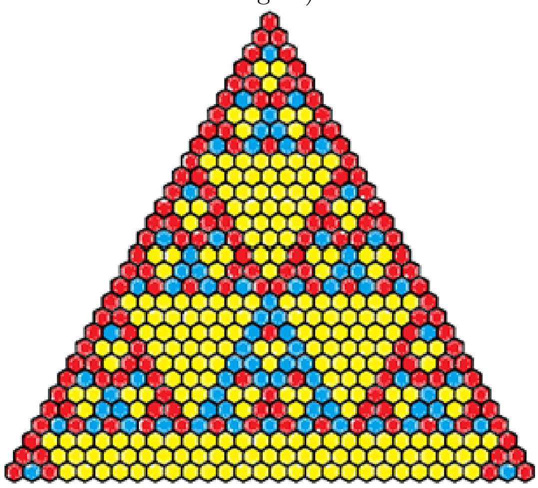
- A Pascal-háromszögben pirosra színezzük a páratlan számok és kékre a párosak helyét:

0. sor	1								
1. sor	1	1							
2. sor	1	2	1						
3. sor	1	3	3	1					
4. sor	1	4	6	4	1				
5. sor	1	5	10	10	5	1			
6. sor	1	6	15	20	15	6	1		
7. sor	1	7	21	35	35	21	7	1	
8. sor	1	8	28	56	70	56	28	8	1



Szép fraktálszerű ábrát kaptunk. Szóba hozhatjuk például a háromszögszámokat, összehasonlíthatjuk a kék és a piros tartományok területét, megtapasztalhatjuk a rekurziót és az indukciót.

Más modulusra is készíthetünk színezést, például ha a számok helyét három színnel színezzük a 3-mal alkotott maradékok szerint, akkor a következő mintázat rajzolódik ki. (Az ábrán a $3k + 1$ alakú számok pirosak, a $3k + 2$ alakúak kékek és a $3k$ alakúak sárgák.)



A mintázat szabályszerűségét még több sorból álló háromszögben jobban láthatnánk. A más modulusokkal végzett színezések az esztétikai élményen túl a maradékosztályokkal végzett összeadás gyakorlását is szolgálják. Versenyt is szervezhetünk, akár dekorációként is használhatjuk az eredményt. Élvezetesebb a munka, ha egy kitöltetlen részt kapnak a számítógépes munkához a tanulók. Már az egyszerű Paint program segítségével is kiterjeszthetik, kiszínezhetik a háromszöget (vagy fordítva), majd megoszthatják az eredményt.

II.3. Igazi feladatok az életből

Sokan féltik a „tiszta” matematikát a valóságközeli feladatoktól, holott ezek több szempontból is hasznosak. A tiszta matematikai feladatok nem építenek a gyerek gondolkodásának és tevékenységének számos (hétköznapi) eszközére (szókincsére, élettapasztalataira, az őt foglalkoztató kérdésekre). A hétköznapi életből vett feladat, probléma lehetőséget ad a konkrét szituációhoz kötött (kevésbé absztrakt) meggondolásra, lehetőséget ad arra, hogy a gyerek kapcsolatba kerüljön a kérdéssel. Néha annak kiderítésében is segít a szituációban való gondolkodás, és az arról kialakított kommunikáció, hogy mit nem ért, hol akadt el. A tanuló számára még akkor is értelmet nyer egy-egy matematikai eljárás, ha ő maga még nem tudja sikeresen alkalmazni.

Ugyanakkor a valóságközeli szituációnak nem kell szükségszerűen valósághűnek lennie, elegendő, ha egy szituáció beleillik a gyerek világába és érdeklődésébe (Harry Potter, hétfejű sárkány, scifi, stb.).

A tankönyvek, példatárak gyakran tartalmaznak – legalábbis szóhasználatukban – „életből vett” feladatokat. Ha azonban nem reális adatok szerepelnek bennük, akkor inkább zavart keltenek, a matematika hasznosságába vetett hitet rombolják. (Létező városok távolsága téves, a négy főre szánt recept túl kevés vagy túl sok ételt eredményez, gépjármű fogyasztása túl magas vagy túl alacsony, egy jelenség túl gyors vagy túl lassú, stb.) Ezekből egy kis utánajárással jó feladatot lehet csinálni, például a tanulók maguk utána nézhetnek a valódi adatoknak.

Érdemes nyitott szemmel járni a világban matematikai problémákra vadászva a hétköznapokban, és a tanulókat is erre bíztatni, időnként megbeszélni a „gyűjteményüket”.

II.3.1. Könnyen megfogalmazható, aktualizálható szituációk

- Az osztálykirándulás költségvetésének elkészítése vagy a pénztáros beszámolójának ellenőrzése.
- Nagyobb címletű bankjegy felváltásának lehetőségei.
- Van-e elég apró a visszajáró pénz kiosztásához?
- Valutaátváltás.
- Szabadidő beosztása.
- Négy adaghoz való recept átültetése 8, 2, 6, ... adagra.

Hozzávalók 4 személyre:

30 dkg liszt

25 dkg cukor

40 dkg alma

4 tojás

sütőpor

fahéj

- Az ábrán egy henger alakú tapadásmentes lábas látható.

Hány liter leves fér bele, ha 8 cm magas és 20 cm az alapkörének az átmérője?

Az edény készítésekor mekkora felületet kellett tapadásmentes bevonattal ellátni?

- Ebédre főztünk egy nagy fazék húslevest.

Valamennyi megmaradt (pl. a fele). A fazék nem fér be a hűtőszekrénybe, át kell rakni a levest egy kisebb edénybe.

Mekkora legyen az edény, hogy beleférjen a megmaradt leves? (Henger alakú fazekakra gondolunk.)

• Mekkora a répa fele? Hol vágjunk el egy kúp (vagy csonkakúp) alakú fehérrépát, amely 30 cm hosszú és alapkörének átmérője 2 cm, ha keresztben akarjuk megfelezni, mert a felét akarjuk karikákra szeletelni?

• A továbbjutás esélyének mérlegelése különböző szabályrendszerű bajnokságok esetén.

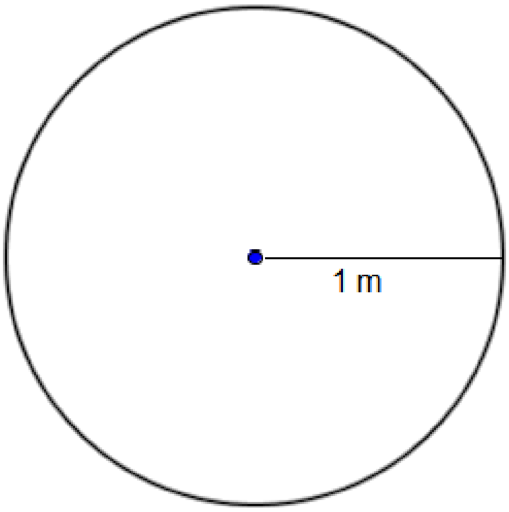
• Egy szigeten négylábú, hétfejű sárkányok és (kétlábú, egyfejű) griffmadarak élnek. Melyik fajtából hány van a szigeten, ha tudjuk, hogy összesen hány fejük és hány lábuk van?

• Mindenízű cukorkák csereberéje, ha ismerjük az egymáshoz viszonyított csereértéket.

• Egy 200 Ft-os érme körül egy 1 méterrel nagyobb sugarú koncentrikus kört írunk. Mennyivel nagyobb a kör kerülete, mint az érméé?

Megoldás:

A pénzverde adatai szerint az érme sugara 14,15 mm. A kerülete kb. 88,91 mm. A koncentrikus kör kerülete közelítőleg 6372,09 mm. A különbség 6283,18 mm, azaz 6 méternél is nagyobb.



• A Földet körülölelő kötelet megtoldjuk 1 méterrel, és egyenletesen felemeljük az Egyenlítő fölött. Milyen magas lény fér át alatta?

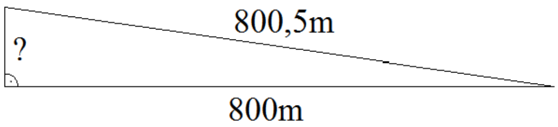
Megoldás:

Tekintsük az egyenlítő hosszát 40 000 km-nek, ekkor a Föld sugara körülbelül 6366,1977 km, azaz 6 366 197,7 m. A kötélből alkotott kör sugara körülbelül 40 000 001 : $2\pi \approx$ 6 366 197,9 méter. A különbség 20 cm, tehát például egy sivatagi nyúl át tud bújni alatta.

• Az Oktogon és a Hősök tere kb. 1600 méterre van egymástól. Képzeletben rögzítjük a talajon egy 1601 méter hosszú kötél egyik végét az Oktogonnál, másik végét a Hősök terén. Átférsz-e a kötél alatt (lehajlás nélkül) a közepénél? És egy óriás?

Megoldás:

A derékszögű háromszög magassága több mint 28 méter, így (meglepő módon) még egy 28 méter magas óriás is átférne alatta.



• Készíts magadnak kockanaptárt!

Kockanaptár karácsonyi díszítéssel (http://shophunter.eu/)

Ki lehet-e rakni minden májusi dátumot, ha 2 kocka lapjaira írhatunk egy-egy számjegyet? (Trükk: ha a 6-ost megfordítjuk, akkor 9-es.)

Hányféleképpen lehet a kockák között szétosztani a szükséges számjegyeket?

• Néhány további kérdés a naptárral kapcsolatban:

Hányszor fordulhat elő egy évben, hogy 13-a péntekre esik?

Ismersz változó dátumú ünnepeket? Nézz utána a szabályuknak.

Hogyan kell kiszámolni, hogy mikor van szökőév?

Mikor vezették be a mi naptárunkat?

Milyen időszámítást használtak előtte?

Használnak-e most is más naptárt?

• A hét napjairól:

Készíts öröknaptárt és keresd ki, hogy a családodban ki milyen napon született!

Te milyen napon születtél? Mi illik rád a következő angol mondóka szerint?

Mondays child poem

Mondays child is fair of face,

Tuesdays child is full of grace,

Wednesdays child is full of woe,

Thursdays child has far to go,

Fridays child is loving and giving,

Saturdays child works hard for his living,

And the child that is born on the Sabbath day

Is bonny and blithe, and good and gay.

• Tudod a hét törpe nevét?

A törpék közül mindennap más a napos. Hány különböző heti beosztás készülhet? Mennyi ideig tudják a naposokat beosztani, ha nem szeretnék egy korábbi hét beosztását megismételni?

II.4. Különböző érdeklődésű tanulók megszólítása

A matematikatanulás eredménye az élet számos területén hasznosítható. Magas matematikai képzettségű híres emberek között nem csupán matematikus, természettudós, informatikus, mérnök, közgazdász, stb. található, hanem író (Dugonics András, Ottlik Géza, Esterházy Péter), újságíró (Károlyházy Tivadar), zeneszerző (Kacsóh Pongrác), zenész (Bródy János, Benkó Sándor), polihisztor (Brassai Sámuel, Bolyai Farkas), cukrász (Szamos Gabriella és férje) és még sokan mások. A híres emberek élettörténetének és munkásságának megismerése inspiráló lehet a matematika tanulásához is.

A közös tevékenységekhez kapcsolódóan az egyes tanulók érdeklődésének megfelelően találhatunk matematikai tartalmakat a művészetek, a sport, a társadalomtudományok, a technika és a mindennapi élet területeiről. Az irodalomtudományban például statisztikai módszerekkel végzett szövegelemzéssel sorolható be a vizsgált szöveg a megfelelő szerzőkhöz (Pl. Dieter Wickmann, 1995). A konstruktivista nyelvészet is számos matematikai módszert alkalmaz (Noam Chomsky, 1985, 1995). Izgalmas témák a titkosírás, a titkosítás, a kódolás (adatvédelem), amelyeknek számos történelmi vonatkozása mellett rámutathatunk a számelmélet gyakorlati alkalmazásaira is.

Rákóczi korabeli titkosírás zenei jelekkel

Forrás: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/hu/c/c6/Rakoczi-titkosiras.jpg

Az interneten (akár okostelefonok segítségével is) kiapadhatatlan kutatási lehetőség vár a diákokra, pl. megkereshetik a történeti hátteret, animációkra lelhetnek, matematikai tanulsággal bíró képeket találhatnak (tanulmányozhatják a szimmetriákat, felfedezhetik a perspektivikus ábrázolás matematikai hátterét stb.).

II.4.1. Az aranymetszés és a Fibonacci számok

A két téma sokféle kapcsolata a matematikán kívüli világgal és a matematika különböző területein otthonos témák összekapcsolása által lehetővé teszi különböző érdeklődésű tanulók bekapcsolódását a munkába.

A Fibonacci-sorozat a világ egyik legismertebb sorozata, amely az aranymetszéshez hasonlóan a matematika szinte minden területén, a zenében, a nyelvészetben, az irodalomban, a képzőművészetben és a természetben is előfordul.

Külön szép kutatómunka a történeti háttér felderítése, az előfordulási helyek felkutatása és a két fogalom kapcsolatának bemutatása.

A Fibonacci sorozatot két indiai matematikus Gopala és Hemacsandra írta le először (1150-ben). A szanszkrit költészet elméleti kérdéseit vizsgálva egy összegre bontási problémába ütköztek, azt keresték, hogy hányféleképpen lehet rövid és hosszú szótagokkal kitölteni egy adott időtartamot, ha egy hosszú szótag két rövidnek felel meg.

