Média és matematika
Elektronikus jegyzet

Szerző: Korándi József
Lektor: Vásárhelyi Éva
Szerkesztette: Fried Katalin

TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007
Országos koordinációval a pedagógusképzés megújításáért

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ma már a tanulók ismereteiknek jóval kisebb hányadát szerzik meg az iskolai tanórákon, mint korábban. Az iskolák feladatai között a primer információszolgáltatással szemben előtérbe kerül az információk feldolgozása, rendszerezése.

A kapcsolódás a matematika és a média között régóta és sokféleképpen megvalósul. Filmeken, cikkekben, képeken jelennek meg matematikusok és matematikai tartalmak, már évszázadok óta. Gondoljunk például a régóta megjelenő szórakoztató, ismeretterjesztő könyveken túl akár Dürer Melancholia című metszetére, vagy Leonardo da Vinci Vitruvius-tanulmányára.

Korunkban matematika megjelenhet – és meg is jelenik – könyvekben, plakátokon, képeken, cikkekben, filmekben is, és természetesen az interneten. A megjelenés módja bármely médium-típus esetén többféle lehet. Ha csak a filmeket tekintjük is, ez a megjelenés lehet a matematika vizualizációja, lehet ismertterjesztő film – ezen belül foglalkozhat a matematika történetével vagy konkrét matematikai eredményekkel, gyakran e kettőt ötvözve –, lehet életrajzi film, bemutató óra, ismeretterjesztő előadás (pl. Mindentudás egyeteme), vagy akár egy filmdráma része is. A műfaji sokféleség a többi médium-típusra is jellemző.

A matematika művelőiben, használóiban és oktatóiban egyaránt jelen van az igény a tudományág eredményeinek, érdekességeinek széles körben való megismertetésére. De igény van a szembenézésre is azzal, hogy mi módon látják kívülállók a matematikát és a matematikusokat. Igény van annak feltérképezésére is, hogy mi módon jelennek meg matematikusok, illetve matematikai tartalmak a különféle művészeti alkotásokban. Ez utóbbinak intuitív megnyilvánulásai például az ELTE TTK-n a matematika szakos hallgatók által létrehozott és működtetett „Matekos-filmklub”, vagy az, amikor például a 2007-es GDM Tagung részeként „Mathematik im Kino” címmel vetítéseket tartottak. De számos honlapon is találhatunk a matematikának a különféle médiumokban való megjelenését bemutató anyagokat.

Az ELTE TTK Matematikai Intézete éppen a téma fontossága miatt vezette be 2006-ban a matematika alapszakosok elemző és tanári szakirányán a Média és matematika kurzust.

A kurzus célja a matematika és a média kapcsolatának gyakorlatorientált vizsgálata mindkét irányból. A tanári szakirányos hallgatók számára a matematika médiában való megjelenésének oktatási és pedagógiai vonatkozásai.

A tantárgyat szemináriumi formában oktatjuk, hagyományos és elektronikus médiumokat egyaránt felhasználva. A tantárgy oktatása során az ismereteknek csupán kisebb részét közöljük direktben a hallgatókkal. A kurzus jelentős részben a hallgatók önálló munkájára épül, otthoni kutatásokra éppúgy, mint órai együttgondolkozásra. Matematikai tartalmakat dolgozunk fel konkrét példákon keresztül, médiumokat vizsgálunk és összehasonlítunk össze, főleg a matematikai tartalmak megjelenítésének szemszögéből.

A félévi munkát több összetevő alapján értékeljük. Az órai részvételen és aktivitáson túl figyelembe vesszük a ZH eredményét és beküldött anyagok mennyiségét és minőségét is. A ZH-ban kizárólag matematikai ismereteket kérdezünk vissza.

Az óráknak mintegy kétharmadán kapnak a hallgatók – általában rövid, legfeljebb félórai munkával megvalósítható – beküldendő házi feladatot. A félév során két több munkát igénylő feladatok is van a diákoknak: egy írásbeli interjút, illetve egy ismeretterjesztő cikket is el kell készíteni, természetesen megadott kritériumok alapján, tanári útmutatásokkal, közös előkészítéssel.

A kurzus során konkrét matematikai anyagot is tanítunk, melyet ebben a jegyzetben is ismertetünk. E tananyag megértéséhez szükséges matematikai előismereteket a hallgatók különböző tantárgyak keretében tanulják: Lineáris algebra (vektorterek, mátrixok, sajátérték, sajátvektor), véges matematika (elemi gráfelmélet), analízis (függvénysorok konvergenciája), valószínűség számítás (klasszikus valószínűségi mező, valószínűségi változó). Ajánlott tehát az Algebra1,2, a Számelmélet1, a Véges matematika1, és a Valószínűségszámítás előzetes hallgatása.

A „médium" szó jelentése „közvetítő". Jelentheti például a televíziót, mint olyant, és jelenthet egy konkrét csatornát vagy műsort is. Épp így jelenthet könyvet, cikket, vagy az egész Internetet. A „média" a médium többesszáma, ami egyszerűen médiumokat jelent, de jelenti a médiumok összességét is. A magyar nyelvben manapság köznyelvileg sajnos elterjedt „médiák" kifejezést e jegyzetben igyekeztünk kerülni.

Valószínűleg nem szükséges hangsúlyozni a matematika mindenki számára való megközelíthetőségének fontosságát.

A Matematika és média tantárgy óráin egyebek között a matematikai tartalmak és a matematikusok mozifilmekben és TV-sorozatokban való megjelenítésének alapos vizsgálatával is foglalkoztunk. Kissé talán meglepő tapasztalatot jelentett, hogy még a legjobb matematikus hallgatókat is csak igen ritkán érdekelte, érintette meg a filmekben megjelenő matematikai tartalom, a matematikai háttér. Egyszerűen csak elfogadták, hogy valami matematikáról is szó van, és ettől eltekintve követték a történet menetét.

A kurzus során – és ebben a jegyzetben is – kitüntetett részletességgel vizsgáljuk meg a Good Will Hunting című 1997-ben készült amerikai filmdrámát, több szempontból is.

A Good Will Hunting alapvetően nem a matematikáról szól, még csak nem is egy matematikus élettörténetét dolgozza fel. Nem célja (legalábbis nem nyílt célja) véleményt formálni sem matematikusokról, sem matematikáról. Viszont megjelenik benne néhány matematikus, és megjelenik benne valódi matematikai tartalom is. A választásunk épp azért esett erre a filmre, mert

– Nem matematikus élettörténetét dolgozza fel, illetve a cselekmény lényegében nem épül arra, hogy a szereplők egy része matematikus, nem ez a drámai konfliktus forrása. Ellentétben sok egyéb filmmel nem akar valami konkrétat közölni velünk sem a matematikusokról, sem a matematikáról. Így az előforduló matematikus szereplők az alkotók – és közvetve a társadalom – matematikusokról alkotott képét tükrözik, azt nem módosítják jelentős mértékben dramaturgiai szempontok. Vagyis nem torzítják azért a figurákat, hogy élesebb konfliktushelyzeteket hozzanak létre.

– Igényesen elkészített film, ami azt is jelenti, hogy valódi matematikusokat kértek fel szakértőknek. Így valódi matematikai tartalmak kerültek a filmbe. (Két tanácsadó is volt. Az egyik Patrick O'Donnell, a University of Toronto fizika professzora, a másik szakértő Daniel Kleitman, az MIT matematika professzora volt. Kleitmanról érdemes megjegyezni, hogy 1 az Erdős-száma.)

– Sikeres, közismert film, így feltételezhető, hogy valóban lehet valamennyi hatása a közvélemény matematikus-képére. Remélhető az is, hogy a filmben szereplő matematikai tartalmak már csak a film ismertsége okán is számot tarthatnak a tanulók érdeklődésre, amennyiben ezeket a tartalmakat bevisszük az oktatásba.

I. fejezet

A matematikus kép

Sem a matematika fejlődése, sem a matematikus utánpótlás, sem a matematika eredményeinek hasznosítása szempontjából nem közömbös, hogy milyen kép él a társadalomban a matematikáról és a matematikusokról. E jegyzetben nem definiáljuk, kit tekintünk matematikusnak, mivel sem a társadalom, sem a kérdéssel foglalkozó nemzetközi szakirodalom nem teszi ezt. Az emberek – mint ezt külföldi és hazai vizsgáltok is kimutatták – gyakran még abban sem egységesek, hogy a matematika tanáraikat matematikusoknak tekintik-e. De a nemzetközi vizsgálatokból egyértelműen kiderül, hogy az emberek többségében él valamiféle intuitív kép arról, hogy ki matematikus és ki nem. Viszont más kutatásokból az is kiderült, hogy az egyénenként változó lehet, kit sorol be valaki ebbe a kategóriába.

A matematikával való kapcsolat szempontjából három szociológiai csoport, és ily módon háromféle matematika- és matematikus-kép van. Ezek a csoportok történetileg alakultak ki, és különböző szerepet töltenek be a társadalomban. Létezésük a társadalmi munkamegosztás része. Mindegyik csoportban alapvetően fontos minél tisztábban látni, hogy mik a célok, mi a konkrét matematikai tartalom, és azt is, hogy milyen módon és mértékben valósulnak meg a csoport céljai.

A három csoport:

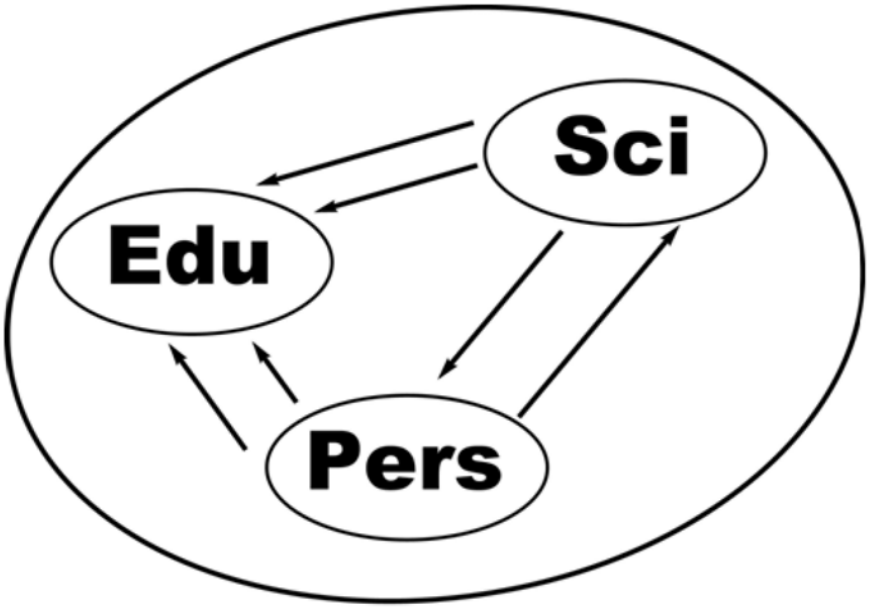
1. A matematikus-társadalom, a tudomány matematika képe, paradigmarendszere (Sci)

2. A tanári közösség, beleértve a személyeket és az intézményeket is (Edu)

3. Az egyének matematika képe, beleértve az esetleg nem létező, de a társadalom által elvárt matematikai ismereteket és kompetenciákat is (Pers).