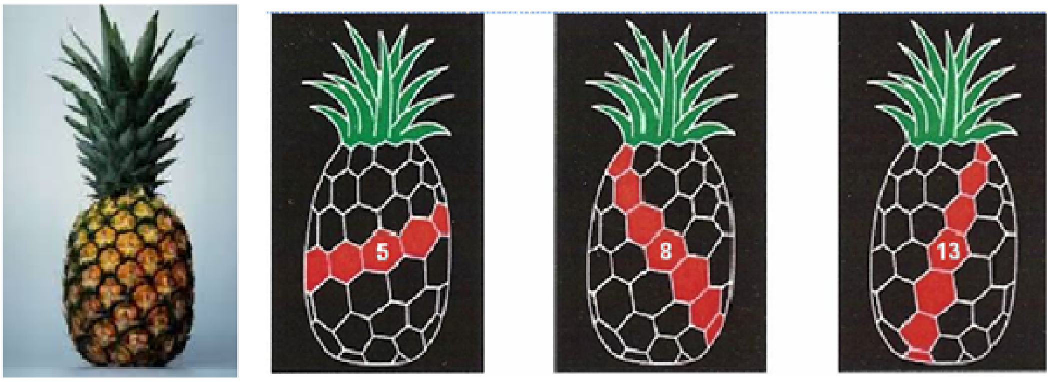
Nyugaton tőlük függetlenül találta meg 1202-ben Fibonacci (Leonardo Pisano), aki Liber Abaci (Könyv az abakuszról) című művében egy képzeletbeli nyúlcsalád növekedését adta fel gyakorlófeladatként. Kepler 1611-ben a The Six-Cornered Snowflake (Hatszögletű hópehely) című könyvében újra felfedezte, és különféle természeti jelenségekkel hozta kapcsolatba. A ma használt elnevezést E. Lucastól kapta.

A virágszirmok száma gyakran Fibonacci-szám: például a nősziromnak három; a vadrózsának öt; a pillangóvirágnak nyolc; a körömvirágnak 13; az őszirózsának 21; egyes százszorszépeknek 34; más százszorszépfajoknak pedig 55 vagy 89 szirma van.

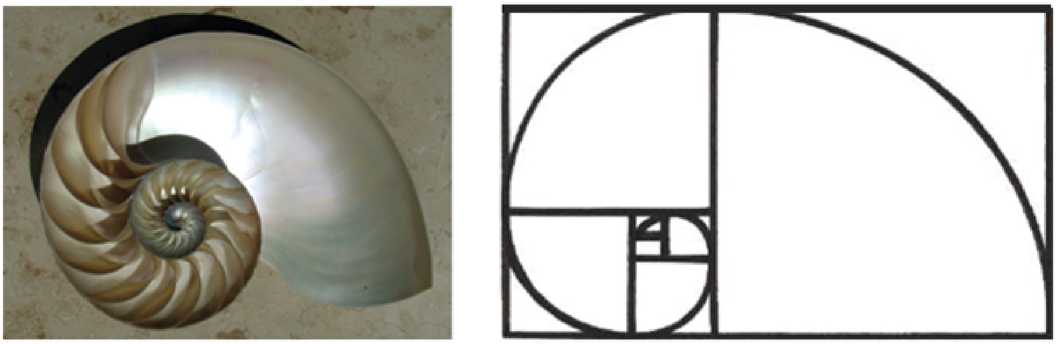



A növények szárán az egymást követő levelek elfordulása (a phyllotaxis) többnyire Fibonacci számok arányában osztja a teljes kört. (Ez az arány például szilfa és hárs esetén 1/2; bükknél, mogyorónál és szedernél 1/3; tölgynél, almánál, cseresznyénél és meggynél 2/5; nyárfánál, rózsánál és barackfánál 3/8, fűzfánál és mandulafánál 5/13).

Fibonacci számok szerint rendeződnek spirálokba például a fenyőtoboz és az ananász pikkelyei, a napraforgó magjai, a málna szemei, a karfiol rózsái és egyes kaktuszok tüskéi.



A Fibonacci-spirál egy olyan logaritmikus spirál, ami egy negyedfordulat alatt nő az aranymetszés arányával, közelíthető az arany téglalap segítségével. A nautiluszok háza is hasonlít a Fibonacci-spirálhoz, de nem egy negyed, hanem egy teljes kör alatt nő meg a sugár az aranymetszés arányával.



Nautilusz és a Fibonacci spirál (https://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-számok)

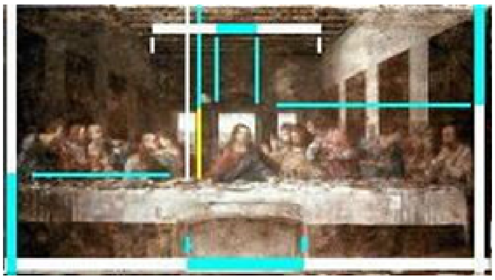
A Fibonacci-sorozatnak fontos szerepe van például Dan Brown „A da Vinci-kód” című művében és Darren Aronofsky „π” című filmjében, Esterházy Péter „Harminchárom változat Haydn-koponyára” című színdarabjában.

Bartók Béla több zeneművében az egyes zenei gondolatok ütemsorrendjét a Fibonacci-szám hosszúságú szakaszok fölhasználásával tagolta (Lendvai, 1975).

A Fibonacci-sorozat számos szép tulajdonságának felfedezésében segít az internet és szakköri füzetek (Török, 1984, Gerőcs, 1998), népszerűsítő matematikakönyvek (Rényi, 2004).

Az aranymetszés számos képzőművészeti alkotáson megfigyelhető.

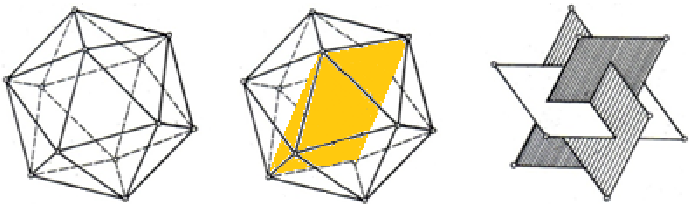
Az athéni Parthenón



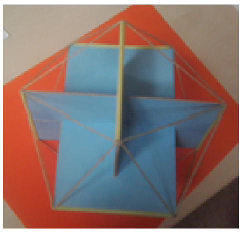
Leonardo da Vinci: Az utolsó vacsora

Aranytéglalap az ikozaéderben

A szabályos ötszög átlóinak hossza az oldal hosszának Φ-szerese (Φ az aranymetszés aránya), ezért az ikozaéder egy éle az ikozaéder középpontjára szimmetrikus párjával egy úgynevezett „aranytéglalapot” határoz meg.



Ennek köszönhetően bármely ikozaéder 12 csúcsa három aranytéglalapot határoz meg, melyek páronként merőlegesek egymásra.



Iskolában is könnyen elkészíthető a modell három olyan téglalapból, amelyek nagyjából aranytéglalapok. Ilyenek például a képeslapok.

Ollóval be kell vágni őket, hogy a három papírlapot összedughassuk, majd esetleg tűvel és vastagabb cérnával „rávarrhatjuk” az ikozaédert a modellre.

Érdemes rámutatni az aranymetszés és a Fibonacci-sorozat kapcsolataira, például hogy a Fibonacci-sorozat hányados-sorozatának határértéke éppen az aranymetszés aránya.

II.4.2. Titkosírás és titkosítás

Egy üzenet akkor titkosított, ha olyan formátumú, hogy a címzett megérti, illetéktelen meg hiába olvassa el. Legnagyobb szerepet a mai életben a személyes, banki, kutatási, katonai adatok megőrzésében, illetéktelenek előtti elrejtésében játszik. A rejtjelezett szöveg előállítása és a megfejtése izgalmas feladat.

Vegyünk egy üzenetet, amelyet titkosítani szeretnénk: A SIKER TITKA A CSALÁD

A	S	K	R	T	T	A	C	A	Á
	I	E		I	K	A	S	L	D

• Ha az ókorban élnénk, akkor megpróbálnánk elrejteni ezt az üzenetet, palatáblán lefednénk viasszal, a küldönc kopasz fejbőrére írnánk az üzenetet és megvárnánk, míg újra visszanő a haja, vagy láthatatlan tintát használnánk.

• Ha ókori görögök lennénk, akkor csak a betűk pozícióját rendeznénk át valamilyen szabály szerint. Például anagrammát készítenénk, a betűket véletlenszerűen kevernénk össze, de ennek az hátránya, hogy minél több a betű annál kevésbé lehet rájönni az eredeti üzenetre.

• Választhatjuk a fésűs módszert, azaz írhatjuk az üzenet egymást követő betűit 2 vagy több sorba, majd az így kapott sorokat egymás után írjuk:

A titkosított üzenet: ASKRTTACAÁ IE IKASLD.

• Lényegében így működött az első ismert katonai rejtjelező módszer is. Egy szalagot felcsavartak egy szabályos sokszögalapú hasábra, pálcára, majd a pálca tengelyének irányában felírták a szöveget. Letekerték a szalagot, ezen a szöveg értelmetlen volt. A címzett újra feltekerte egy ugyanolyan átmérőjű rúdra és elolvasta.

Próbáljátok ki a mi szövegünkkel és egy hatszögletű ceruzával!

Nekem 4 tekerésre volt elég a szalagom. Ha nem letekerném, hanem felvágnám és kiteríteném, akkor a következő elrendezést kapnám:

A	K	I		S	D
	E	T	A	A	
S	R	K		L	
I	T	A	C	Á	

Letekerve pedig a szöveg:

A	K	I		S	D		E	T	A	A		S	R	K		L		I	T	A	C	Á	

Ceruza és szalag nélkül: Függőlegesen írunk a 4 soros és 6 oszlopos táblázatba és kitöltés után vízszintesen olvassuk.

• Ha az első évezredben élnénk, akkor a behelyettesítéses módszert alkalmaznánk. Betűk megfeleltetése legyen például:

A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U
Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	X	Y	Z		A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I

A behelyettesítés utáni szöveg: ÖÓGŰYSFÓHŰHYÓQGÖZŐR.

• Ha sötétben, égő fáklyával akarnánk továbbítani az üzenetet, akkor például a négyzet módszert használhatnánk. Ehhez az ábécé (mondjuk 36) betűjét elhelyeznénk egy 6×6-os négyzetben és betű helyett a táblázatbeli helyét továbbítanánk.

A kódtábla:

A	Á	B	C	D	E
É	F	G	H	I	Í
J	K	L	M	N	O
Ó	Ö	Ő	P	Q	R
S	T	U	Ú	Ü	Ű
V	W	X	Y	Z	

Az üzenet: A siker titka a család

A kódolt szöveg:

1-1 6-6 5-1 2-5 3-2 1-6 1-4 6-6 5-2 2-5 5-2 3-2 1-1 1-4 5-1 6-6 1-1 6-6 3-35-1 1-1 3-3 1-2 1-5

• A Julius Caesar idejében a Caesar-rejtjelezést használhattuk volna. Az eljárás lényege az, hogy minden betűt egy másik betűvel helyettesítünk, mégpedig úgy, hogy ha az n. betű kódja az m. betű, akkor az $(n+1)$. betű kódja az $(m+1)$. betű, ahol az összeadás az ábécé elemszáma szerinti maradékosztályos összeadás. Ebben az esetben a kulcs az A betű kódjának ismeretében kiszámolható. Hátrány az, hogy annyi féle kódábécé lehetséges, ahány betűből áll az ábécé. Ha valaki sejti, hogy ezzel a módszerrel lett kódolva az üzenet, akkor legfeljebb az összes kódábécé rápróbálásával megfejtheti azt. Caesar három hellyel tolta el a saját 25 betűs ábécéjét. Például:

Nyílt ABC	a	b	c	d	e	f	...	u	v	w	x	y	z
Kód ABC	D	E	F	G	H	I	...	X	Y	Z	A	B	C

Az üzenet: caesar

A kódolt szöveg: FDHVDU

Kulcsszavas Caesar titkosítás ugyanazon az elven alapul, mint az előző Caesar módszer, csak itt van egy kulcsszavunk, és azzal toljuk el az ábécét, a kulcsszó az ábécé elejére kerül. A kulcsszó választásánál arra kell ügyelnünk, hogy olyan szót válasszunk, amely különböző betűkből áll.

XIV. Lajos legtitkosabb üzeneteit az úgynevezett grand chiffre eljárással kódolták. Magát a rendszert Antoine és Bonaventure Rossignol dolgozta ki 1650 körül. A kód 587 féle számot tartalmazott, amelyek betűket, szótagokat jelöltek, sőt voltak olyan jelölések is, amelyekkel a kódfejtőket akarták megzavarni. (Pl. olyan jel használata, hogy az előtte lévő számot törölje.) A kódot csak kétszáz év után sikerült Étien Bazeries őrnagynak feltörnie három évig tartó kemény munkával.

Érdekes titkosítási eljárásról olvashatunk Jules Verne Sándor Mátyás című regényében is.

Az Újkorban a titkosítás legjelentősebb felhasználása a világháborúk idején volt. Ebben az időszakban megkezdődött a titkosító gépek gyártása. Leghíresebb példája a németek által alkalmazott Enigma. Az előállított kódot a németek megfejthetetlenek tartották. Ez tévesnek bizonyult, hiszen az angoloknak sikerült feltörnie ezt a kódot.

Enigma

Forrás: http://www.colossus-computer.com/sample.htm

A matematika és az informatika óriási lendülettel fejlődött a titkosítási szakemberek közötti versenynek köszönhetően. Megjelentek a nagy teljesítményű számítógépek. Ezek segítségével bonyolultabb, a hagyományos módszerek segítségével megfejthetetlen kódokat lehet előállítani. Napjainkban leggyakrabban az RSA-eljárást használják, amelyet Ron Rivest, Adi Shamir és Len Adleman fejlesztett ki 1976-ban, és amelynek az elnevezése a fejlesztők nevének kezdőbetűiből keletkezett. Az eljárás elméleti alapjait az osztási maradékok és a prímszámok elmélete adják.