Mindhárom csoport kölcsönhatásban áll egymással. A Sci és Edu csoport közötti kapcsolat elsősorban a pedagógus-képzés során nyilvánul meg effektíven.

Az Edu és Pers csoport közötti kapcsolat nyilvánvaló: Ez a matematikai képzés, illetve a társadalom hatása arra, hogy mit és milyen módon tanítsanak az „edukátorok”. Az előbbi hatás jobbára közvetlen, míg az ellentétes irányú hatás általában közvetett.



A Sci és Pers csoport közötti kölcsönhatás sokkal rejtettebb. Ezen kölcsönhatás egyik összetevője az a hatás, ami matematikus figuráknak és matematikai tartalmak a médiában való megjelenítésén keresztül történik.

Majdnem minden szakmáról, hivatásról létezik a társadalomban egy általános vélemény, mely negatív, pozitív vagy semleges elképzelések és előítéletek együttese (sztereotípia). Ha ez a számos összetevőből álló kép riasztó, akkor sokkal nagyobb elhivatottság kell az adott terület felé való orientálódáshoz, mint egy vonzó szakma esetén. Az, hogy melyik szakma mennyire vonzó, vagy mennyire elutasított, koronként változik. Napjainkban például a „médiaszemélyiség" (jelentsen ez a fogalom bármit is) vagy a színész munkája sokkal vonzóbb, mint a matematikusé.

A sztereotípia kialakításában cseppet sem elhanyagolható szereppel bír az a hatás, ami a gyerekeket, illetve szüleiket a médián keresztül éri. Az, hogy milyen kép jelenik meg az újságban, rádióban, tévében vagy interneten a matematikusokról, befolyással lehet a matematikusok társadalmi megítélésre éppúgy, mint arra, hogy az ifjak milyen mértékben választják ezt a hivatást. (A „kép" szót természetesen elvont, „image", és nem „picture" értelemben használjuk.) Nyilvánvaló például, hogy az a sztereotípia, amely a matematikusi hivatást férfiak hivatásának tartja – vagyis nem tartja nőiesnek – számos (bár szerencsére korántsem minden), a matematikában tehetséges leányt tart vissza ettől a pályától.

Kutatások

A társadalomban élő tudós-kép tudományos igényű vizsgálata Margaret Mead és Rhoda Metraux kutatásaival kezdődött, akik 1957-ben publikáltak erről cikket ([28]).

Chambers egy tesztet (Draw-a-Scientist Test – DAST) dolgozott ki, amellyel szintén a tudós-képet vizsgálta. A tesztet és a vizsgálatának eredményeit 1983-ban tette közzé ([11]).

Chambers vizsgálati módszere igen népszerűvé vált, és sorban jelentek meg ily módon készített vizsgálatok eredményei. Az általános „tudós” kép vizsgálatához specifikus vizsgálatok csatlakoztak, és megjelentek a „rajzolj egy -mérnököt” „-vegyészt”, „-régészt”, „-pszichológust”, „-matematikust”, „-fizikust”, „-orvost”, stb. vizsgálatok eredményei. Például: Barman C. R., 1996, 1999; ([2]) Beardsley, D. C., és O'Dowd, 1961 ([3]); Bodzin, A., és Gehringer, M., 2001 ([7]); Bohrmann, M. L., és Akerson, V. L., 2001 ([8]), Dickson, J. M., Saylor, C. F., és Finch, A. J., 1990 ([12]); Finson, K. D., 2001 ([13]); Finson, K. D., Beaver, J. B., és Cramond, B. L., 1995 ([14]); Flick, L., 1990 ([15]); Kahle, J.B., 1988 ([17]); Rampal, A., 1992 ([31]); Rosenthal, D. B., 1993 ([32]); Schibeci, R. A., és Sorenson, I., 1983 ([33]). A felsorolás korántsem teljes: 1983 óta több mint 200 tanulmány jelent meg a DAST-ot, illetve annak változatait használók tollából.

Kifejezetten a matematikus-képet már jóval kevesebben vizsgálták. A legtöbbet hivatkozott tanulmány ezek közül Berry és Picker 2000-ben megjelent cikke ([6]), amely angol és amerikai (USA) iskolások rajzaira épül. A „Draw-a-Mathematician” tesztet többen megismételték, egyéb kultúrákban tanuló diákok között is. (Például Grevholm, 2010 – Norvégia [19]; Khoon Yoong Wong, 1995 – Singapor [36]; Hemant Bessoondyal, 2005 –Mauritius [4]) Ezen vizsgálatoknak közös sajátossága, hogy aránylag kevés jellemzőt vizsgálnak, a vizsgálatba bevontak létszáma alacsony és szinte kizárólag általános vagy középiskolai tanulók matematikus-képét vizsgálják. Azonban így is értékelhető – és elgondolkoztató – eredményeket nyújtanak.

Az ember nem születik matematikus-képpel. Ez a kép a gyermek, majd később a felnőtt közvetlen és közvetett tapasztalatai alapján alakul ki. Minthogy az emberek döntő többsége nem ismer személyesen tudóst, illetve konkrétabban matematikust, így a közvetett hatás általában meghatározó. Tudós-, illetve matematikus-képe az embereknek általában már gyerekkorban is van, bár később ez a kép gyakran változik, árnyaltabbá válik. Egy tanulmány szerint az ötödikes (10-11 éves) török diákok közel fele tartja fontosnak és/vagy nagyon fontosnak a médiát abból a szempontból, hogy milyen mértékben származik onnan az információja a tudósokról (Türkmen, 2008, [34]). De a magyar matematika szakos egyetemisták jelentős része is úgy emlékszik vissza, hogy a matematikusokról alkotott korai képük létrejöttében fontos szerepe volt a médiának.

Milyen kép él az emberekben a tudósokról, matematikusokról?

A kép természetesen egyénenként változó, és gyakran szélsőségesen eltérő lehet. Ugyanakkor néhány sztereotipikus tulajdonság nagyon sok esetben megjelenik.

Sztereotípia a tudósokról

Mead és Metraux 1957-ben publikált cikke mintegy 35000 középiskolás esszéjének feldolgozásán alapult. A tanulóknak arról kellett írniuk, mit gondolnak a tudósról. A vizsgálat kimutatta, hogy egy tipikus középiskolás szerint a tudós férfi; idős, vagy legalábbis középkorú; fehér köpenyt és szemüveget visel; általában szakállas. Laboratóriumban dolgozik, veszélyes dolgokkal foglalkozik; titokzatos és titkos dolgokat művel, és ő maga is titokzatos. A tudós gondosan írogat a fekete noteszába; időnként felkiált, hogy "Megtaláltam!". Olyan dolgokat fedez fel, amik segítségével az emberek jobb termékeket tudnak készíteni. Szinte állandóan könyveket olvas.

Chambers 1983-ban jelentette meg a már említett kutatásának eredményeit. A DAST vizsgálat lebonyolítói több mint 4 800 gyermekkel rajzoltattak képet „a tudós"-ról. A rajzok alapján számos jellemzőről kiderült, hogy már igen korán kapcsolódik a gyermek gondolkozásában a tudós fogalmához. Ilyen volt a laboratóriumi köpeny, a szemüveg, az arcszőrzet, a kutatás olyan szimbólumai, mint például a tudományos eszközök és a laboratóriumi kellékek, a tudás olyan manifesztációi, mint például a könyvek, könyvespolcok és a tudomány „termékei", például a képletek, formulák, stb. Csak lányok rajzoltak női tudóst, de azoknak is alig több mint 1 százaléka! (Ez utóbbi azért is különösen érdekes, mert azokban a vizsgálatokban, amikor egyszerűen egy személyt kell rajzolni, akkor a rajzoló általában saját magával azonos nemű rajzol.) A képeken a tudós szinte mindig szobában vagy a laboratóriumában dolgozik, gyakran pincében vagy alagsorban. A rajzok egy részén a tudós veszélyes, illetve titkos dolgokat kutat. Több rajzon is Frankenstein vagy Jekyll–Hyde típusú figuraként tűnik fel a tudós.

Meg kell említeni, hogy számos más vizsgálat is folyt a tudósokról létező sztereotípiákról, a közvéleményben róluk élő képről. Odell munkatársaival például a DAST módszert fejlesztette tovább, és általános iskolásoktól egészen egyetemista korúakig vont be fiatalokat a felmérésbe (Odell, Hewitt, Bowman és Boone, 1993).

Rampal (1992) ([31]) a kezdő tanárok tudós-képét vizsgálta kérdőívek segítségével. Ezen vizsgálatok során további tulajdonságokkal bővült a tudós sztereotipikus képe, nevezetesen a tudós érzelemmentes is, nemtörődöm, hiányzik belőle a szociális érzékenység.