Az RSA-titkosításhoz egy nyílt és egy titkos kulcs tartozik. A nyílt kulcs mindenki számára ismert, s ennek segítségével kódolhatják mások nekünk szánt üzeneteiket. A nyílt kulccsal kódolt üzentet csak a titkos kulccsal tudjuk „megfejteni”. Az RSA-eljáráshoz a következő módon generáljuk a kulcsokat:

Véletlenszerűen válasszunk két nagy prímet, p-t és q-t.

Kiszámoljuk az $N = pq$ szorzatot, amely a nyilvános és a titkos kulcsnak is modulusa lesz.

Kiszámoljuk ki az Euler-féle φ függvény értékét N-re: $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$.

Választunk egy $\varphi(N)$-hez relatív prím 1 és $\varphi(N)$ közötti e számot.

Az e számot nyilvánosságra hozzuk mint a nyilvános kulcs kitevője.

Meghatározzuk azt a d számot, amelynek e-szerese $\varphi(N)$-nel osztva 1 maradékot ad, azaz

$$de = 1 + k\varphi(N)$$

valamely pozitív egész k számra.

A **nyilvános kulcs** az N modulusból és az e kitevőből áll.

A **titkos kulcs** az N modulusból és az d kitevőből áll.

Az N szám bináris alakban írt bitjeinek a száma adja a rejtjelező kód hosszúságát, ami a gyakorlatban általában 512, 1024, 2048 szokott lenni. Azért fontos, hogy e és $\varphi(N)$ relatív prím legyen, mert ez biztosítja, hogy a

$$da = 1 + k\varphi(N)$$

egyenletnek legyen megoldása, s azt könnyen meg is kaphatjuk az euklideszi algoritmus segítségével.

Az RSA kódolás menete

Választunk két prímszámot, $p = 61$ és $q = 53$.

Kiszámítjuk a pq szorzatot, $N = 52 \cdot 61 = 3233$.

Kiszámítjuk $\varphi(N)$ értékét, $\varphi(N) = (p-1)(q-1) = 3120$.

Választunk egy olyan 1 és $\varphi(N)$ közötti e számot, amely relatív prím $\varphi(N)$-hez, $e = 17$.

Kiszámítjuk d-t úgy, hogy a de szorzat $\varphi(N)$-nel osztva 1 maradékot adjon.

$17 \cdot 2753 = 46\,801 = (15 \cdot 3120) + 1$, tehát $d = 2753$.

A nyilvános kulcs $N = 3233$ és $e = 17$.

Egy ASCII-ba átkódolt m üzenet titkosított c formája az m^e hatvány N szerinti maradéka. c az m^{17} szám 3233 szerinti maradéka.

A titkos kulcs $N = 3233$ és $d = 2753$.

A dekódoló eljárás: m a c^d hatvány N szerinti maradéka. m a c^{2753} szám 3233 szerinti maradéka.

Példa RSA kódolásra

Az $m = 123$ üzenet rejtjelezett c titkosított változata a 123^{17} hatvány 3233-mal való osztási maradéka: $c = 855$.

Visszafejtjük a $c = 855$ kódolt üzenetet. Az m üzenet a 855^{2753} hatvány 3233-mal való osztási maradéka: $m = 123$.

Ezek a számítások az ismételt négyzetre emeléses hatványozás segítségével végezhető el.

Megjegyzés:

A jelentős biztonsághoz 10^{308} nagyságrendű prímek kellenek Martin Gardner 1977-ben tűzte ki feladatként a következő szám prímtényezős felbontását (mert ezzel dekódolhatóvá válik egy üzenetet):

114 381 625 757 888 867 669 235 779 976 146 612 010 218 296 721 242 362 562 561 842 935 245 733 897 830 597 123 563 958 705 058 989 075 147 599 290 026 879 543 541

Egy hatszáz önkéntesből álló csoport 1994-ben találta meg a megoldást.

III. fejezet

Tanórán kívüli foglalkozások és azok matematikai kapcsolódása

Számtalan alkalom adódik a tanulókkal való tanórán kívüli találkozásra az iskolán belül az iskolai élet mindennapjaihoz és az ünnepnapokhoz kapcsolódva: például udvari séták, sport- és egyéb versenyek, teremdíszítés, ünnepélyekre való felkészülés, klubdélután, vetélkedők, ballagás, szalagavató stb.

Iskolán kívüli programok jelentős része helyi kimozdulás: például tárlatlátogatás, nyílt napok (középiskolában vagy egyetemen), Múzeumok éjszakája rendezvény, színház, mozi, hangverseny, részvétel valamilyen külső szervezésű szakmai programon (pl. a „Játéktól a kutatásig” vagy a Műegyetem nyári egyeteme gyerekeknek).

Komolyabb odafigyelést igényelnek és egyben több lehetőséget is jelentenek a tanulmányi vagy egyéb (magánszervezésű) kirándulások, városnézések vagy túrák a „természetben”, esetleg külföldi utak. A helyszíntől, az életkortól és összeszokottságtól is függ, hogy mikor milyen típusú és mennyire szoros felügyelet kell.

Ha egy matematikatanár a tanórán kívüli programokhoz kísérőként vagy szervezőként csatlakozik, akkor elsősorban a kapcsolatépítés, a tanulók jobb megismerése a cél. Emellett (mértéktartóan) rámutathat, hogy a matematika milyen sok helyen fedezhető fel, mennyi kérdésre adhat választ. A felkészülés közben és a helyszínen is adhatunk megfigyelési szempontokat, de érdemes hagyni a gyerekeket, hogy szabadon fedezzék fel, amit tudnak, majd alkalomadtán megbeszélni a tapasztalatokat és azok esetleges matematikai tanulságait.

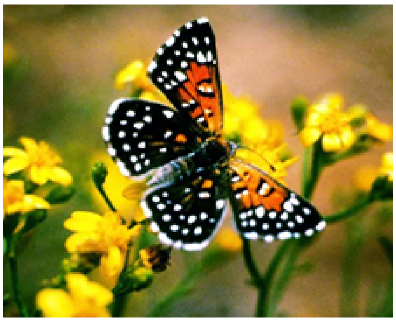
A szimmetria például közös fogalom a természettudományban, a művészetben és a technikában. Érdemes keresni a természetben és az épített környezetben, díszítőművészetben és a kézművességben többféle módon szimmetrikus alakzatokat.

Például a Hősök terén sétálva kérhetjük, hogy figyeljék meg a tér szimmetriáját és a kövezet mintázatát. Követi-e a kövezet mintázata a tér szimmetriáját?

A Millenniumi emlékmű a Hősök terén, Petr Šmerkl, Wikipedia

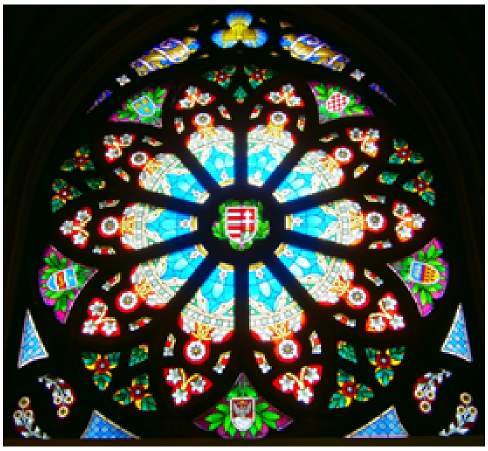
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heroes_Square_Budapest_2010_01.jpg

Néhány példa szimmetrikus alakzatokra, amelyekhez hasonlókat a tanulók is kereshetnek:

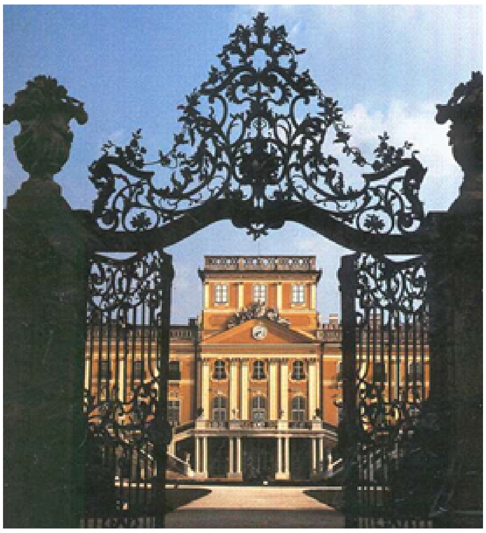


http://www.elhetoelet.hu/pillang%C3%B3

http://www.drflora.hu/wp-content/uploads/2012/05/Napraforgo_Helianthus_annuus08.jpg



Festett üvegablak, Mezőgazdasági Múzeum Budapest, Városliget



Fertőd, Esterházy-kastély udvari homlokzat és kovácsoltvas díszkapu Ezer év mesterművei. Corvina, Budapest, 1987, 235. kép. Fotó: Szelényi Károly

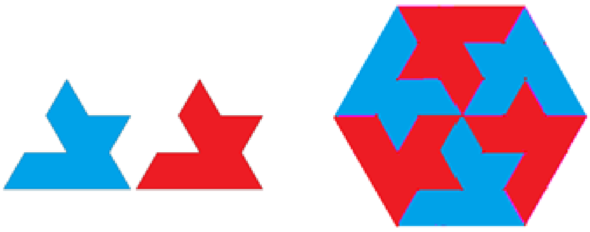
Honfoglalás kori tarsolylemez a Volga-Ural vidékről, Bérczi Szaniszló: Honfoglalás kori művészet. TARSOLY.JPG

http://vilagbiztonsag.hu/keptar/albums/userpics/11255/

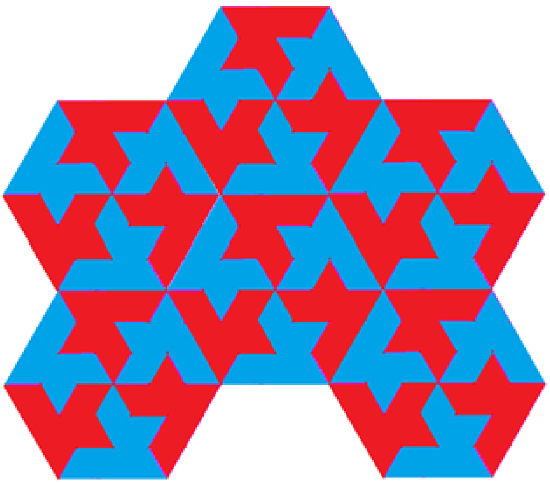
szarvasos_parna_ujfalun.jpg

A tanulók maguk is készíthetnek egyszerű eszközökkel szimmetrikus alakzatokat.

Kiindulhatunk például egy szabályos háromszögből, amelynek a szimmetriáját elrontottuk, és két színes papírra nyomtatva sokat adunk a tanulóknak belőle. (Ők vágják ki.)



Készíthetnek szalag- és egyéb mintákat. Ha például megtalálják a szabályos hatszög kitöltését, akkor felfedezhetik, hogy ilyen módon az egész sík is kirakható.



Hasonlóan kísérletezhetnek különféle alakzatokkal, elrontott négyzetekkel, és általában síkkitöltő (fundamentális) tartományokkal. Készíthetnek esztétikus mozaikokat, és elemezhetnek (akár számítógép segítségével) művészeti alkotásokat, például Escher tapétamintáit.

A képek forrása: http://blog.signalnoise.com/wp-content/uploads/2009/05/i_escher1.jpg, illetve http://wallpoper.com/images/00/34/00/42/patterns-gecko_00340042.jpg

III.1. Versenyek és versenyeztetés

A tehetség megtalálása és gondozása száz évesnél is régebbi hagyományokon nyugszik. Tudósok és kiváló tanáregyéniségek sora tevékenykedett és tevékenykedik ezen a területen.

1894-ben két fontos esemény is történt, ami a mai napig meghatározó hatással van a tehetséggondozásra. Az egyik esemény, hogy Arany Dániel Arany Dániel (1863–1944) matematikatanár és matematikus megalapította a Középiskolai Matematikai Lapokat (KöMaL), amely azóta is működik, ma már fizika és informatika rovattal kibővülve interneten is elérhető: www.komal.hu. A másik fontos esemény, hogy elindult az Eötvös-verseny azon hallgatók számára, akik éppen befejezték a középiskolát. Ezt a versenyt ma is évente megrendezik, most Kürschák-verseny néven. A KöMaL és a Kürschák-verseny jól kiegészíti egymást, és nagyban hozzájárult több későbbi kiváló matematikus fejlesztéséhez. Az eredményes versenyzők között jól ismert, kiváló matematikusok, fizikusok, filozófusok nevét találhatjuk (pl. Fejér Lipót, Kármán Tódor, König Dénes, Riesz Frigyes, Riesz Marcel, Haar Alfréd, Szegő Gábor, Tisza László, Kalmár László, Hajós György, Turán Pál, Lakatos Imre, Erdős Pál, Teller Ede, Pólya György stb.).

Érdemes bíztatni a tanulókat, hogy egy-egy híres személy életének és munkásságának nézzenek utána az interneten, és meséljék el vagy mutassák be egymásnak, amit megtudtak.

A Kürschák-versenyen kívül persze ma már nagyon sok országos, illetve helyi matematikai verseny létezik. A legtöbb országban az országos versenyek a nemzetközi versenyekhez kapcsolódva jöttek létre. Például az országos versenyeken elért eredményeire támaszkodva állítják össze a csapatot a Nemzetközi Matematikai Olimpiára. Magyarországon a nemzeti versenyek korábban jelentek meg, mint a nemzetköziek, és az olimpiai csapat toborzásának időpontjában még nem állnak rendelkezésre az országos versenyek eredményei. Az is magyar jellegzetesség, hogy viszonylag fiatal korban indul a versenyeztetés, már 3. osztályosok is részt vehetnek a Kalmár László Versenyen. A 2010-es megyei döntő egyik nekik szóló feladata:

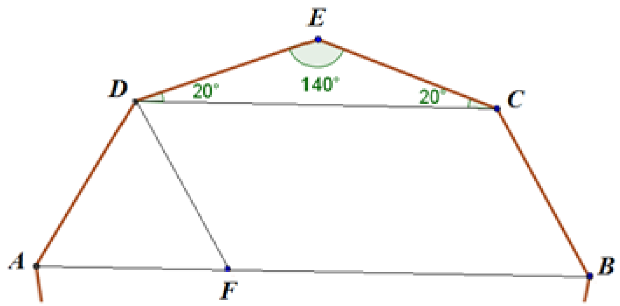
A matematikát kedvelő Bence kapott 14 piros almát. Azon gondolkodik, hogy hányféleképpen lehet három tányérra szétrakni úgy, hogy mind a három tányéron különböző számú alma legyen. Segíts Bencének! Írd le az összes megoldást!

(Két megoldás nem különbözik, ha csak a tányérok sorrendje más.)

12-13-14 évesek számára központilag szervezett, háromfordulós országos verseny a Varga Tamás verseny. Ízelítőként egy geometria feladatot mutatunk 2008-ból a megyei szintű versenyből megoldással és pontozási javaslattal együtt.

Feladat: Mutassuk meg, hogy a szabályos 9-szög leghosszabb és legrövidebb átlója hosszának különbsége egyenlő a szabályos 9-szög oldalának hosszával!

Megoldás: (12 pontot osztunk szét.)



A szabályos 9-szög szögei 140°-osak (a szögösszegre vonatkozó képletéből).	2 pont
A legrövidebb átló és két oldal így egy olyan egyenlőszárú háromszöget határoz meg, amelyben az alapon fekvő szögek 20°-osak. $ABCD$ a sokszög szimmetriája miatt egy húrtrapéz. AB az egyik a leghosszabb átlók közül, CD pedig az egyike a legrövidebb átlóknak.	2 pont
D-n át párhuzamost húztunk a BC oldallal, az AB-vel alkotott metszéspont F. A $BCDF$ sokszög paralelogramma, ezért $DF = BC$.	2 pont
A $BCDF$ paralelogramma C-nél levő szöge $140° - 20° = 120°$,	2 pont
tehát az F csúcsnál is annyi van. Az ADF háromszögről tudjuk, hogy $AD = DF$ és F-nél 60° van, tehát szabályos.	2 pont
A két átló AF különbsége tehát ugyanolyan hosszú, mint a sokszög AD oldala.	2 pont

A középiskolák számára is szerveznek több helyi, regionális vagy országos versenyeket. Az Arany Dániel verseny 15–16 éves tanulóknak szól, két korcsoportban és iskolatípus szerint három kategóriában rendezik. Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny a 17–18 éves diákoknak szól, három kategóriában rendezik. Említendő még a 15–18 éveseknek szóló Kenguru Teszt Verseny, a Franciaországból elterjedt Matematika határok nélkül, a csapatverseny és a Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, amely magyar nemzetiségű, különböző országokban élő diákoknak szól.

A verseny csak lezárása annak az előkészítő munkának, amely a szakkörökön, táborokban, levelezéssel folyik. A foglalkozásokon a szakmai fejlődésen túl egymást is megismerik.

Nézzen utána, hogy még milyen versenyek vannak, tanítványai mely versenyekben érintettek, és ezekkel kapcsolatban mik a teendőik!

III.2. Tanulószoba, korrepetálás, szakkör

Napközis vagy tanulószobás nem mindig jószántából lesz egy tanuló. Van, aki csak az ebéd miatt napközis, mégis általában benn kell maradnia egész délután és több-kevesebb hasznos tevékenységgel tölti az időt. A felügyelő tanárnak fontos feladata a tanulási szokások kialakítása, jó munkalégkör teremtése, a tanulók idejének ésszerű beosztása mellett az is, hogy a tanulók maguk is képesekké váljanak erre. Mindez egyéni bánásmódot igényel, és gyakran a szülőkkel is egyeztetni kell.

Ha a felügyelő tanár éppen matematika szakos, az nem jelentheti, hogy csak matematikából készül házi feladat. Jó, ha a felügyelő tanár és a szaktanárok „összebeszélnek”, hogy a segítség ne ütközzön a szaktanár szándékaival.

A matematikára szánt időben persze lehet korrepetálni, és a leckék elkészítése után matematikai játékokkal szórakoztathatjuk a tanulókat. Adhatunk olvasnivalót, vetíthetünk filmet, és mindez egyénileg, párban vagy kiscsoportosan is történhet.

A matematika szakkört és korrepetálást is egyeztetni kell a napközi, illetve tanulószoba időbeosztásával. A cél, hogy a diákok a jól végzett munka érzésével menjenek haza és ne otthon kelljen fáradtan házi feladatot írni.

A korrepetálások során fontos feladat a tanulók érdeklődésének felkeltése, önbizalmának növelése. Kiváló alkalom az „Én ezt úgysem tudom megcsinálni, semmit sem értek.” és a „Mire jó mindez?” típusú reakciók egyénre szabott megbeszélésére. Ezekre persze készülni kell az adott témához igazodva. Nem érdemes (pláne többször, ugyanazokkal a szavakkal) elmagyarázni az anyagot. Inkább kérdésekkel igyekezzünk kideríteni, hogy hol vannak a megértést akadályozó gátak. (Akár hihetetlen mélyre is visszalépve, például szükség lehet még érettségire készülve is visszanyúlni a közös nevezőre hozásig.) Sokat segítenek a témához és a diákhoz közelálló gyakorlati kérdések (amelyek megtalálása a tanári mesterség része). Alkalmanként rejtvények, játékok beiktatásával indíthatjuk el a közös tevékenységet és gondolkodást. Használjunk (esetleg alkalmi) eszközt, oldjuk merev szereposztást, próbáljuk több oldalról megközelíteni ugyanazt a tartalmat. Az egy „értetlen gubanc” állapotból úgy kerülhet ki a diák, ha maga is megpróbálja megkeresni, hogy hol akadt el. A tanárnak az is informatív, ha a diák kérdez. A pozitív élmény jobban köti a diákot az adott tevékenységhez, mint a sikertelenségtől való félelem. Nem érdemes ezeknek a beszélgetéseknek sem dorgáló, sem számonkérő hangulatot adni, hiszen azt akarjuk elérni, hogy felismerje a diák, hogy segítségre van szüksége, és tudjon, akarjon tőlünk segítséget elfogadni. A tanulást azzal segítjük legjobban, ha belátja a diák, hogy az ő érdeke, felelőssége és dolga a feladatok teljesítése, de mi tudunk és akarunk ebben segíteni neki.

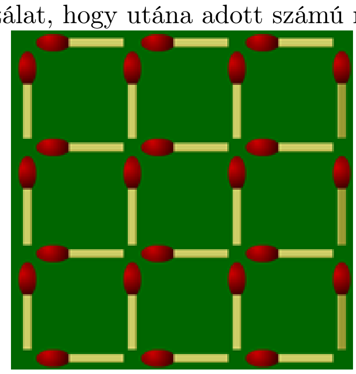
Az adott pillanatban effektívnek tűnik a házi feladat megoldásában adott „szorozd be, vond ki” lépésről lépésre adott segítség, mert elkészül a lecke, de ez a legkevésbé hatékony segítség. Ha az órán nem értette meg, hogy miért kell beszorozni, kivonni, akkor legközelebb is csak a bennfentesek mágiája lesz számára.

A párbeszéd indításához használhatunk konkrét eszközöket (pl. korongot, gyufaszálakat, . . .), képeket (kártyákat, fotókat, rajzokat, . . .) vagy elektronikus segédeszközt (okostelefont, táblagépet, számítógépet, aktív táblát).

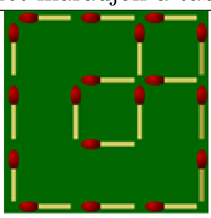
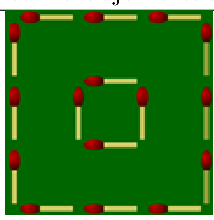
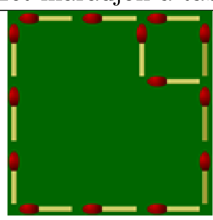
III.2.1. Gyufarejtvények

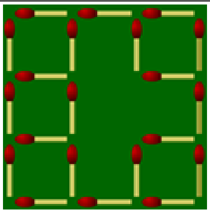
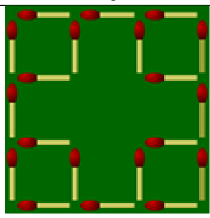
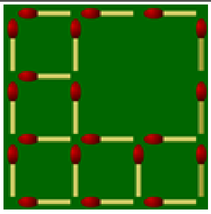
A következő feladványokat néhány gyufával, fogpiszkálóval, négyzethálós papíron, de programmal (http://www.sheppardsoftware.com/braingames/matchsticks/matchsticks.htm) is lehet játszani.

A tábláról vegyél el valahány gyufaszálat, hogy utána adott számú négyzet legyen látható a képen.



Néhány konkrét feladvány és egy-egy lehetséges megoldásuk:

6 gyufát kell elvenni, hogy 3 négyzet maradjon a táblán	8 gyufát kell elvenni, hogy 2 négyzet maradjon a táblán	10 gyufát kell elvenni, hogy 2 négyzet maradjon a táblán
		

3 gyufát kell elvenni, hogy 6 négyzet maradjon a táblán	4 gyufát kell elvenni, hogy 5 négyzet maradjon a táblán	4 gyufát kell elvenni, hogy 7 négyzet maradjon a táblán
		

Kereshetünk más megoldást ugyanarra a feladványra, megfordíthatjuk a szabályt, a felhasználható gyufák és a kirajzolandó négyzetek számát adjuk meg.

Egyfelől elindul egy kommunikáció köztünk, másfelől számos, a matematikatanuláshoz is nélkülözhetetlen kompetencia (figyelem, nézőpontváltás, ötletesség, kreativitás, . . .) fejlődhet.

Matematika szakkörre általában a matematika iránt érdeklődő tanulók jelentkeznek, de nagy különbség lehet közöttük akár a tudásukat, akár a képességeiket illetően. A szakkörön nem kell számolni sok olyan kötelezettséggel, amelyeket a tantervi óráknál figyelembe kell venni (kötelező tananyag, tanmenet, számonkérés stb.). A szakkörön oldottabb légkörben igazodhatunk a tanulók érdeklődéséhez. Érinthetünk a tananyagban nem (vagy alig) szereplő témákat, differenciáltan foglalkozhatunk az egyes tanulókkal, párokkal, kiscsoportokkal. Adhatunk hosszabb távra szóló kutatási feladatot, felkészíthetjük őket a versenyekre.

Legyünk bátrak a témaválasztáskor! Sok dologról azt gondolnánk, hogy ez aztán nem való gyerekeknek, pedig például a mátrixokról már az általános iskolásoknak szánt szakköri füzet is készült (Sztrókayné, 1968). A középiskolai szakköri füzetek között pedig sok más érdekes téma mellett olyanok is megtalálhatók, mint Hálóelmélet (Szász Gábor 1978), Játékelmélet (Filep László 1985), Katasztrófaelmélet (Arnold, V. I., 1987), A végtelen kutatása (Vilenkin, N. Ja.,1988), Topológia (Szederkényi Antal 1977), Projektív geometria (Vigassy Lajos 1970), Csoportelmélet (Gyapjas Ferenc 1973).

III.2.2. Geometria és topológia az abc-ben (kicsiknek)

Melyek azok a nyomtatott magyar ábécé nagybetűi között, amelyek

• középpontosan szimmetrikusak?

• tengelyesen szimmetrikusak?

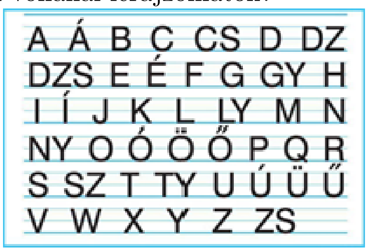
• nem tartalmaznak hurkot?

• nem tartalmaznak elágazást?

• amelyek több elágazást tartalmaznak?

• vágás és csomózás nélkül egymásba alakíthatók?

• a ceruza felemelése nélkül, egyetlen vonallal lerajzolhatók?

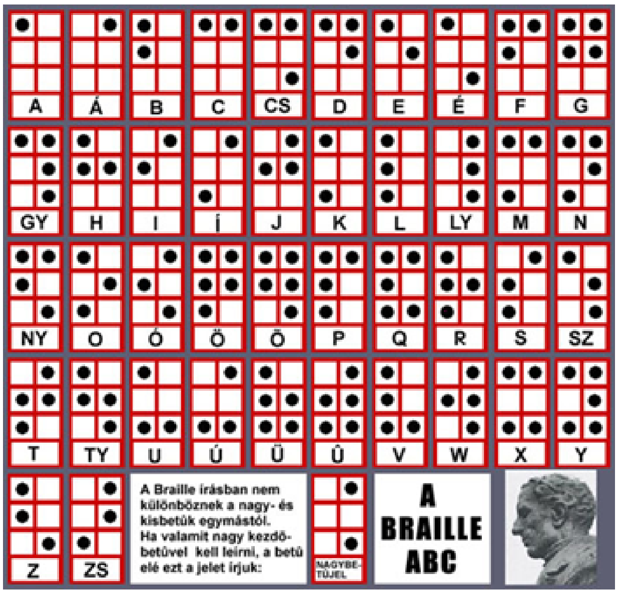


Keress a Braille ábécében olyan jeleket, amelyek

• önmagukban tengelyesen szimmetrikusak (hány szimmetriatengelyük van?),

• önmagukban középpontosan szimmetrikusak,

- egymás tengelyes tükörképei,
- egymás középpontos tükörképei,
- egymás elforgatottjai.