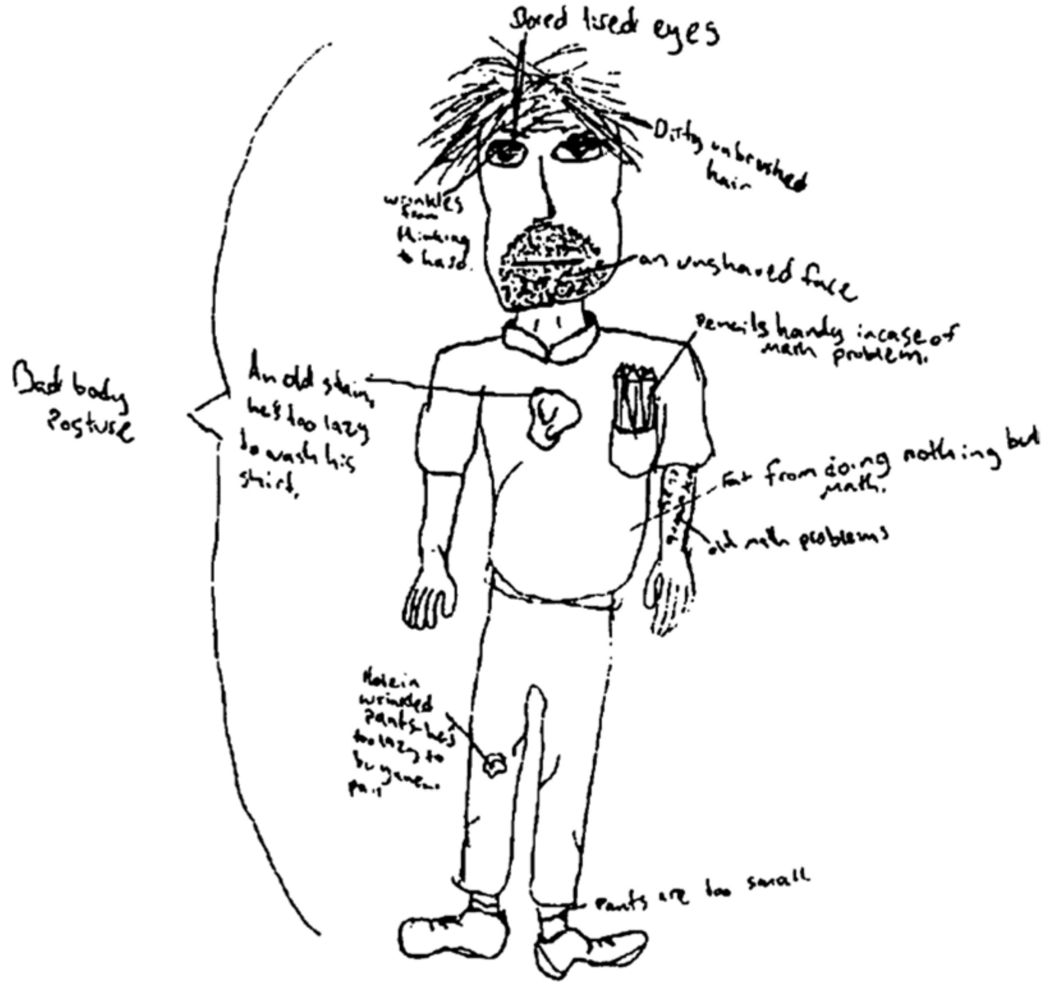
Sztereotípia a matematikusokról

Történtek kutatások kifejezetten a matematikusokról létező sztereotípiákról is

Berry és Picker (2000) 12–13 éves diákokat kért meg két csoportban (közelebbről meg nem határozott megoszlásban, 476 fős összlétszámmal) Plymouthban (Egyesült Királyság) és New Yorkban (USA), hogy rajzoljanak egy matematikust. Később a kutatók beszélgettek is a gyerekekkel. Kiderült, hogy a matematikus sztereotípiája nagyon hasonló a tudóséhoz, bár néhány vonatkozásban markánsan eltér attól. A rajzok és beszélgetések szerint a matematikus fehér férfi, nincsenek barátai, kivéve esetleg más matematikusokat. Magányos, általában kövér, régimódi és szemüveget hord. A matematikus homloka ráncos a sok gondolkodástól, kopasz vagy bizarr frizurája van. Könnyen méregbe gurul. Ceruzák, tollak, számológép és tábla vannak a keze ügyében, és érthetetlen képleteket, formulákat ír.

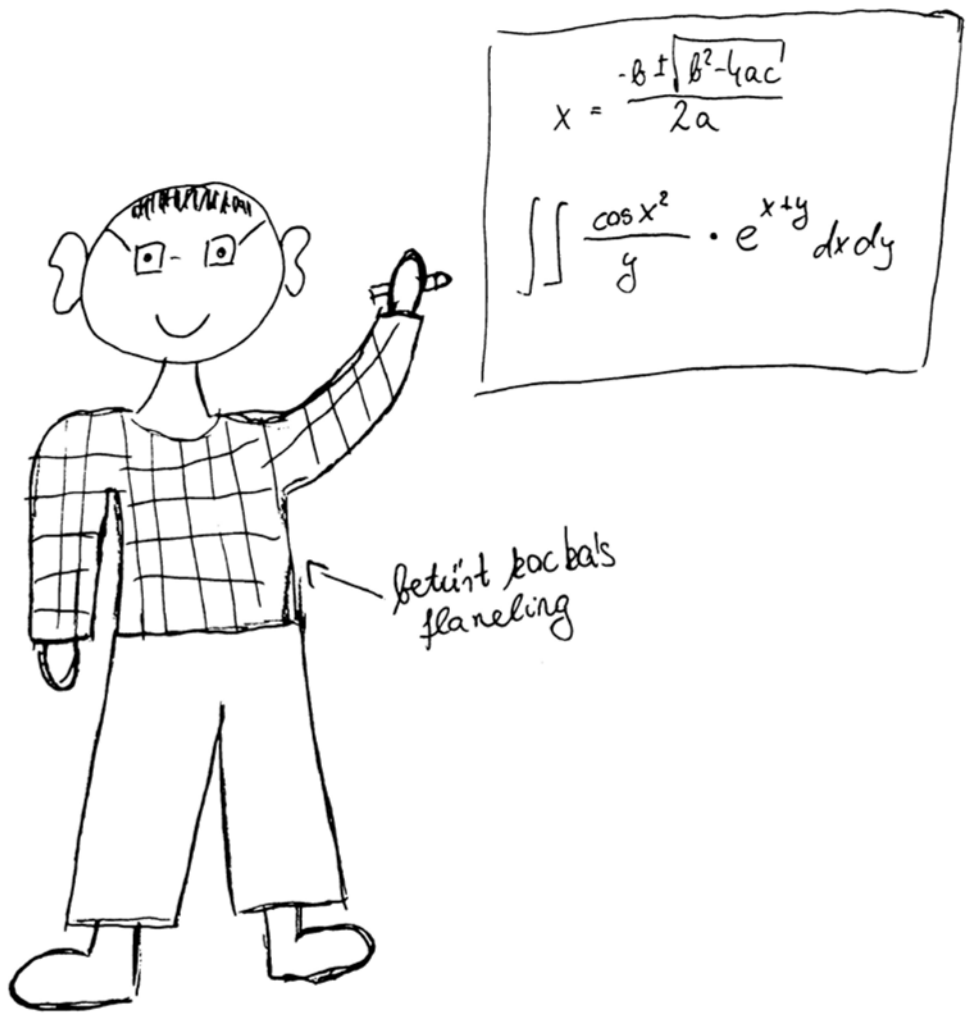
A kérdésekre adott válaszokból kitűnik, hogy a diákok alig tudnak vagy gondolnak valamit arról, mivel is foglalkozik egy matematikus, és arról, hogy az élet mely területein és mi módon lehet hasznos a matematika. Néhány a válaszok közül, amiket a tanulók arra a kérdésre adtak, hogy szerintük mivel foglalkozik egy matematikus: „A matematikus tanít." „Egy bankban vagy egy boltban dolgozik." „Nehéz problémákat old meg." „Keményen számol."

Gondolhatnánk azt, hogy az emberek matematikusokról alkotott képét alapvetően meghatározza, milyen volt a matematika tanáruk. De Berry és Picker vizsgálata valamint az e tárgykörben folytatott magyar kutatások is azt mutatták ki, hogy a tanulók általában nem tekintik matematikusnak a matematika tanáraikat.



Szintén a matematikusokról élő sztereotípiákat vizsgálta 2010-ben Grevholm egy nem reprezentatív norvég kutatásban. Ő is rajzokat és kérdéseket használt a vizsgálatában, hogy megtudja, mit gondolnak 16 és 19 év közötti középiskolás diákok a matematikusokról és a matematikáról. Itt a következő jellemzők domináltak: kopaszság vagy megdöbbentő haj, általában szemüveg, képletek veszik körül, egyedül dolgozik, magányos. A matematikus csak néhány képen tűnik boldognak. A diákok úgy gondolják, hogy a munkája számokhoz és számításokhoz kapcsolódik.

Matematikusok és egyéb tudósok a pouláris médiában


$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\iint \frac{\cos x^2}{y} \cdot e^{x+y}\, dx\, dy$
betűrt kockás
flaneling

A pop-kultúra médiumainak hatását hiba lenne alábecsülni. A társadalom tagjai, különösen fiatal korukban lényegében nem találkoznak igazi tudóssal, matematikussal. Így képüket erről a pályáról alapvetően a különböző médiumokban megjelenő matematikusok és a filmekben, könyvekben, stb. ábrázolt matematikus karakterek, valamint a matematika művelésének megjelenített képe határozza meg. Ez a kép pedig döntő hatással lehet a pályaválasztásukra. de hosszabb távon a tudósok társadalmi megbecsülésére is.

Ugyancsak jelentős lehet a populáris kultúra médiumainak hatása az érdeklődés felkeltésében. Itt elsősorban a filmekre és tévéműsorokra gondolunk.

A filmekben megjelenő tudós/matematikus szereplőkhöz, tudományos tartalmakhoz a néző elsősorban érzelmileg viszonyul. Ha ez az élmény pozitív, akkor annak hatása sokkal erősebb és tartósabb lehet, mint például egy tanórán megtanított konkrét ismereté.

A filmes eszközökben nem kell kompromisszumokat kötni ahhoz, hogy korrektül ábrázolhassanak tudományos tartalmakat és tudósokat. E korrekt ábrázolás azért is szükséges – gyakran csak szükséges lenne –, mert a társadalomban élő kép például a matematikusokról elismerő ugyan, de meglehetősen negatív. („Tán csodállak, ám de nem szeretlek.") Olyannyira, hogy amikor esetenként egy teljesen normális figura jelenik meg egy filmben matematikusként, az kifejezetten pozitívnak hat.

Wilson és Latterell 2001-es cikkében ([35]) számos irodalmi művet, illetve filmet sorol fel, amelyekben matematikus szerepel. A kutatásukban szereplő művekben a matematikus többnyire különc, esetleg zavart, helyenként őrült. Előfordul, hogy a főszereplő lelki alkata, netán betegsége az alapkonfliktus forrása, a cselekmény elindítója. Épp azért választ ilyen főszereplőt a szerző, mivel az ebből a helyzetből adódó drámai cselekményt kívánja felépíteni, ábrázolni. A létező sztereotípiákra utal, hogy ilyen esetekben aránylag gyakran választ az alkotó főhőséül matematikust.

E vizsgálat lezárulta után is fellelhetők az ilyen típusú filmek. Hogy csak kettőt említsünk, az Egy csodálatos elme (A Beautiful Mind; 2001) főszereplője, John Forbes Nash paranoid skizofrén volt, Kódjátszmáé (The Imitation Game; 2014), Alan Turing pedig a film szerint arrogáns, zavarodott viselkedésű és homoszexuális.

Khoon Yoong Wong (Images of Mathetaticians, 1995, [36]) a matematikusokról a diákokban élő képet kutatta a módosított DAST segítségével. Hét kategóriában vizsgálta meg közel háromszáz 12-15 éves szingapúri diák rajzát. (Szemüveg, haj, öltözet, eszközök, könyvek, jelképek, nem). Azt tapasztalta, hogy a rajzokon szereplő matematikusok jobbára férfiak, szemüveget hordanak, formulák és matematikai jelek veszik őket körül és kissé furcsán néznek ki. Hemant Bessoondyal 2005-ben Mautritiuson végzett felmérést. Az ő vizsgálataik is azt mutatják, hogy a matematikus-kép földrajzilag meglehetős állandóságot mutat. Schibeci és Sorenson 1983-ban azt vizsgálta, hogy a tudósokról alkotott kép mennyire tér el a különböző etnikai csoportokban. Azt találták, hogy alig. Véleményük szerint ez a média hatása, mivel az emberek a világ minden táján nagyon hasonló műsorokat, filmeket, sorozatokat néznek. Ugyanerre az eredményre vezetett Finson 2001-es kutatása is.

A tudós képének időbeni változása elég jól nyomon követhető a különféle filmekben megjelenő tudósok figuráit vizsgálva. Ez a kép meglehetős összhangot mutat a diákok tudós-képét vizsgáló kutatások eredményeivel.

Egyrészt tapasztalható bennük egy elég nagy stabilitás, a tudós jellemzői közül csak kevés változik, és az is lassan. Ugyanakkor némi változás azért érzékelhető. Mint a tesztek eredményeiből, így például a filmvászonról is eltűnőben van az őrült tudós képe, aki iszonyatos dolgokat fedez fel, amelyek segítségével le akarja igázni a világot. Például, míg a hatvanas években készült hét James Bond film közül háromban is zseniális, ámde őrült tudós volt a 007-es ellenfele, azóta egy ilyen filmben sem. Újabb matematikusfigurát jelenít meg egy igen népszerűvé vált sorozat, a Gyilkos számok (NUMB3RS). Ennek egyik főszereplője egy matematikus, aki az említett sztereotip tulajdonságok közül szinte egynek sem felel meg. Fiatal, jóképű, nem visel szemüveget, vékony és (talán az egyetlen „sztereotip" tulajdonsága) okos. Párkapcsolatban él, rengeteg barátja van, sokat jár szórakozni, a társadalmi élete is tökéletes. Ez egy merőben új, a korábban ábrázoltaktól jelentősen eltérő matematikus-képet, matematikusi életformát mutat. Egyelőre eléggé egyedülálló ez az ábrázolás. Hatását egyelőre nehéz kimutatni, de ez a hatás semmiképpen sem elhanyagolható. Van például olyan hallgató, aki éppen e sorozat hatására döntött úgy, hogy alkalmazott matematikus lesz!

A Good Will Hunting (1997) amerikai filmdráma. A Gus Van Sant rendezte film több különböző díjjal is büszkélkedhet. Például Oscar-díjat kapott a forgatókönyvéért (a film két fő színésze, Matt Damon és Ben Affleck írta), és ugyancsak (a legjobb mellékszereplőnek járó) Oscar-díjjal jutalmazták Robin Williams-et a filmbeli pszichológus megformálásáért.

A film főszereplője egy dél-bostoni srác, Will Hunting (Matt Damon). Egyetemista korú, de a Massachusetts Institute of Technology-ra (MIT) takarítani jár, nem diplomát szerezni. Lepusztult munkáskörnyéken él, indulatos természete miatt gyakorta kerül összetűzésbe a törvénnyel. De kitűnik ebből a környezetből és a baráti köréből egyaránt, mégpedig csodálatos intellektuális képességeivel. Zsenialitása azonban nem igazán tud kibontakozni, mert szociális háttere és a környezete megakadályozza ebben. Legalábbis egy darabig. A film épp arról szól, hogy hogyan sikerül mégis elindulnia – egy hasonlóan mélyről indult pszichológus segítségével – egy sikeres élet irányába. A film leegyszerűsítve egy intellektuális és érzelmi sikertörténet. Nem meglepő, hogy az egyik Oscart a forgatókönyv kapta.

A filmben nyolc olyan matematikus, illetve matematika szakos hallgató szerepel, akiket név szerint is megismerhetünk, illetve akik szerepelnek annyit a filmvásznon, hogy legalább néhányat tulajdonságukat megismerhessük, megítélhessük. Ők: Will Hunting, Gerald Lambeau professzor, Tom, a professzor segédje, Alexander, egy idősebb kolléga, és négy hallgató Steven, Jack, Nimesh és „Alison". (Ez utóbbi az egyetlen női matematikus a filmben, akinek a neve ugyan nem hangzik el, de egy párbeszédben néhány mondatnyi szerephez jut. A továbbiakban az őt alakító színésznő után „Alison"-ként említjük).

A következő táblázatok azt mutatják be, hogy a korábban említett sztereotípiák közük melyek érhetők tetten a filmben a matematikusok korára, nemére, megjelenésére vonatkozóan.

A matematikusok többsége az általános véleménynek megfelelően a film szerint is fehér férfi. A film nyolc nevesített szereplője közül, aki komolyan foglalkozik matematikával, hét férfi, közülük öt fehérbőrű: a címszereplő, William Hunting, pártfogója, Lambeau professzor, az ő segédje, Tom, egy másik matematika professzor, Alexander, és Steven. Jack néger, Nimesh indiai származású, és az egyetlen női matematikusunk, Alison, szintén fehér.

A matematikusok korára vonatkozó sztereotípia alapján vártnál a filmbeli matematikusok átlagéletkora jelentősen alacsonyabb. Alexander az ötvenes éveivel a legidősebbnek számít a film matematikusai között, hatan pedig kifejezetten fiatalok (matematikus hallgatók).

Kövérnek egyikük sem mondható, többnyire normál testalkatúak, talán csak „Alison" túlsúlyos, de lehet, hogy ő is pusztán az előnytelen öltözködése miatt tűnik annak.

A hét férfi közül kettőnek van valamilyen arcszőrzete, és csak egyikük szemüveges (bár olvasáshoz Lambeau professzor és Alexander is szemüveget használ).

A megjelenő matematikusok és matematikushallgatók közül senki sem visel elegáns ruhát, öltönyt, Lambeau professzor még az előadásait is egy lezseren a nyakába lógatott sállal tartja.

Hajviseletük általában rendezett, semmilyen szempontból nem kirívó, ketten kopaszodnak.

Az általános képnek talán Alexander felel meg leginkább. Benne a kutatásokban feltárt sztereotip jellemzők jelentős része felfedezhető: aránylag idős, kopaszodó fehér férfi, homlokán ráncokkal, konvencionális öltözékben. Sőt, noha egyértelmű, hogy Alexander csak olvasáshoz használja a szemüvegét, ám a filmbeli szereplésének több, mint harmadában (24-ből 9 másodpercben) szemüveggel az orrán vagy a kezében látjuk, így a néző joggal társítja Alexander képéhez a szemüveget.

Tom is olyan típust testesíti meg, aminek a képe szintén jelen van a közvéleményben, nevezetesen az okos, de nem zseniális, a szorgalmas, megbízható és unalmas „kocka" matematikust.

Bár külön női matematikusokról létező sztereotípiák vizsgálatáról nem ír a szakirodalom, de valószínűleg nagyon jellemzőre, a minden bizonnyal létező „női matematikus" közfelfogásban létező képének megfelelően formált karakter „Alison" is. Könnyű elhinni, hogy az emberek többsége éppen ezt várja egy matematikus nőtől: ruhadarabjait igénytelenül válogatja össze, megjelenése slampos, régimódi, hajviselete semmitmondó, lényegében minden nőiességet nélkülöz. Márpedig ez a kép nagyon nem felel meg a valóságnak.

Barátok, család, kapcsolatok szempontjából nincs egységes kép a filmben, bár legtöbb esetben ezekről inkább csak sejtéseink vannak, a film nem mutatja be a magánéletük részleteit, csak utal ezekre. Lambeau professzor szemlátomást világfi, a kapcsolatteremtés területén éppúgy sikeres, mint a munkájában. Will, bár kiterjedt és összetartó baráti körrel rendelkezik, sőt a film során a szerelmet is megtalálja, de érzelmileg sérült és társadalmilag deviáns. Viszont – és itt újra megjelenik a sztereotípia – ő a zseni. Tipikus elképzelés, hogy a matematikus nem csupán okos, de nagyon okos. Ezt a film készítői is felhasználják: Will Hun-

	Will	*Lambeau*	*Tom*	*Alexander*
kor	fiatal	középkorú	fiatal	idősödő
nem	férfi	férfi	férfi	férfi
rassz	fehér	fehér	fehér	fehér
testalkat	normál	normál	normál	normál
arcszőrzet	nincs	nincs	nincs	nincs
szemüveg	nincs	nincs*	van	nincs*
öltözködés	hétköznapi	lezser	konzervatív	konzervatív
haj	átlagos	átlagos	átlagos	kopaszodó

I.1. táblázat.