A kép forrása: http://www.mvgyosz.hu/braille-ábécé

III.2.3. Mátrixok (kicsiknek és kicsit nagyobbaknak)

Egy szakkör, szakmai nap, szaktábor emlékezetessé tehető egy-egy, a „magasabb matematika” körébe sorolt témakör alapjainak irányított felfedeztetésével.

Sztrókay (1988) általános iskolásoknak szóló szakköri füzetében a mátrixok bevezetésétől egyfajta titkosításon át számos érdekes alkalmazásról (pl. gráfok szomszédossági mátrixa, lineáris leképezések) olvashatunk.

1. Ki mennyire tartja be a fogyókúrát?

A táblázatban négy gyerek ebéd és vacsora közötti „torkoskodását” jegyeztük fel:

	tejcsoki	fagylalt	őszibarack	Coca-Cola	zsemle
Kati	1	0	2	1	0
Andris	2	1	0	1	1
Réka	0	1	2	0	1
Tamás	1	0	1	1	0

Tudjuk, hogy ezek kalóriaértéke kilokalóriában

1 tábla tejcsokoládé	554
fagylalt	160
őszibarack	40
Coca-Cola	84
zsemle	147

Ki hány kalóriát fogyasztott?

Rendezetten felírjuk a fogyasztási adatokat és mellé a kalóriaértékeket: fogyasztás: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, kilokalória: $\begin{pmatrix} 554 \\ 160 \\ 40 \\ 84 \\ 147 \end{pmatrix}$, és kiszámítjuk a kalória-bevitelt:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 554 + 0 \cdot 160 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 84 + 0 \cdot 147 \\ 2 \cdot 554 + 1 \cdot 160 + 0 \cdot 40 + 1 \cdot 84 + 1 \cdot 147 \\ 0 \cdot 554 + 1 \cdot 160 + 2 \cdot 40 + 0 \cdot 84 + 1 \cdot 147 \\ 1 \cdot 554 + 0 \cdot 160 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 84 + 0 \cdot 147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 718 \\ 1499 \\ 387 \\ 678 \end{pmatrix}$$

Az eredmény a kapott oszlopvektorban látható: legtorkosabb Andris volt, a legfegyelmezettebb Réka.

Több hasonló példa által megvilágíthatjuk, tudatosíthatjuk és begyakorolhatjuk a sor-oszlop szorzás szabályát. Fontos észrevétel, hogy ugyanannyi elem (ugyanannyi féle élelmiszer) szerepel a táblázat soraiban, mint a kalóriaértékeket tartalmazó oszlopban.

Ha valaki nem a személyek fogyasztását, hanem az élelmiszereket írja a táblázat soraiba, akkor a következő táblázatot kapjuk:

	Kati	Andris	Réka	Tamás
tejcsoki	1	2	0	1
fagylalt	0	1	1	0
őszibarack	2	0	2	1
Coca-Cola	1	1	0	1
zsemle	0	1	1	0

Ismét felírjuk a fogyasztási adatokat és mellé a kalóriaértékeket: fogyasztás: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, kilokalória: $\begin{pmatrix} 554 \\ 160 \\ 40 \\ 84 \\ 147 \end{pmatrix}$, és kiszámítanánk a kalória-bevitelt, de nem működik az előbbi sor-oszlop szorzás.

Átírjuk a kalóriaértékek táblázatát sor alakba: $\begin{pmatrix} 554 & 160 & 40 & 84 & 147 \end{pmatrix}$, és balról szorzunk sor-oszlop módszerrel (mini számokkal, sorban, a felesleges tagokat és tényezőket kihagyva):

$$\begin{pmatrix} 554 + 40 \cdot 2 + 84 & 554 \cdot 2 + 160 + 84 + 147 & 160 + 40 \cdot 2 + 147 & 554 + 40 + 84 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 718 & 1499 & 387 & 678 \end{pmatrix}$$

alakban megkaptuk Kati, Andris, Réka és Tamás kalória-bevitelét, ami persze az egyes személyek esetén ugyanannyi, mint az előző módszerrel kiszámolt érték.

Fontos észrevétel, hogy ugyanannyi elem (ugyanannyi kalóriaadat) szerepel a táblázat egyetlen sorában, mint ahány élelmiszerfajta az egyes személyek fogyasztását tartalmazó oszlopokban (5 féle). Ismét sor-oszlop szorzást végeztünk, de a végeredmény, az egyes személyek energia-bevitele egy egyetlen sorból és négy oszlopból álló táblázatban jelent meg (sorvektor).

2. Tudunk mátrixot szorozni, de mit jelent a szorzat?

Egy osztály tanulói közül két gyerek családjában volt csak 1-1 fiú, 2 gyerek családjában volt 2 fiú, 5 gyerek családjában volt egy fiú és egy lány stb. Az adatokat a következő mátrix tartalmazza:

$$\begin{array}{cc} & \text{Fiúk száma} \\ & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{Lányok száma} \begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

• Szorozzuk meg ezt a mátrixot balról az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}$ sorvektorral! Eredményül egy sorvektort kapunk. Mit jelentenek a kapott számok? Mit jelent az összegük?

A kapott $\begin{pmatrix} 6 & 13 & 8 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eredmény azt jelenti, hogy az osztály 6 tanulójának a családjában nincs fiú, 13 családban 1 fiú van, 8-ban 2, 3-ban 3, nincs olyan tanuló, akinek a családjában 4 fiú van, 1 olyan van, akinek a családjában 5 fiú van. Az összeg megadja, hogy hány tanuló van az osztályban, ha feltesszük, hogy nincs olyan család, amelyben 5-nél több lány vagy fiú van. (Teljes esetfelsorolás.)

• Szorozzuk meg a mátrixot jobbról az

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$$

oszlopvektorral! Eredményül egy oszlopvektort kapunk. Mit jelentenek a kapott számok? A kapott

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

eredmény azt jelenti, hogy az osztályban 1 tanulójának a családjában 5, 1 családban 4 lány, 4-ben 3, 8-ban 2, 11-ben 1 lány van, és 6 családban nincs lány. Az összeg megadja, hogy hány tanuló van az osztályban, ha feltesszük, hogy nincs olyan család, amelyben 5-nél több lány vagy fiú van. (Teljes esetfelsorolás.)

• Hogy kell elvégezni és hogyan lehet értelmezni az $\mathbf{u}M\mathbf{v}$ szorzatot?

$$\mathbf{u}M\mathbf{v} = (\mathbf{u}M)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 8 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 31$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk az

$$\mathbf{u}M\mathbf{v} = \mathbf{u}(M\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = 31$$

szorzat számolásakor is, ez éppen az osztálylétszám.

• Hogyan tudjuk meghatározni, hogy az osztályba járó tanulók családjában hány lány van összesen? És hány fiú?

Azt már tudjuk $M\mathbf{v}$ szorzatból, hogy hány családban van 5, 4, 3, 2, 1 és 0 lány. A lányok száma tehát

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 + 4 + 12 + 16 + 11 = 48.$$

Az $\mathbf{u}M$ szorzatból tudjuk, hogy hány családban van 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 fiú. Összesen tehát

$$\begin{pmatrix} 6 & 13 & 8 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 13 + 16 + 9 + 5 = 43$$

fiú van a tanulók családjában.

IV. fejezet

Eszközök, taneszközök

Tapasztalt tanárok tudják, hogy az iskola hatása csak töredéke annak a sok-sok tényezőnek, ami a diákok értékrendjét, viselkedését és tudását meghatározza. Napjainkban nagyon előre került a hatások között a világháló meg a sok-sok elektronikus eszköz. Ha tetszik, ha nem, már az óvodás gyerekek is elkérik a mama okos telefonját, simogatják az érintő képernyőt, a táblagépet. Még olvasni nem tudnak, de ikonok alapján már válogatnak a világháló kínálatából. És ebben a virtuális valóságban olyan fantasztikus dolgokat tudnak megnézni, lejátszani, összerakni, amiket mi külön bemutatón (sem) láthattunk. A pozitív hatások mellett meg kell jegyezni, hogy hátrányai is vannak a túl gyors, túl egyszerűen hozzáférhető, túl sok és sokféle információnak. Semmilyen (akár tapintható) virtuális élmény nem pótolja a fogalomalkotás bázisát, a közvetlen materiális tapasztalást.

Ebben a néhány példában arra összpontosítunk, hogy a matematikai fogalomalkotás melyik szintjén, milyen fázisában alkalmazzuk éppen az adott eszközt. Bruner (1974), Ceglédi (1911), Skemp (1975), Vásárhelyi (2006) írásaival összhangban szeretnénk itt is ösztönözni az észrevétlen vagy tudatos tapasztalatszerzést segítő eszközök, módszerek használatára. A matematikai ismeretek fázisai

- a tapasztalatgyűjtés – manipuláció;
- a fogalmi jegyek kigyűjtése – a tapasztalatok feldolgozása;
- a zajok kiszűrése – diszkrimináció, a fogalom, állítás, eljárás érvényességi körének meghatározása, érvénytelen analógiák kiszűrése;
- az új tapasztalat beépítése az ismeretrendszerbe (a fogalmi háló bővítése, átalakítása).

IV.1. Konkrét manipulatív eszközök

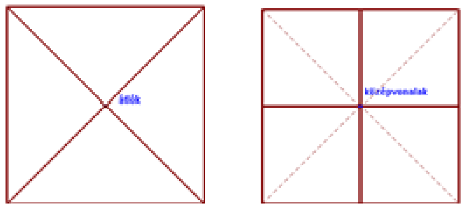
Gyakran nem a gyári, tökéletes eszközöket használjuk legsikeresebben, hanem a helyszínen – esetleg a tanulók által vagy velük együtt – rögtönzötteket. Általában az eszköz egyszerűsége, természetessége kelti fel a tanulók érdeklődését.

IV.1.1. Felfedezések egyetlen papírlappal

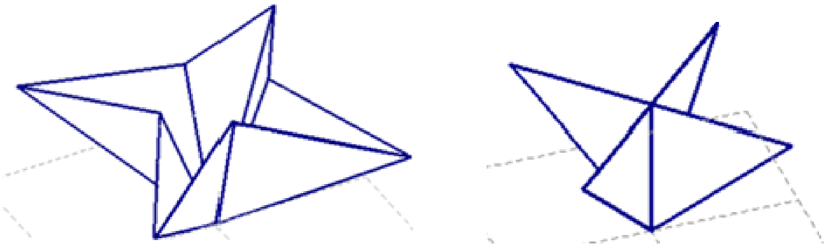
1. Gúla vagy oktaéder?

Egy A4-es lapból letépünk egy négyzetet.

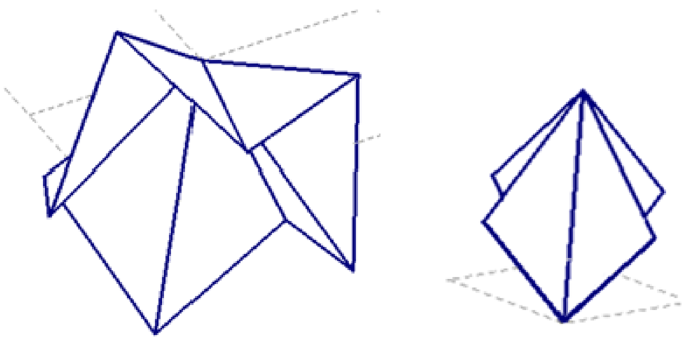
- Egy-egy átló mentén összehajtjuk, majd újra kinyitjuk.
- Megfordítjuk a lapot és a középvonalak mentén összehajtjuk, majd újra kinyitjuk.



Gúlát vagy oktaédert kapunk attól függően, hogy melyik irányban hajtjuk össze:

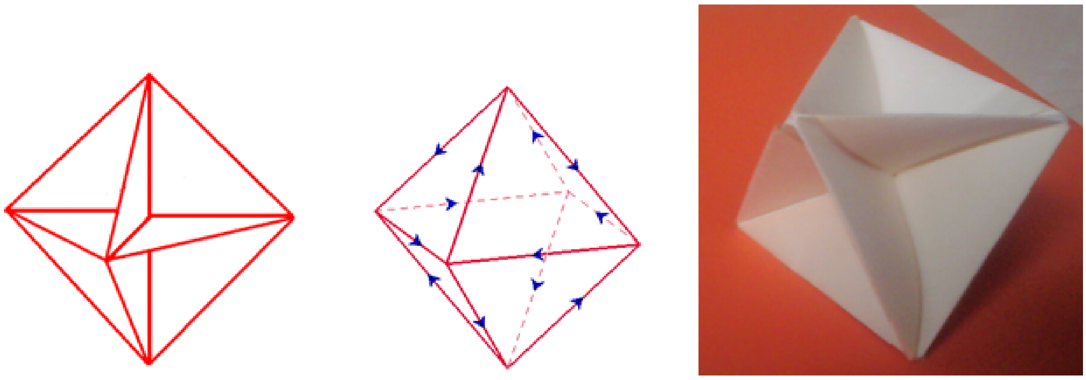


Gúla



Oktaéder

Ha stabil oktaédert szeretnénk, akkor 6 tanuló a 6 gúlát ciklikusan összedugja egyetlen, meglepően stabil oktaéderré. Ez azért lehetséges, mert egyetlen él irányítása az összes él irányítását (ellentmondásmentesen) meghatározza.