	Steven	*Jack*	*Nimesh*	*„Alison”*
kor	fiatal	fiatal	fiatal	fiatal
nem	férfi	férfi	férfi	nő
rassz	fehér	néger	indiai	fehér
testalkat	normál	normál	normál	túlsúlyos
arcszőrzet	nincs	bajusz	körszakáll	nincs
szemüveg	nincs	nincs	nincs	nincs
öltözködés	sportos	sportos	sportos	ódivatú
haj	átlagos	kopaszodó	hosszú	előnytelen

I.2. táblázat.

tingról kiderül, hogy több területen is elképesztően tehetséges. Ez nehezítheti esetleg kapcsolatok, barátságok kialakítását átlagos képességű személyekkel, de jelen esetben erről nincs szó. Barátai inkább büszkék Will kiemelkedő tudására, semmint zavarná őket. Mikor az egyetemi hallgatók bárjában – ahova a haverjaival együtt illetéktelenül megy be szórakozni – konfliktusa támad egy történész hallgatóval, azt könnyedén alázza történelemből. Ezáltal barátját menti ki egy kínos beszélgetésből. Amikor verekedése miatt bíróság elé kerül, kiderül, hogy lényegében ismeri az Egyesült Államok összes büntetőperét a hozzájuk tartozó ítéletekkel együtt, ami – tekintve, hogy az USA-ban precedensjog van érvényben – szinte felbecsülhetetlen értékű. Láthatja tehát a néző, hogy Will Hunting érvényesülhetne mint jogász, vagy mint történész is. De azt, hogy Will egy egészen rendkívüli tehetség, a film készítői abban látták alkalmasnak megmutatni, hogy még matematikában is kiváló. (Jellemző, hogy a film készítői először egy elméleti fizikust akartak a történet főszereplőjének választani, de később mégis inkább egy matematikus figurája mellett döntöttek.) Will tehetségesebb, mint maga professzor, aki pedig szintén nem hétköznapi matematikus: a film szerint megkapta a Fields-medált. A filmben el is hangzik Will szájából, hogy a professzor számára túl bonyolult problémák megoldása neki nem jelent igazi kihívást.

A matematikusok munkája

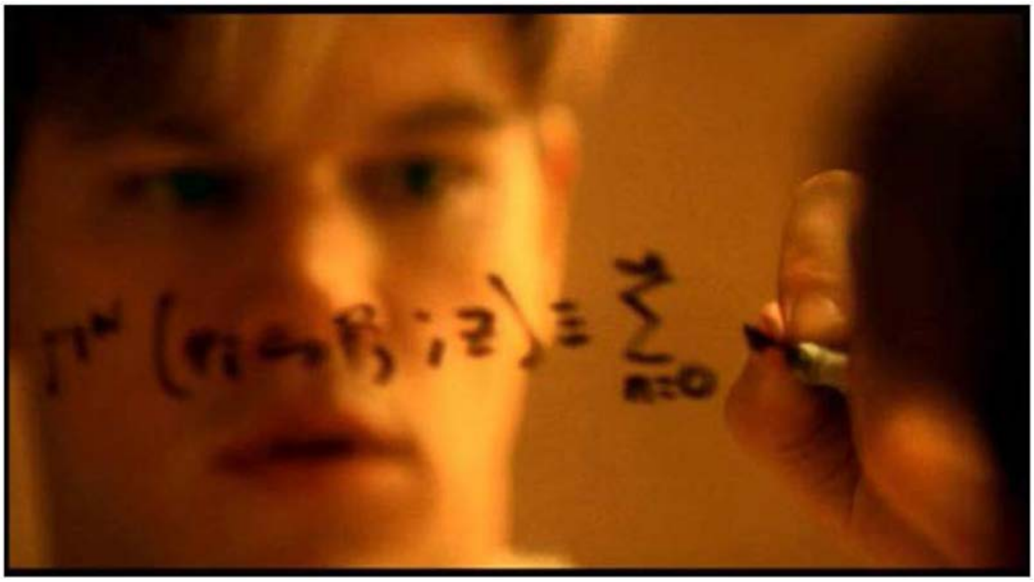
Mit csinál egy matematikus, amikor dolgozik? A legtöbb embernek fogalma sincs erről, és a Good Will Hunting sem sokat segít abban, hogy az emberek pontosabb képet alkothassanak. Közvetlenül a főcím után feltűnik a matematikus professzor. Az MIT egyik nagyelőadóját látjuk, egy matematika előadás utolsó perceit. A háttérben egy hatalmas tábla, képletekkel teleírva. Ez tökéletesen illik abba a képbe, amit az emberek általában gondolnak: a matematikus képletekkel dolgozik. A professzor éppen kihirdeti, hogy felírtak egy Fourier transzformációt a tanszéki táblára. Ha valaki a szemeszter vége előtt meg oldja, akkor annak a megoldását leközli az egyetem folyóirata. Elmondja a hallgatóságnak azt is – egyszersmind a feladat nehézségét is érzékeltetve –, hogy eddig ezt a feladatot „bizonyították Nobel díjasok, matematikai pályadíjasok, neves asztrofizikusok, és magamfajta szerény professzorok." A jelenet hűen tükrözi azt a képet, hogy a matematikusok általában feladatokat oldanak meg és rengeteget gondolkoznak, amíg egy-egy nehezebb problémával megbirkóznak. Ez nagyjából megfelel a valóságnak. Az az ötlet viszont, hogy egy valaki által korábban már megoldott nehéz probléma újbóli és újbóli megoldásait publikálják, a magyar szinkron fordítójától származik. Hasonlóan a Fields-medál szánalmas félrefordításához („matematikai pályadíj" – alighanem a field – mező, pálya szó fatális félreértéséből), ami sajnos éppen azt erősíti meg, hogy a társadalom (de legalábbis a film szövegkönyvének fordítója) számára a matematikusok egyik legnagyobb elismerése ismeretlen fogalom. Pedig ez olyan, mintha nem tudnánk, mit jelent a színészeknek az Oscar-, vagy a tudósoknak a Nobel-díj. (Az eredeti angol szöveg viszont nem áll ilyen messze a valóságtól. Abban a felsoroltakról azt mondja a prof, hogy ők olyanok, akik korábban részesültek abban a megtiszteltetésben, hogy a munkájuk megjelenhetett az „MIT Tech"-ben.) Elég hasztalan dolog lenne, ha a kutató matematikusok újra és újra ugyanazt a problémát oldanák meg. A kitűzött feladat ráadásul nem is különösebben nehéz. Egy átlagos képességű matematikushallgató pár óra alatt megoldhatja. Ráadásul – mint erre majd később részletezzük – a feladatoknak semmi köze sincs a beígért „Fourier-transzformáció"-hoz.

A következő olyan jelenetben, amikor valaki matematikával foglalkozik a filmben, azt láthatjuk, amint Will feladatmegoldást firkál egy tükörre. Elmélyülten koncentrál, de nem hezitál, nem akad el, hanem azonnal a megoldást, a kitűzött feladatok végeredményét írja fel. A képsor üzenete nyilvánvaló: aki igazán zseniális matematikából, annak számolgatnia sem kell. Akármilyen nehéz feladattal első pillantásra boldogul, még akkor is, ha másoknak ehhez egy egész szemeszter is kevés. Ez természetesen téves képzet. Legyen valaki akármilyen zseniális matematikus, ennyire könnyen azért nem megy egy-egy számolásigényesebb feladat megoldása.

A jelenetnek nyilvánvalóan csak dramaturgiai szerepe van. Hiszen ha lenne is ilyen matematikus, ha például Will – a filmben az abszurditásig felnagyított – képességei lehetővé tennék is, hogy egyből a végeredményeket írja fel, akkor teljesen felesleges a tükörre írnia ezeket. Írhatná egyből a folyosói táblára, mint azt később meg is teszi.

A filmben szerencsére valóságos matematikusi munkamódszereket is láthatunk.

Ilyeneket mutatnak be például azok a jelenetek, melyekben megjelenik a társsal vagy csoportban dolgozó matematikus. Ez részben eloszlathatja azt a tévhitet, hogy a matematikus mindig magányosan dolgozik, formulákon, képleteken, könyveken és esetleg számítógépen kívül nem veszi más körül. Lambeau professzor már a feladatok kitűzésekor beszél „a tanszék" munkájáról. Egy jelenetben látjuk, amint Will-lel együtt old meg egy gráf-színezési problémát. Később Lambeau, Tom és Alexander együtt gondolkozik egy másik matematikai problémán, majd Will is csatlakozik hozzájuk. De az is kiderül a filmből,



hogy mindegyikük dolgozik egyénileg is, így a film helyesen szemlélteti, hogy a csoportmunka csak egy része a matematikus alkotó tevékenységének.

A film matematikát tartalmazó jeleneteiben mindenütt előfordulnak matematikai szakkifejezések, képletek és a matematikai szaknyelv. Még olyan esetekben is, amikor ez nem feltétlen lenne szükséges. Ezek szemléltetik, hogy a matematika tele van képletekkel és szakkifejezésekkel. Már a főcím alatt képletek kavarognak a háttérben, felettébb misztikusan. Matematikáról lévén szó, az természetes, hogy képletekkel teli minden tábla, ami a filmvásznon feltűnik. De a szereplők akkor is matematikai zsargont használnak, amikor arra nem volna feltétlenül szükség. Például a tanszéki hirdetőtáblán megjelenő egyik felvetett probléma homeomorfikusan irreducibilis („homeomorphically irreducible") gráfokról szól. Ami egyszerűen annyit jelent, hogy a gráfban nincsen másodfokú pont, vagyis olyan pont, amiből pontosan két él indul ki. Ez is, mint a szaknyelv és a képletek használata szinte mindig, azt sugallja, hogy itt olyan dolgokról van szó, amelyeket normális földi halandó fel nem foghat. Az ilyen jelenetek alkalmasak lehetnek arra, hogy az emberek csodálattal tekintsenek a matematikusokra. Végső soron azonban ezek inkább távolítják és elriasztják a nézőt a matematikától, a matematikusoktól.

A matematikusról, a matematikus munkájáról a film által közvetített kép összességében a sem igazán vonzó. Azt látjuk, hogy a matematika túlságosan bonyolult dolog. Nagy része még a jó matematikusok számára is nehéz. Sok kudarc éri a matematikust, mert nem, vagy csak nagy fáradsággal tudja megoldani a problémákat. És ha mégis elér eredményeket, mint például a filmben Lambeau vagy Alexander, akkor is ki van téve annak a veszélynek, hogy a pályája csúcsán egyszer csak betoppan egy ifjú tehetség, aki utólag feleslegessé teszi minden erőfeszítését. Matematikával foglalkozni tehát – gondolhatni – kizárólag a zseniknek éri meg, mások ne is próbálkozzanak vele.

A nemzetközi vizsgálatokból kitűnik, hogy a matematikusokról és természettudósokról élő képzetek csak lassan változnak, és nemzetiségtől lényegében függetlenek. Számos kutató véli úgy, hogy ezeknek a jelenségeknek a média az oka. A TV műsoroknak, sorozatoknak, filmeknek fontos szerepe van a sztereotípiák megtartásában, erősítésében vagy gyengítésében. Valószínűnek látszik, hogy a stabilitás egyik oka az, hogy a médiumokban a közvéleményben élő képnek megfelelő tudós/matematikus figurák jelennek meg. Ugyanakkor viszont az itt megjelenő sztereotípiák is befolyásolják a közvéleményt.

Mivel ezek a sztereotípiák gyakran és jelentős mértékben kedvezőtlen képet festenek a kutatókról, matematikusokról, jelentősen csökken a természettudományos pályát választó fiatalok száma. Komoly elhivatottság kell a matematikusi pálya választásához, amikor „a médiában (rádió, TV, mozi) a riporterek, a szereplők szinte dicsekszenek azzal, hogy az iskolában nem szerették és nem is tudták a matematikát.” ([23]) A média javíthat a népszerűtlen munkákról, hivatásokról alkotott közvélekedésen, vonzóbb (és talán a valósághoz közelebb álló) képet mutathat az ilyen hivatást választók életéről, munkájáról a gyerekeknek és a szülőknek egyaránt.

II. fejezet

Matematikai tartalmak a médiában

A médiumokban meglepően gyakran jelenik meg a matematika. Mindennapi tapasztalat a matematika felbukkanására például árleszállítások reklámozása, választási eredmények vagy időjárás jelentések ismertetése, folyóiratokban megjelenő szám- és logikai rejtvények, stb. Ezek esetében szinte észre sem vesszük, hogy matematikával találkozunk.

A matematikai tartalmak közvetítésének legnyilvánvalóbb formája talán az ismeretterjesztő írásokban, műsorokban való megjelenítés.

Ugyanakkor nem elhanyagolható mértékben jelennek meg ilyen tartalmak a populáris médiában is.

Minthogy a társadalomban, de különösen a fiatalok körében az Internet világhálója vált, illetve válik az információ közvetítésének meghatározó médiumává, érdemes kicsit belepillantani abba is, mik a jellemzői az itt fellelhető matematikai tartalmaknak.

II.1. Matematikai tartalmak az ismeretterjesztő írásokban, műsorokban

A tudományos ismeretterjesztés részeként megjelenített matematikai tartalmak valójában a matematika tanításának egy speciális területét jelentik. Lényeges eltér azonban a közoktatástól abban, hogy a különféle médiumokon keresztül megvalósuló ”tanításhoz” a közönséget nem az államhatalom kényszeríti az iskolapadba, hanem egy kommunikációs piacon kell az érdeklődésüket és figyelmüket megnyerni. Ez lehetőségeire, módszereire és eredményeire nézve egyaránt meghatározó. Matematikai tárgyú tudományos ismeretterjesztő cikkek ma Magyarországon elsősorban az alábbi nyomtatott folyóiratokban jelennek meg: KöMaL, Élet és Tudomány; Természet Világa. (Ez utóbbi a világ egyik legrégebbi tudományos folyóirata. Elődje a Királyi Magyar Természettudományi Társulat

Évkönyveinek sorozata 1841-ben indult.) De jelennek meg matematikai tartalmakat bemutató ismeretterjesztő cikkek sok egyéb újságban a bulvárlapoktól kezdve a politikai napilapokig. E cikkek stílusa, matematikai tartalma és szakmai igényessége természetesen felettébb sokféle, a már gyakorlatilag hírlapi kacsának tekinthető hírektől egészen a valóban tudományos igényű ismeretterjesztő írásokig terjed.

Az internetes hírportálok jelentős részén is jelennek meg tudományos ismeretterjesztő hírek, cikkek, köztük matematikaiak is.

Jelenleg az ELTE TTK Tudománykommunikáció a természettudományban címmel nappali MSc képzés folyik.

II.2. Matematikai tartalmak a populáris médiában

A pop-kultúra részeként megjelenő matematikai tartalmak közül mi most a különféle filmekben megjelenő anyagokkal foglalkozunk részletesebben. Az anyag a kívülállók számára talán meglepő módon igen gazdag, bár a filmekben megjelenő matematikai általában csak „díszlet”. Gyakorta a készítők nem is veszik a fáradtságot, hogy „érvényes” matematikát használjanak fel a filmjükben, de nem kevés olyan film is készült, amelyben valódi matematika – vagy matematikai gondolat – jelenik meg. Itt néhány olyan filmet említünk meg, ahol a matematika nem csupán hangulatfestő halandzsa, hanem felismerhető, érvényes és tanulságos anyag. Természetesen a teljesség igénye nélkül.

A „szerencse” és az ezt vizsgáló valószínűségszámítás nagyon sok ember számára maga a misztikum. A véletlen, a szerencsejátékok jó kiindulás, izgalmas konfliktusforrás tud lenni, ezt számos filmben fel is használják. Ilyenek például:

Macsók és macák (Guys and Dolls), Rosencrantz és Gulidenstern halott, Kecskebűvölők, Tisztességtelen ajánlat, Casino; Las Vegas (TV sorozat), What Happens in Vegas, Ocean's Thirteen, stb. Az alábbiakban Wintsche Gergely előadása alapján egy, a *Kecskebűvölők*-ben megjelenő matematikai jellegű problémát elemezünk, majd a *Good Will Hunting* matematikai anyagát.

Kecskebűvölők (*The Men Who Stare at Goats, 2009)*

Bob Wilton (Ewan McGregor) riporter egy nap egy találkozik Lyn Cassady-vel (George Clooney), aki azt állítja, hogy paranormális képességekkel rendelkezik és egy különleges, kísérleti alakulatnak volt a katonája. Ezt az alakulatot az amerikai hadsereg hozta létre a szovjet fenyegetésre válaszul. Bill Django (Jeff Bridges), aki a program szülőatyja volt, eltűnik, így Cassady útnak indul, hogy felkutassa, és Bob úgy dönt, hogy elkíséri az útra.

Az alábbi két perces film részletben Bob egy érmét dobál fel, Cassady pedig előre megmondja, mi lesz a következő dobás eredménye. Saját állítása szerint 264 a rekordja ebben. https://drive.google.com/file/d/0B5J6TQ3OVWWvNFo1REJ5RThVbXM/view?usp=sh

De vizsgáljuk meg a filmben is szereplő fej vagy írás dobássorozatokat matematikailag is!

Egy sokak által ismert kísérlet, amikor a tanár azt kéri a tanulóktól, hogy az osztály egyik fele írjon le egy olyan F és I betűkből álló 200 karakter hosszúságú jelsorozatot, amiről azt gondolja, hogy egy valós fej-írás sorozat eredménye lehet. Az osztály másik fele pedig dobjon fel egy érmét 200-szor és írja le a dobott sorozatot. Mindkét csoportnak lesz egy 200 jelet tartalmazó F és I betűkből álló sorozata. A tanár nem tudja, hogy konkrétan melyik tanuló dobált érmét, és melyik írt kitalált sorozatot. (Például ezt korábban titkos sorsolással döntötték el.) Ezek után a tanár ránéz a sorozatokra és „nagy biztonsággal" megmondja, hogy a sorozat valóban a véletlen szülötte, avagy a kitalált fej írás sorozat.

Például meg tudnánk mondani, hogy az alábbi két mintasorozat közül melyik a „valódi"?

F	I	F	F	F	I	F	I	F	F	I	F	I	I	F	I	F	F	F	I
I	F	I	I	F	F	F	I	F	I	I	F	F	I	I	F	I	I	I	F
I	I	I	F	I	I	I	F	F	F	F	I	I	F	F	I	F	I	I	I
F	F	F	I	F	I	F	F	F	I	F	I	I	F	I	I	I	F	F	F
F	I	I	F	I	I	F	I	I	F	F	F	F	F	I	F	I	F	I	I
F	I	I	F	F	F	I	I	I	F	F	F	F	F	I	F	F	F	I	I
I	I	F	F	F	I	F	F	I	F	F	F	F	F	I	F	I	F	F	F
F	F	F	F	F	F	I	F	I	F	F	F	F	F	I	F	I	I	I	F
F	I	I	I	F	F	F	I	I	F	I	F	I	I	I	I	F	F	F	I
F	I	I	F	I	I	F	F	I	I	F	I	I	I	I	I	I	I	I	F

F	F	I	F	F	I	F	F	F	F	I	I	F	F	F	I	I	I	I	I
F	F	I	I	I	I	I	F	F	F	I	I	I	F	F	I	I	I	F	F
F	F	F	I	I	I	I	F	I	F	I	F	F	I	I	F	F	F	I	I
I	I	F	F	I	I	F	I	I	F	F	I	F	F	F	I	I	I	F	F
I	I	F	F	I	F	I	F	F	I	F	F	I	F	F	I	I	I	F	F
F	I	F	I	F	I	I	I	I	I	F	F	I	I	I	F	F	I	F	F
I	F	I	I	F	I	F	F	F	I	F	F	F	I	F	F	I	I	I	F
F	F	F	I	F	I	F	F	I	I	I	I	F	F	I	I	I	I	F	I
I	I	F	I	F	I	F	F	I	F	F	I	I	I	I	F	F	I	F	F
I	I	F	I	F	F	I	I	I	F	I	F	F	I	I	I	F	F	F	F

A példázatban szereplő tanár meg tudta mondani.

Hogyan lehetséges ez? Természetesen úgy, hogy a pénzfeldobással kapott fej-írás sorozatok bizonyos törvényszerűségeknek felelnek meg, amiket a tanulók által kitalált F-I sorozatok általában nem mutatnak. Kicsit konkrétabban: A tanulók általában maguktól nem mernek olyan hosszú homogén – vagy csak fej vagy csak írás – sorozatokat írni, mint amilyeneket az érme dobálása nagy valószínűséggel produkál.

De nézzük precízebben!

Ha egy érmét háromszor feldobunk, akkor a kapott sorozat nyilván az alábbiak valamelyike lehet csak:

FFF, FFI, FIF, IFF, FII, IFI, IIF, III

Ezek közül szabályos szabályos érme esetén mindegyik valószínűsége 1/8, azaz az eloszlás

A leghosszabb fej sorozat	0	1	2	3
P	1/8	4/8	2/8	1/8

A várható értéket is könnyen megkaphatjuk:

$E = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 4/8 + 2 \cdot 2/8 + 3 \cdot 1/8 = 11/8$

Az alábbi táblázatban látható néhány n-re a leghosszabb fej dobás sorozatok száma:

		A dobássorozat hossza										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A leghosszabb fej sorozat	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1		1	2	4	7	12	20	33	54	88	
	2			1	2	5	11	23	47	94	185	
	3				1	2	5	12	27	59	127	
	4					1	2	5	12	28	63	
	5						1	2	5	12	28	
	6							1	2	5	12	
	7								1	2	5	
	8									1	2	
	9										1	
	...											