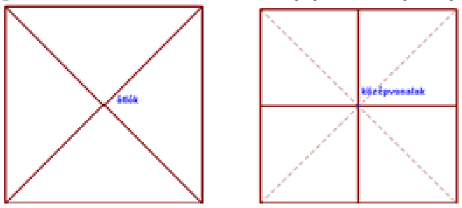
2. Kockahajtogatás

Ismét egy négyzet alakú papírlapból indulunk ki.

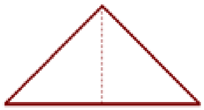
1. Az egyik átló mentén összehajtjuk, majd újra kinyitjuk.

2. A másik átló mentén is összehajtjuk, majd újra kinyitjuk.

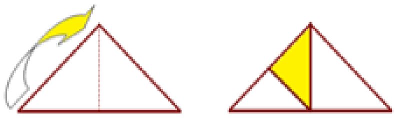
3. Megfordítjuk a lapot és a középvonalak mentén összehajtjuk, majd újra kinyitjuk.



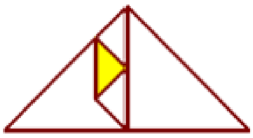
4. Összehajtjuk a lapot derékszögű egyenlőszárú háromszöggé (szára az átló fele, magassága a középvonal fele).



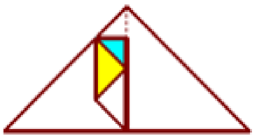
5. A bal alsó csúcsot a derékszögű csúcshoz visszük.



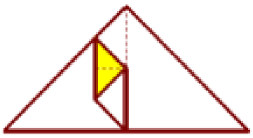
6. A kis háromszög derékszögű csúcsát az átfogó felezőpontjába hajtjuk.



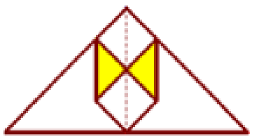
7. A fent „lifegő” kis háromszöget megfelezzük.



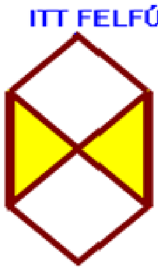
8. A kis dupla (kék) háromszöget bedugjuk az átfogója mentén levő „zsebbe”.

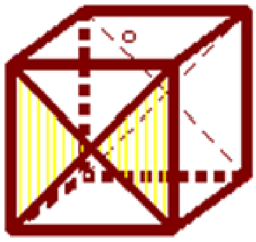


Az 5.–8. lépéseket (tükrösen) a jobb oldalon megismételjük.



Az egészet megfordítjuk, és mindkét oldalon megismételjük az 5.–8. lépéseket. Az egyik csúcsnál van egy lyuk, ott felfújjuk.





Az egyetlen papírlapból hajtogatott és attól kezdve a tanulók kezében levő kocka közelebb viszi térelemeket, konkréttá válhatnak absztraktnak tűnő kérdések (hány és hányféle szabályos sokszögben metszhető egy kocka), így nem kell sajnálni az időt, és nem kell szégyellni a „gyerekes” megoldást. Felfedezni való például, hogy hány síkot határoznak meg a kocka csúcsai.

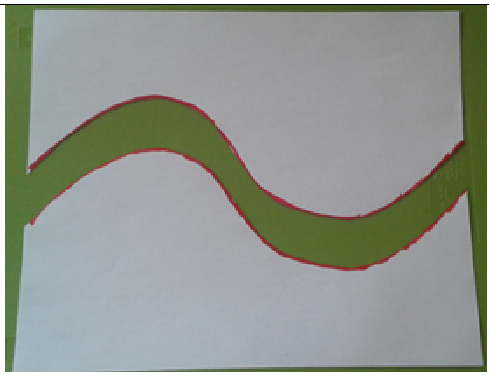
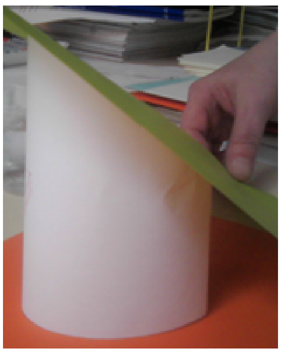
3. Mi köze van a varrónőnek és a bádogosnak a szögfüggvényekhez?

Kicsinek és nagynak, még kollégáknak is nagy élmény a henger síkmetszetének a következő egyszerű szimulálása:

Egy A4-es lap közepére jó vastag filctollal rajzolunk egy „szinuszgörbét”, majd a vonal közepén kettévágjuk (vagy éppen tépjük) a papírt. Elegendő az a körülbelüli pontosság, amivel a táblára krétával rajzolnánk.

Gyurmaragasztóval (vagy valami más ideiglenes rögzítővel) összefogjuk annyira, hogy hengert formáljuk a lapból. Mindkét rész palástját külön-külön rögzítjük és elvesszük az egyiket.

A helyben maradó hengerdarabokra egy-egy síkot (A4-es papírlapot) fektetünk, hogy megmutathassuk: síkkal vágtuk el a hengert.

		
A „görbén” kettétépett lap két fele	A síkmetszet	Irányváltoztatás az ereszcsatornán

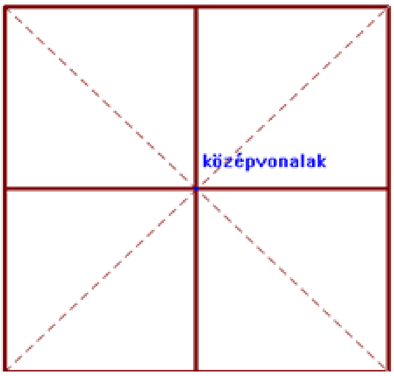
Tudatosíthatjuk, hogy a ruhaujj szabásánál ugyanilyen görbét kell az anyagra rajzolni. Egy gyors mozdulattal „fordítva” illesztjük össze a henger két felét, és máris demonstráljuk az ereszcsatorna irányváltoztatását, tehát a bádogos is ilyen görbe mentén szabja a bádoglemezt. (A ferdén kettévágott szalámi rúd kisimított bőre is elég lökés lenne a bizonyítási igény felkeltéséhez.) A bizonyításra, a síkkal elmetszett henger palástjának kiterítésére még visszatérünk az interaktív feladatlapokról szóló részben.

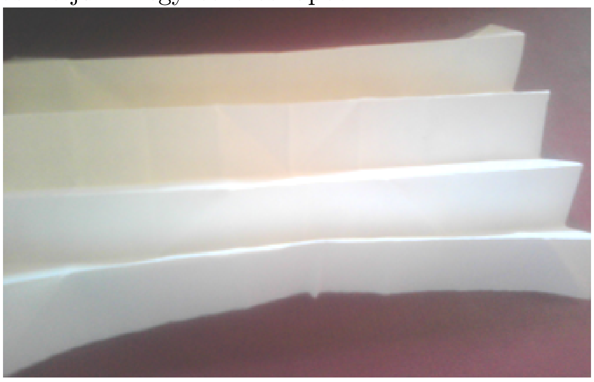
4. A nyeregfelület

Az egyetlen papírlapból készíthető matematikai modellek közül kiemelkedik az a varázslat, amelyet Hollai Márta mutatott be az „Ábrázoló geometria tanítása” szemináriumon, nyeregfelületet hajtogattunk. A szeminárium már nem létezik, de a modell készítésére tanárjelöltek százait tanítottuk.

László Gyula rajza, Forrás:
http://arpad.org/hadmuveszet/fegyverzet/a-magyar-lovassag-a-honvisszafoglalas-idejeben/

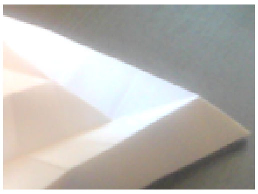
Az átlók és a középvonalak mentén meghajtott négyzet alakú papírlaphoz térünk vissza. Ha van idő és kitartó, türelmes diákokkal dolgozunk, akkor használjunk négyzethálós lapot.





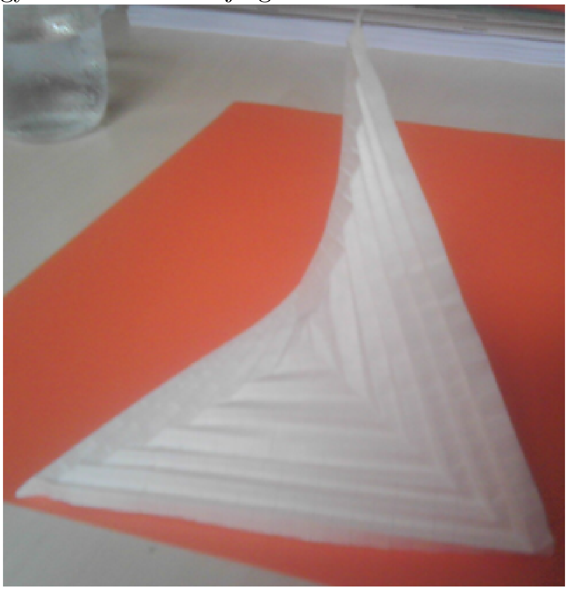
Az egyik oldallal párhuzamosan páros számú egyenlő csíkot hajtunk, majd harmonikaszerűen összehajtogatjuk a lapot. Kisimítjuk és a másik oldallal párhuzamosan is ugyanannyi csíkot hajtunk, mint az előbb, újra harmonikaszerűen összehajtjuk. (Kedvcsináló indításnak elég, ha ismételt felezéssel 8 egyenlő csíkot hajtunk.)

Ismét kisimítjuk a lapot és a szélétől indulva, körben haladva, váltakozva „gerincet” és „völgyet” hajtunk a papírból. Először a sarkokat érdemes beállítani: az átló mentén összecsippentjük, amíg elérjük a sáv határát. A következő sávban ugyanezt tesszük az ellenkező oldalról. A két sáv határvonalán „gerincet” hajtunk. A „völgy” hajtásvonalát úgy hajtjuk meg, hogy megfordítjuk a lapot és „gerincet” hajtunk.



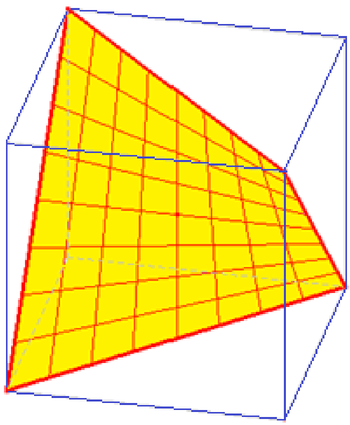
Ha mind a 4 sarkot beállítottuk, akkor a 8 csíkos esetben lényegében el is készülünk az egésszel. Ha több sávval dolgozunk, akkor analóg módon folytatjuk, váltakozva „gerincet” és „völgyet” hajtunk.

Ha jobb közelítést szeretnénk, akkor ismételt felezéssel finomíthatjuk a modellt. A legszebb az eredmény, ha négyzethálós papír rács-egyenesei mentén hajtogatunk.



A négyzet átlói mentén „láthatjuk” az egymásra merőleges síkban fekvő „felfelé” és „lefelé” álló parabolákat. A hajtás-élek a nyeregfelület alkotói (párhuzamos egyenesek párhuzamos síkokban fekvő kitérő egyenesekké deformálódnak).

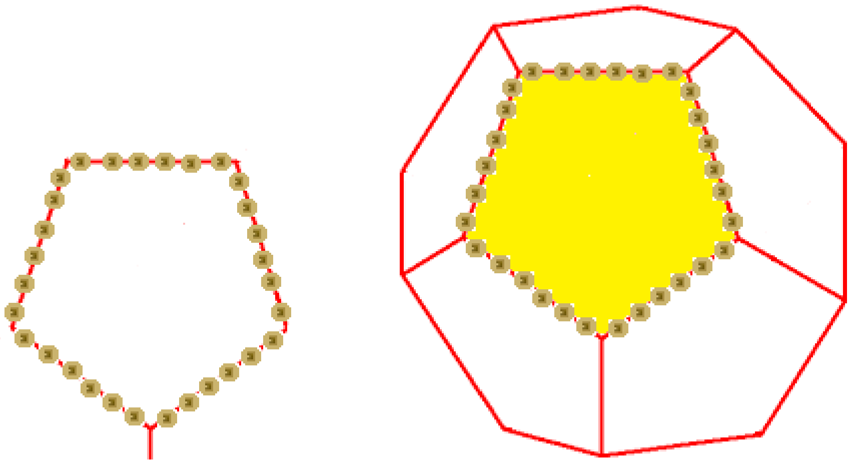
Dinamikus geometriai programmal is modellezhetjük a nyeregfelületet, és animációval felhívhatjuk a figyelmet a felület jellegzetességeire.



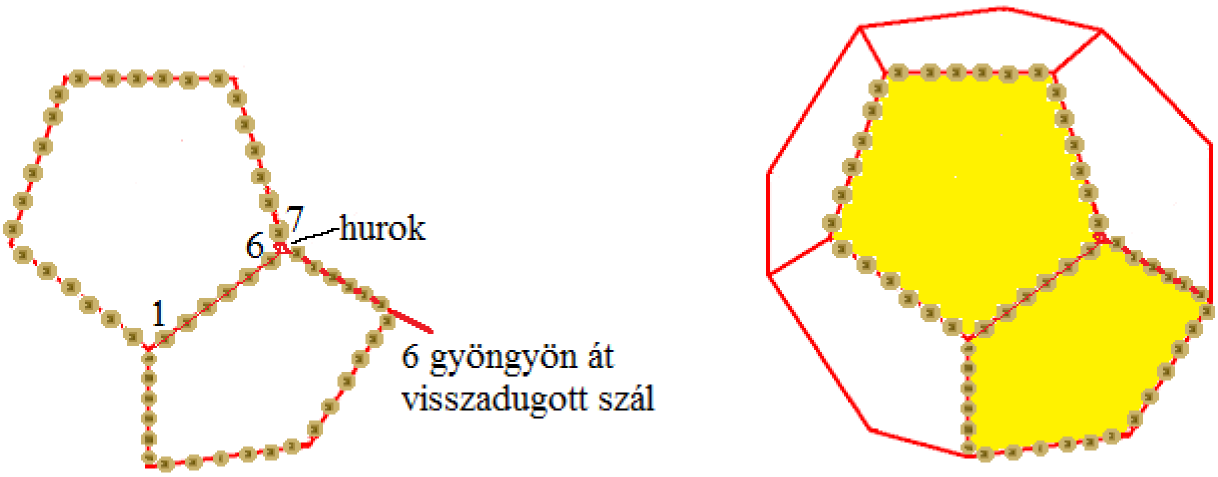
IV.1.2. Gyöngyfűzés

Készíthetünk lábas-alátétet (síkbeli mozaikot) húsvéti tojást, vagy éppen szabályos testet. Fa, műanyag vagy üveggyöngyöket fonallal, dróttal vagy damillal fűzhetünk össze. Mi a viszonylag hamar elkészíthető dodekaéder készítését mutatjuk be. A gyakorlatban megfelelő méretű poliuretán golyókat használtunk „merevítésre”, kásagyöngyöt fűztünk cérnával. Az itt következő leírásban szereplő (pirossal írt) 6-os szám helyett a golyó méretének megfelelőt kell választani. A 6 gyöngyből álló él igen apró gyöngy és a pingponglabdánál kicsit kisebb golyó esetén alkalmas.

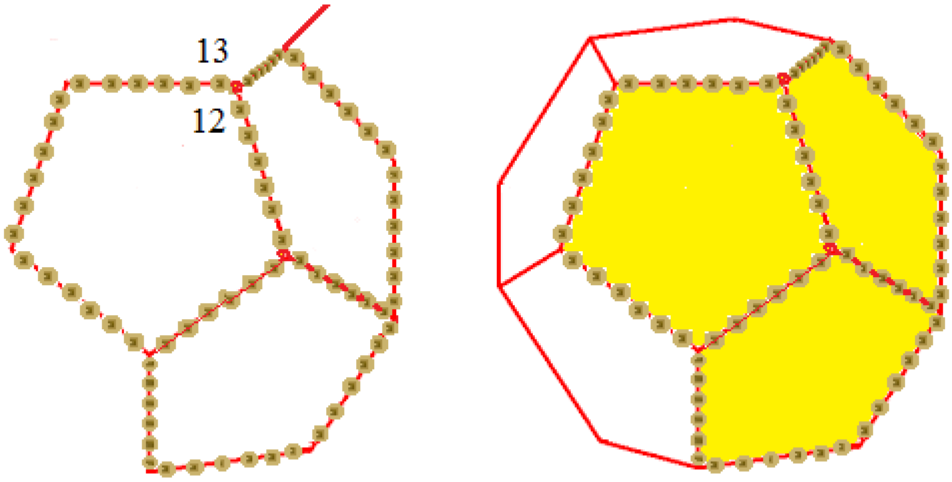
1. lap: Befűzünk a tűbe egy 2×1 méteres cérnát, és a végére csomót kötünk (duplán használjuk). $5 \times \mathbf{6}$ gyöngyöt felfűzünk, és hurkot csinálunk belőle. Ezzel elkészült a dodekaéder 1. lapja.



2. lap: $4 \times \mathbf{6}$ gyöngyöt felfűzünk, és hurkot csinálunk a cérnával az 1. lap **6**. és $(\mathbf{6}+1)$. gyöngye között. Ezzel elkészült a dodekaéder 2. lapja. A 2. lap utolsó élén levő **6** gyöngyön át visszadugjuk a cérnát a csúcshoz.



$3 \times \mathbf{6}$ gyöngyöt felfűzünk és hurkot csinálunk a cérnával az 1. lap $(2 \times \mathbf{6})$. és $(2 \times \mathbf{6} + \mathbf{1})$. gyöngye között. Ezzel elkészült a dodekaéder 3. lapja. A 3. lap utolsó élén levő **6** gyöngyön át visszamegyünk a csúcshoz.



A folytatást már maguktól is ki szokták találni a tanulók. A végén még akasztót is varrunk a dodekaéderre. A könnyen tanulható lépésekkel és azok kombinálásával nemcsak az iskolások, hanem a saját emlékeik szerint szerény kézügyességű 18–20 éves egyetemi hallgatók is sikerélményhez jutnak. Mivel nem egymást nézik, hanem a gyöngyöket, ez a tevékenység a pontos, gondos munka és a kitartás erősítése mellett kiváló alkalmas „bizalmas” beszélgetésekre, például a legkedvesebb és a legbosszantóbb élmények, sikerek és kudarcok elmesélésére.

Kincseink: a hallgatók beadott munkái

IV.1.3. Problémamegoldás színes rudakkal

A feladat a Hajdú Sándor által szerkesztett tankönyvsorozat Matematika 5. 100. oldal 2.80. példája: Adott egy 11, 9, 7, 5, 3, 1 egységkockákból felépített forgásszimmetrikus lépcsős piramis. Ábrázold a testet fölülről, illetve oldalról nézve! Számítsd ki a felszínét! Ésszerűsítsd a számítást! Számítsd ki a test térfogatát!

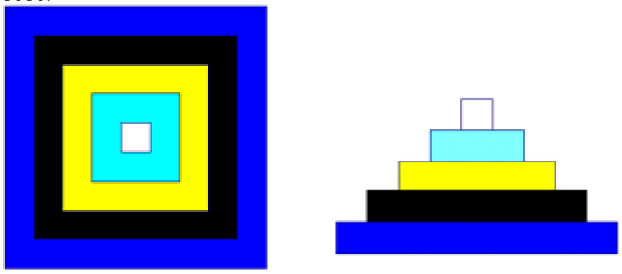
A feladatot színes rudakkal szeretnénk szemléltetni, ezért az oldalhosszat 10 alatt kell tartani. A tanár és a diák számára más-más méretű eszköz szükséges. A tanulók a színes rúd készletből össze tudják rakni az alakzatot, a tanár kezébe nagyobb, jól látható eszköz való, például egységnek választhatunk egy 2,5 cm élhosszúságú kockát. Ahhoz, hogy a sok kis kocka együtt is mozgatható, elfordítható, … legyen, az egyes rétegeket átlátszó, 2,5 cm magas falú, 3×3, 5×5, 7×7, 9×9-es (és akár 11×11) méretű tálcákra érdemes helyezni.

A megfelelő méretű és színű rudakból legalább az alábbi mennyiségek szükségesek:

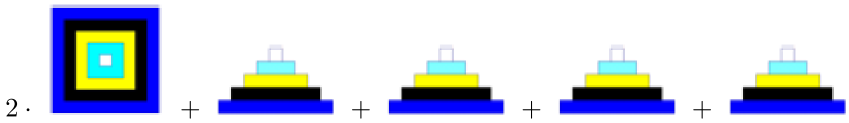
Darab	Méret	Szín
2	1×1	fehér
4	1×2	rózsaszín
3	1×3	világoskék
4	1×4	piros
5	1×5	sárga
4	1×6	lila
7	1×7	fekete
4	1×8	bordó
9	1×9	kék

Ötletek a szemléltetéshez:

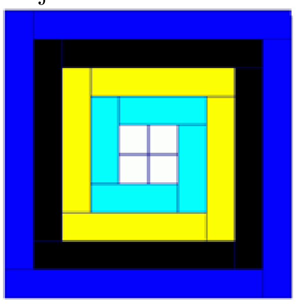
A tanulók és a tanár párhuzamosan dolgoznak a színes rudakkal, kirakják a piramist és lerajzolják a felülnézetet és az oldalnézetet:



A felszínt a függőleges és vízszintes lapok területének összege adja, és ezeket külön-külön is összegezhetjük:



Az oldalnézeti ábra négy példányából kirakjuk az összeszámolást segítő ábrát:



A térfogathoz 9 db 9-es, 7 db 7-es, ... rudat összegzünk.

Megjegyzés: A feladat kapcsán számos összegzési probléma vizsgálata indítható el (természetes számok, páros, páratlan, négyzetszámok összegzése). Ezek vizsgálatában is hasznosak a színes rudak.

IV.2. IT eszközök a matematikatanulás szolgálatában

Mindenképpen gondolni kell az internetes keresők, a szövegszerkesztők, táblázatkezelők és a grafikus szerkesztők használatára, bár az egyes tanuló számára is elérhető eszközpark (személyi számítógép, aktív tábla, táblagép, okos telefon, stb.) olyan gyorsan bővül, hogy ez az írás elavul, mire megjelenik.

Az IT eszközök előnyei másként jelentkeznek, ha a *tanár* egy probléma kapcsán előzetes vizsgálatokat végez, egy hagyományos órára feladatlapot készít elő, valamely programot szemléltetésre használja az órán, illetve ha a tanulók valamely program segítségével oldanak meg geometriai feladatokat.

Tanulói felhasználásban különösen a megoldások megsejtésénél és a diszkusszió során térül meg az eszköz megismerésére fordított idő és energia: egy-egy számítás, vagy szerkesztés elvégzése, egy-egy feladattípus megoldása más adatokkal, paraméterértékekkel. (Egy pontot megfogva és elmozgatva könnyen megvizsgálhatók a lehetséges esetek, nem kell mindig újabb és újabb ábrákat készíteni; egy tipikus pont megszerkesztése után megrajzoltatható a pont pályája, stb.)

Ha egy feladatot IT eszközökkel akarunk megoldani, akkor adódik egy olyan járulékos tennivaló is, amely nélkülük nem lenne: a feladatot át kell fogalmazni. Az átfogalmazás sokféle lehet a megoldási mód, a felhasználható ismeretek, a didaktikai célok szerint. Vannak feladatok, amelyeknél az átfogalmazás maga a „megoldás”, vagyis az IT eszköz számára le-fordított feladat már nagyon egyszerű. Ilyen feladatokat frontális osztálymunkában érdemes megbeszélni és egy rá épülő feladatot önálló munkára adni.

Az IT alkalmazás járulékos haszna, hogy természetessé válik a különböző megoldások keresése és összehasonlítása, mert az IT eszközök nem egyformán támogatják mindegyik megoldást.

Az IT eszközök használata csak a többi módszertani megoldással együtt szolgálja a helyes matematikai szemlélet kialakítását. A leghasznosabb az lenne, ha egy bizonyos begyakorlási idő után a tanulók maguk eldönthetnék, hogy mikor, mennyire veszik igénybe az IT eszközöket. (Problémamegoldás közben kipróbál valamit, megfigyeli, majd megpróbálja bebizonyítani.) Az IT eszközökkel való feladatmegoldás lehetőséget ad a különböző mélységű és nehézségű megközelítésre, differenciálásra.

IV.2.1. Dinamikus geometria program felhasználása a geometria tanításában

Bármelyik elérhető program (Cabri, Euklidesz, GeoGebra, . . .) használatát könnyű megtanulni, de nagyon fontos felhívni a tanulók figyelmét azokra a vonásokra, amelyekben különbözik a dinamikus geometria a szokásos papír-ceruza környezettől. *A legfontosabb, hogy minden alakzatot a program által felismerhető formában kell meghatározni.* Említésre méltó például, hogy egy pont akkor van egy alakzaton, vagy akkor van közös pontja két alakzatnak, ha közvetlenül vagy közvetve így jött létre; egy szög nagyságát vagy egy szakasz hosszát csak akkor tudjuk megadni, ha azokat már létrehoztuk; egy egyenes két pontja ugyan meghatároz egy szakaszt, de ekkor is külön meg kell szerkeszteni a szakaszt, hogy a program tudomást vegyen róla.

Különösen a bevezető időszakban érdemes a parancsokat megszűrni, a tanulók szintjének megfelelően beállítani. Azoknál a feladatoknál, amelyeknél nemcsak rajzolgatást, vak próbálgatást, hanem geometriailag megalapozott tudatos szerkesztést várunk el a tanulóktól, csak azokat a parancsokat bocsássuk a tanulók rendelkezésére, amelyekre ténylegesen szükségük van, és amelyek geometriai hátterét ismerik. Ha például a felezőmerőleges szerkesztése a feladat, vagy egy pont tükrözése egy egyenesre, akkor a *Szakaszfelező merőleges*, illetve a *Tengelyes tükrözés* parancsot zárjuk ki a menüből.

Engedjük, hogy a tanulók önállóan birkózzanak meg a feladatokkal, de a feladatoknak alkalmazkodniuk kell a tanulók tudásszintjéhez, egyszerre kell kihívást tartalmazniuk és a sikeres megoldással kecsegteti. A következő feladatsor 11–12 éves tanulók dinamikus geometriai programmal való ismerkedéséhez készült. Különböző programokat használva több alkalommal ki is próbáltuk. A cél, hogy a geometriai ismeretrendszer és a programhasználat párhuzamosan fejlődjön.