Ha R_n jelöli egy n-hosszú dobássorozatban a leghosszabb fejsorozat hosszát, akkor

$$F_n(k) = P(R_n \le k),$$

vagyis $F_n(k)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy n-szer feldobott érme esetén a leghosszabb fejsorozat hossza nem nagyobb k-nál.

Ha $F_n(k)$-nel jelöljük azon n-hosszú sorozatok számát, ahol a leghosszabb fej sorozat legfeljebb$k$, akkor persze

$$F_n(k) = \frac{A_n(k)}{2^n}$$

Példa: ha $n \leq 3$, akkor $A_n(3) = 2^2$ $[A_0(3) = 1, A_1(3) = 2, A_2(3) = 4, A_3(3) = 8]$

Ha $n > 3$, akkor vágjuk szét az eseteket, attól függően, hogy mivel kezdődik: I, FI, FFI, FFFI, és eztán sem jön háromnál több fej egymás után:

$$A_n(3) = A_{n-1}(3) + A_{n-2}(3) + A_{n-3}(3) + A_{n-4}(3)$$

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$A_n(3)$	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773

Mint a táblázatbó látható$A_8(3) = 208$, vagyis a 8 hosszú dobássorozatok között a legfeljebb 3 hosszú fej (F) sorozatot tartalmazók száma 208.

Következésképpen az

$$F_8(3) = \frac{208}{2^8} = \frac{208}{256} \approx 0{,}8125.$$

Vagyis 8 dobásból álló sorozat esetén majdnem 20% annak az esélye, hogy legalább 4 fej következik egymás után.

Általános esetre felírva:

$$A_n(3) = \begin{cases} 2^n & n \leq k \\ \sum_{j=0}^{k} A_{n-1-j}(k) & n > k \end{cases}$$

Vagyis konkrét esetünkben

$$A_8(3) = A_7(3) + A_6(3) + A_5(3) + A_4(3) = 108 + 56 + 29 + 15 = 208$$

Könnyen megkaphatjuk azon esetek számát, amikor a leghosszabb fej sorozat hossza éppen k:

$$P(R_n = k) = A_n(k) - A_n(k-1)$$

Például 50, 100 és 200 fej-írás sorozatban a maximális hosszú fej (F) sorozatok eloszlása:

Ha csak a leghosszabb fej vagy írás sorozat érdekel minket, azaz a homogén futamok, akkor a korábbiakból könnyen kaphatjuk.

Legyen $B_n(k)$ az n hosszú dobássorozatok közül a legfeljebb k hosszú homogén sorozatot tartalmazók száma, és $B_n(0) = 0$.

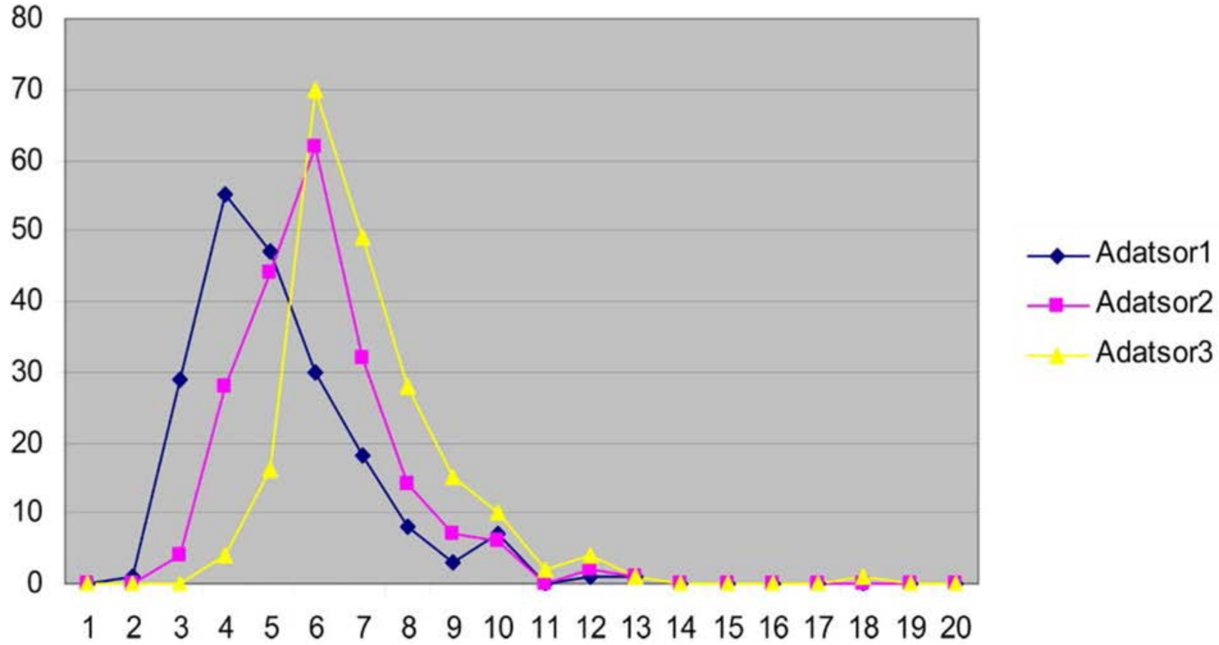
$$B_n(k) = 2A_{n-1}(k-1) \qquad k \geq 1$$

Az n hosszú sorozatbnan, ahol egyformák jönnek egymás után, ott írjunk F-et, ahol különbözők, ott I-t, azaz

F I F F I F F I F F F F F F I I I I

I I F I I F I I F F F F F I F F F

A nem szabályos érme esete: $p \neq \frac{1}{2}$



Hasonló rekurziót lehet felírni, csak szét kell vágni az összes fej száma szerint.

Ha $C_n^{(i)}(k)$ jelöli az n hosszú dobássorozatban a pontosan i fejet tartalmazök közül azokat, amelyek legfejlebb k egymás utáni fejet tartalmaznak, akkor

$$F_n(k) = \sum_{i=0}^{n} C_n^{(i)}(k) p^i q^{n-i}$$

Térjünk vissza a kezdeti kérdéshez.

Empirikus választ adunk a leghosszabb fej sorozat hosszára:

Egy fej sorozat (megengedünk 0 hosszút is) előtt kell állnia egy írásnak. Az írásnak. Az írások száma $\approx nq$.

$npq \approx$ minimum 1 fej (F) van benne;

$npq^2 \approx$ minimum 2 fej (F) van benne;

$npq^3 \approx$ minimum 3 fej (F) van benne;

$npq^k \approx$ minimum k fej (F) van benne

$npq^{R_n} \approx 1$ (R_n jelölta a leghosszabb fej sorozat hosszát)

$\log_p(nq) + R_n \approx 0$

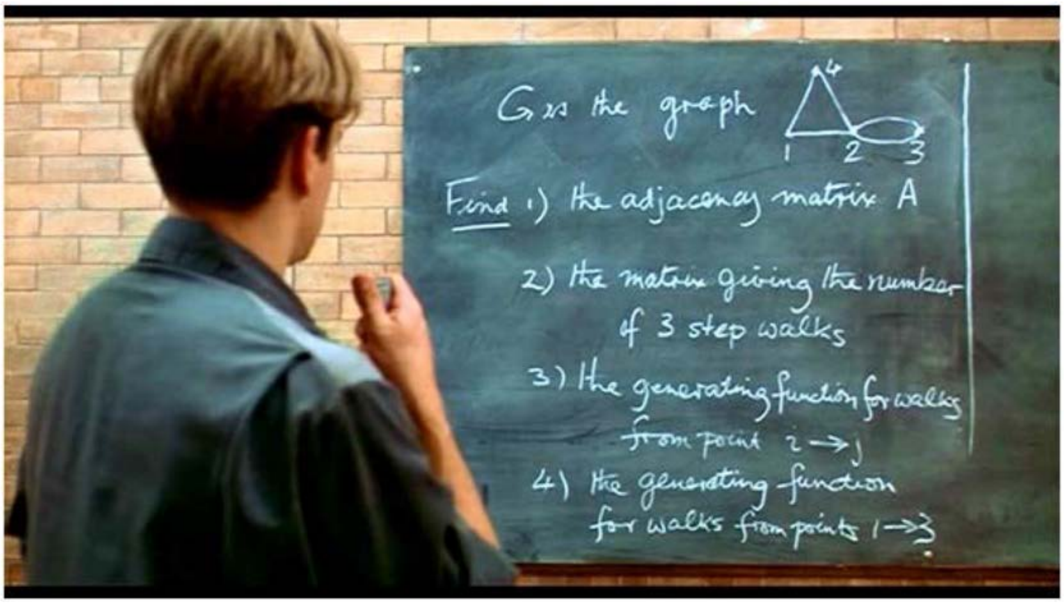
$R_n \approx \log_{1/p}(nq)$, ha $p = \dfrac{1}{2}$, akkor $R_n \approx \log_n n - 1$

Good Will Hunting

A cselekményre már utaltunk korábban.

A filmben több helyen is előfordulnak felismerhető, megvizsgálható matematikai feladatok, anyagok.