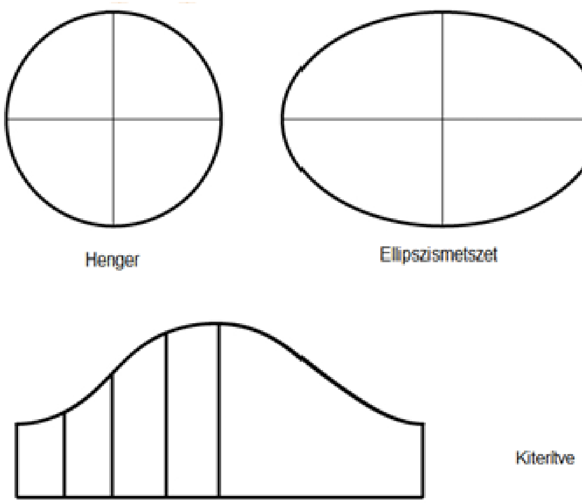
Végezd el az alábbi szerkesztéseket a program segítségével! Gondold meg, próbáld ki, hogy melyik feladat oldható meg könnyebben a füzetben körzővel és vonalzóval, és melyik megy könnyebben a programmal! Figyeld meg, hogy hol kell sorrendet változtatni, pontosabban fogalmazni a program használatakor! A táblázat megfelelő helyére írd le, hogy mit csináltál és mit tapasztaltál. Ha valami érdekességet tapasztalsz, készíts a képernyőről másolatot (hard copy) az Alt-Print Screen billentyűkombináció segítségével és illeszd be ebbe a dokumentumba a Ctrl-V billentyűkombinációval!

1. feladat:	
Szerkessz egy A és B végpontú szakaszt! Vegyél fel a szakaszon kívül egy E pontot! Nevezd el a pontokat, vagy változtasd meg a nevüket, ha a program már elnevezte! Rajzolj az E ponton át az AB szakasszal párhuzamos d egyenest! Mozgasd a B pontot és figyeld meg az ábra változásait! Mozgasd az A pontot és figyeld meg az ábra változásait! Mozgasd az E pontot és figyeld meg az ábra változásait!	
2. Feladat:	
Szerkessz egy AB szakaszt. Szerkeszd meg az AB szakasz felezőmerőlegesét a **Szakaszfelező merőleges** parancs használata nélkül. Mozgasd az A, majd a B pontot. Ha a felezőmerőleges nem mozdul el, akkor szerkeszd meg újra, mert valami nem jól sikerült! Végezd el a szerkesztést a **Szakaszfelező merőleges** parancs felhasználásával is!	
3. Feladat:	
Vegyél fel három (A, B, és C) alappontot! Szerkessz olyan paralelogrammát, ahol A és B szomszédos, A és C átellenes csúcsok! Ellenőrizd, hogy paralelogramma marad-e, ha az alappontokat mozgatod! Rejtsd el a szerkesztési segédvonalakat! Mérd meg az oldalak hosszát és a szögek nagyságát!	
4. Feladat:	
Rajzolj egy ABC háromszöget és vastagítsd meg az oldalait! Szerkeszd meg a háromszög AK, BM és CN magasságvonalait! Szerkeszd meg a magasságvonalak metszéspontját! Mozgasd a háromszög egyik csúcsát, és figyeld meg, mikor lesz a magasságvonalak metszéspontja a háromszögön kívül, mikor lesz a háromszögön, illetve mikor lesz belül.	
5. Feladat:	
Rajzolj egy AB szakaszt, szerkeszd meg a felezőpontját. Rajzolj egy AB átmérőjű, O középpontú kört. Vegyél fel egy D pontot a körön és mozgasd ezt a pontot. Rajzold meg az AD és BD szakaszt, jelöld meg az ADB szöget és mérd meg.	
6. Feladat:	
Vegyél fel két pontot: A-t és B-t és szerkessz egy A középpontú kört, amely átmegy a B ponton. Vegyél fel a körön egy C pontot. Szerkeszd meg a C pontbeli érintőt a körhöz. Mozgasd a C pontot.	

Módszertani feladat: Keressen olyan feladatot, amelynek megoldásához most már eleget tudnak a tanulók! Írjon hozzá segítséget!

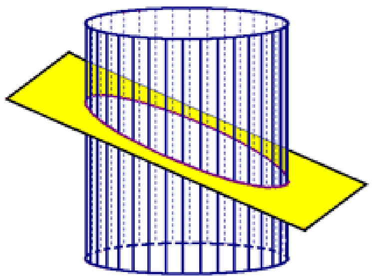
IV.2.2. Miért is szinusz- vagy koszinuszgörbe a síkkal elmetszett hengerpalást pereme kiterítés után?

A varrónők vagy a bádogosok számára írt könyvekben, honlapokon az alábbihoz hasonló segédletek találhatók:



Kép forrása: Szabásminták http://blog.megyeridomonkos.hu/

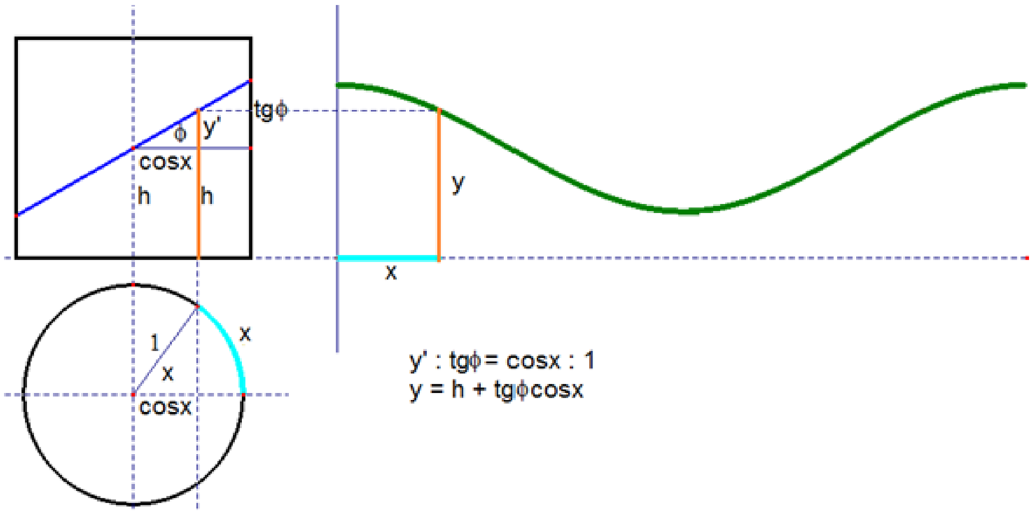
A szabásminta úgy is előállítható, hogy egy egyenes körhengert ferdén elmetszünk egy síkkal, majd kiterítjük.



Innen már csak egy „lépés” annak megmutatása, hogy a szabás vonala egy transzformált szinusz- vagy egy koszinuszfüggvény grafikonja. Az egyszerűbb számolás kedvéért a henger sugarát egységnyinek választjuk.

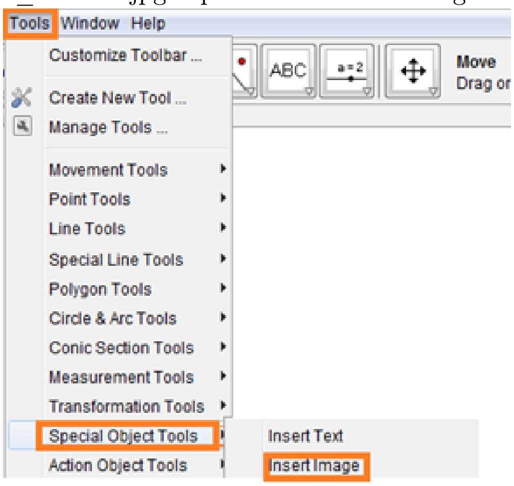
A hengert egy alkotója mentén felvágjuk. Ez nálunk éppen az a kontúralkotó, amelyhez a metszet legmagasabb pontja tartozik. Kiterítés után egy 2π szélességű idomot kapunk. Ezért egy 2π hosszúságú szakaszt felmérünk az x tengely pozitív felére az origóból indulva.

Egy tetszőleges alkotó helyét a kiterített idomon úgy keressük meg, hogy a henger alapkörén megnézzük, hogy mekkora szöggel fordult el a kiválasztott alkotó a kontúralkotóhoz képest. Ez az x szög ívmértékben mérve éppen a vizsgált alkotó kiterítés utáni x koordinátája. Az $(x;0)$ pontban merőlegest állítunk az x tengelyre és rámérjük az elmetszett alkotónak az alapvonal és a metsző sík közé eső szakaszát. A kiterítést dinamikus geometria programmal rajzoltuk, hogy elég legyen egyetlen alkotóra elvégezni az eljárást és a mértani hely parancs segítségével kirajzoltathassuk a görbét. Ez a görbe az $f(x) = h + \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos x$ függvény grafikonja, ahol h az jelzi, hogy a sík az alapvonaltól milyen magasságban metszi a henger forgástengelyét, φ pedig a metsző síknak az alapkör síkjával bezárt szöge. A bizonyítás az ábráról leolvasható.

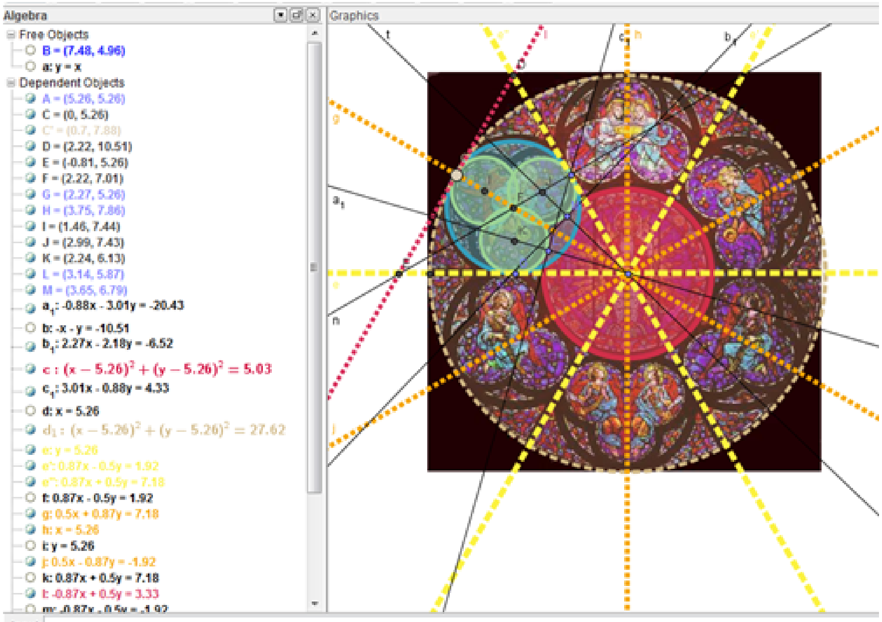


IV.2.3. Rózsaablak is vizsgálható dinamikus geometriai programmal

Háttérként beolvassuk a kiválasztott mintát a Tools, Special Object Tools, Insert Image parancssorozattal. Mi a rose_window.jpg képet töltöttük be a blogol.hu/plkz/mclub oldalról.



Megvizsgáljuk a képet, és amikor annak a szimmetriáját, szerkezetét felfedezni véljük, akkor a sejtésnek megfelelő alakzatokat rárajzoljuk és igazoljuk (vagy elvetjük) a feltevést.



Ezekkel a játékokkal a műalkotások elemzésében és a program használatában, valamint a szimmetriák tanulmányozásában is elmélyedhetnek a tanulók.

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely (2013). Matematika módszertani példatár. URL: tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf

[2] Arnold, V. I., 1987. Katasztrófaelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest

[3] Bruner, J. S. 1974. Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat Kiadó, Budapest

[4] Ceglédi István 2011. A matematika tanításának pedagógiai – pszichológiai vonatkozásai. EKF ttk URL: http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_matematika_Cegledi1/index.html

[5] Chomsky, Noam 1985. Generatív Grammatika. Európa Kiadó, 1985. Wilhelm von Humboldt válogatott írásai. Európa Kiadó

[6] Chomsky, Noam 1995. Mondattani szerkezetek, Nyelv és elme. Osiris–Századvég

[7] Filep László 1985. Játékelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest

[8] Gerőcs László 1998. A Fibonacci-sorozat általánosítása. Scolar Kiadó

[9] Gyapjas Ferenc 1973. Csoportelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest

[10] Hársing Lajos 1988. Tangram. Garabonciás Könyvkiadó, Budapest

[11] Lendvai Ernő 1975. Bartók és Kodály harmóniavilága. Zeneműkiadó

[12] Lovász László – Pelikán József – Vesztergombi Katalin 2006. Diszkrét matematika. Typotex Kiadó

[13] Rényi Alfréd 2004. Ars Mathematica. Typotex Kiadó

[14] Skemp, R.R 1975. A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat Kiadó

[15] Szász Gábor 1978. Hálóelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest

[16] Szederkényi Antal 1977. Topológia, Tankönyvkiadó, Budapest

[17] Szeredi Éva 2011. Geometria mozgásban. Az egybevágósági transzformációk tanításának egy új módszere. URL: http://dea.lib.unideb.hu/dea/bitstream/2437/122079/10/Szeredi-Eva-PhD-dolgozat_titkositott.pdf

[18] Sztrókayné Földvári Vera 1968. Mátrixok – Általános iskolai szakköri füzetek. Tankönyvkiadó, Budapest

[19] Török Judit 1984. Fibonacci-sorozat, Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest

[20] Vásárhelyi Éva 2007. Fogalomalkotás és reprezentációk. URL: http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/repr.pdf

[21] Vigassy Lajos 1970. Projektív geometria, Tankönyvkiadó, Budapest

[22] Vilenkin, N. Ja.,1988. A végtelen kutatása, Tankönyvkiadó, Budapest

[23] Wickmann, Dieter 1999. Bayes-statisztika. ELTE Eötvös Kiadó