I. Elsőként, még a film elején azon a bizonyos tanszéki táblán a folyosón. A feladatok – Fourier transzformáció helyett – a következők:



Vagyis:

G egy gráf

Határozzuk meg

1. az A szomszédsági-mátrixot

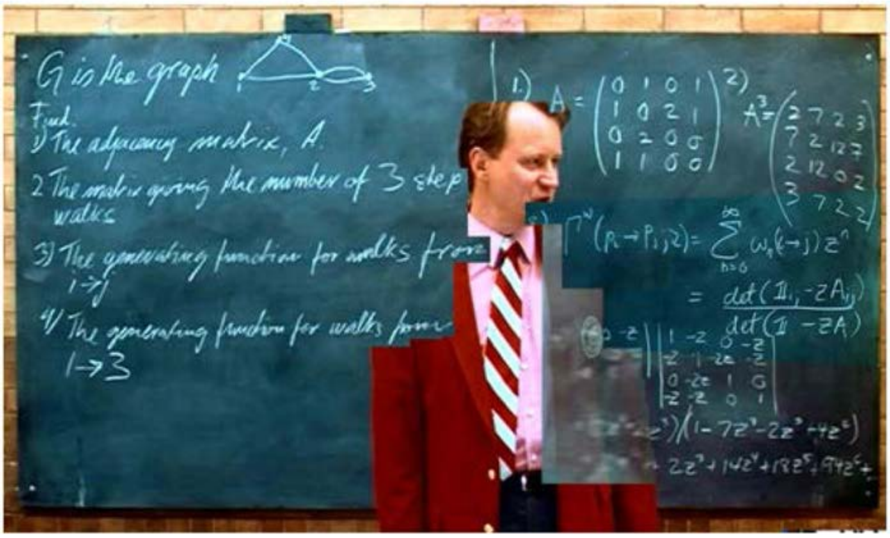
2. azt a mátrixot, amely megadja a 3-hosszú séták számát

3. az $i \Rightarrow j$ *séták generátorfüggvényét.*

4. az $1 \Rightarrow 3$ *séták generátorfüggvényét*

Will – a forgatókönyv szerint – természetesen könnyedén megoldja a feladatokat, a megoldást fel is írja a táblára – sajátos módon ugyanazzal az írással, mint amivel eredetileg a feladatok voltak láthatóak. Viszont az eredeti feladatok írásképe időközben megváltozott a táblán. (A filmet nézve ez egyáltalán nem feltűnő.) A filmben a táblára írt megoldás felfedezésekor a tábla előtt Lambeau professzor folyamatosan takart. Szerencsére közben mozgott is, így mintegy tíz különböző képkockából össze lehetett montírozni egy aránylag teljes táblaképet. A megoldás egy része még így sem olvasható, de a láthatóakból kitalálható, megalkotható.

Vagyis:



1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\Gamma^{\omega}\left(p_i \to p_j, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \left(i \to j\right) z^n = \frac{\det\left(\mathbf{1}_{ij} - zA_{ij}\right)}{\det\left(\mathbf{1} - zA\right)}.$$

4.

$$\begin{vmatrix} -z & 0 & -z \\ 1 & -2z & -z \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & -z \\ -z & 1 & -2z & -z \\ 0 & -2z & 1 & 0 \\ -z & -z & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{2z^3 + 2z^2}{4z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 1} = 2z^2 + 2z^3 + 14z^4 + 18z^5 + 94z^6 + \ldots .$$

Hogyan juthatunk el ezekhez a megoldásokhoz?

1. A szomszédsági-mátrix fogalma könnyen elmagyarázható akár gimnazistáknak is:

Legyen A a mátrix, ahol $[A]_i^j$ az $i \to j$ élek száma.

Most jelölje $\omega_n(i \to j)$ az n hosszú $i \to j$ séták számát. Vegyük észre, hogy az 1 hosszú $i \to j$ séták száma az $[A]_i^j$ elem, azaz $[A]_i^j = \omega_1\left(i \to j\right)$. Indukcióval belátható, hogy A^n kódolja az n hosszú séták számát egyik csúcsból a másikba. Valóban, egy $n+1$ hosszú séta i-ből j-be egy n hosszú i–k sétából (valamely k-ra) és egy 1-hosszú k–j sétából áll. Az $n+1$ hosszú séták számához össze kell adnunk ezt a két számot minden k csúcsra. Azaz

$$\omega_{n+1}(i \to j) = \sum_{k=1}^{n} \omega_n(i \to k)\, \omega_1(k \to j)\,.$$

Az indukciós feltétel szerint $\omega_n(i \to k)$ az ik eleme A^n-nek, és $\omega_1(k \to j) = [A]_k^j$, tehát

$$\omega_{n+1}(i \to j) = \sum_{k=1}^{n} \omega_n(i \to k)\, \omega_1(k \to j)$$

az ij-edik eleme A^{n+1}-nek, a mátrixszorzás szabályai szerint. A konkrét G gráfra a 3-hosszú séták számát A^3 adja meg, amely könnyen ellenőrizhetően ugyanaz, mint amit a film szerint Will Hunting a táblára írt. Ez az érvelés érthető bármely diáknak, aki elvégzett egy bevezető lineáris algebra kurzust. (2. félév ELTE-n és DE-n, 1. félév SzTE-n).

A harmadik feladat az $i \to j$ séták generátorfüggvényének megadása. Ez a fogalom olyan diákoknak is elmagyarázható, akik amúgy nem ismerik a hatványsorok és analitikus függvények általános elméletét.

Ez egyelőre csak egy formális végtelen kifejezés.

Ebben az esetben viszont nemkommutatív gyűrűk (konkrétan az $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixgyűrű) feletti hatványsorokra van szükség.

Ezért analízisre alapozzuk a generátorfüggvény-elméletünket. A generátorfüggvény tehát legyen egy analitikus függvény, amit a $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(i \to j) \cdot z^n$ hatványsorával adunk meg, azaz z^n együtthatója az n hosszú $i \to j$ séták száma. A generátorfüggvény-elmélet csak a hatványsorok elméletét használja analízisből.

Az analízis fogalmai és tételei tekintetében [29]-re hivatkozunk, generátorfüggvény-módszer és kombinatorikus alkalmazások pedig [5]-ben találhatóak. Már láttuk az előző feladat megoldásánál, hogy $\omega_n(i \to j)$ az i-edik sor j-edik eleme A^n-ben. Minthogy a feladat meghatározni az összes generátorfüggvény-t egyszerre, ezt kézenfekvő módon úgy tehetjük meg, hogy mátrixba rendezzük őket. Innen már nem túl nagy ugrás a mátrixhatványsor vizsgálata. Viszont a mátrix-hatványsor nem része az analízisórák anyagának, tehát némi magyarázatra van szükség.

Hogyan definiálhatjuk mátrixsorozatok konvergenciáját? A legközelebbi fogalom a konvergencia normált vektorterekben, pl. $\mathbb{R}^n$-ben.

Ha az $n \times n$-es mátrixok terét egyszerűen n^2 dimenziós vektortérnek tekintjük, az normált tér lesz, pl. a standard euklideszi távolsággal. Minthogy véges dimenziós, így bármely két norma ekvivalens. Tehát használhatjuk a pontonkénti konvergenciát, azaz egy mátrixsorozat konvergens, ha minden eleme konvergens sorozat $\mathbb{R}$-ben. Sőt, az előbbiek szerint minden számítást elvégezhetünk formálisan, a szokásos mátrixösszadással és szorzással. Tehát minden $f_{i,j}(z)$ generátorfüggvény konvergens (a 0 egy környezetében) akkor és csak akkor, ha a

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n$ mátrixsorozat konvergens (0 környezetében). Vizsgáljuk meg ezt a mátrix-sorozatot. A szokásos mértani sor-érvelés szerint:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} A^n \cdot z^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (Az)^n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(I - (Az)^{k+1}\right) \cdot (I - Az)^{-1} = (I - Az)^{-1}. \quad \text{(II.1)}$$

Még mindig meg kell mutatnunk, hogy (II.1) egyenlőségei teljesülnek, és minden lépés értelmes. Azaz, meg kell határoznunk azon z-k halmazát, melyre $\lim_{k\to\infty} \left(I - (Az)^{k+1}\right) = I$, és melyre az $I - Az$ mátrix invertálható. Az utóbbi kérdés könnyen eldönthető: $I - Az$ invertálható akkor és csak akkor, ha $z\lambda \neq 1$ az A egyetlen λ sajátértékére sem. Ezzel véges sok z-t kizártunk. Megadható egy tartomány is, amely minden z elemére teljesül, a $z\lambda \neq 1$ feltétel. Legyen μ a legnagyobb abszolút értékű sajátértéke A-nak. Ekkor $I - Az$ invertálható, ha $|z| < 1/|\mu|$.

Most vizsgáljuk meg az $\lim_{k\to\infty} (Az)^k$ határértéket. Legyen J az A normálalakja, vagyis van olyan invertálható Q, hogy $J = Q^{-1}AQ$ csak Jordan-blokkokból áll. Ekkor $A = QJQ^{-1}$ tehát $(Az)^k = A^k z^k = QJ^kQ^{-1}z^k$. Ha A egy $n\times n$-es mátrix, akkor J^k elemei felülről becsülhetők $k^n|\mu|^k$-nal. Mivel ugyanis A szimmetrikus, J diagonális, tehát J^k elemeit becsli $|\mu|^k$. Q elemei és Q^{-1} konstansok. Tehát

$$\lim_{k\to\infty} (Az)^k = \lim_{k\to\infty} QJ^kQ^{-1}z^k = 0,$$

ha $|z| < 1/|\mu|$, tehát $\lim_{k\to\infty} \left(I - (Az)^{k+1}\right) = I$ ugyanabban a környezetben. Ezt a technikát az ELTE-n Algebra 2-ből, DE-n Lineáris algebra 2-ből SzTE-n Lineáris algebrából tanítják.

Végül ki kell számolnunk $I - Az = I - zA$ inverzét. A szokásos Gauss-eliminációs módszer kevéssé segít, mivel z egy változó $I - zA$-ban, és nehéz vele számolni. De a mátrix inverze Cramer-szabállyal is kiszámítható, aldeterminánsok segítségével.

Egy M mátrixra legyen M_{ij} az i-edik oszlop és a j-edik sor elhagyásával kapott mátrix. Ekkor M adjungált mátrixa az az N, mely i-edik sorának j-edik eleme $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$. A Cramer-szabály szerint ha M invertálható, akkor $M^{-1} = N/\det M$. Azaz az M^{-1} mátrix ij indexű eleme $(-1)^{i+j} \det M_{ij}/\det M$. Ezt a harmadik feladatra alkalmazva, $M = I - zA$-val, kapjuk, hogy a generátorfüggvény az $i \to j$ sétákra a

$$(-1)^{i+j} \det(I_{ij} - zA_{ij}) / \det(I - zA)$$

törttel egyenlő. Ez majdnem ugyanaz, mint Will megoldásában, kivéve a $(-1)^{i+j}$ tényezőt az elején. Néha a det() jelölés tartalmazza a $(-1)^{i+j}$ tényezőt is, de az is lehet, hogy csak a filmkészítők néztek el valamit. Egy másik különbség, hogy Will az egységmátrixot 1-gyel jelölte I helyett.

A negyedik feladatban meg kell adnunk az $1 \to 3$ séták generátorfüggvényét. Az általános formula ismeretében nem nehéz behelyettesíteni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (1 \to 3) z^n = (-1)^{1+3} \det (I_{13} - zA_{13}) / \det (I - zA) =$$

$$= \begin{vmatrix} -z & 0 & -z \\ 1 & -2z & -z \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & -z \\ -z & 1 & -2z & -z \\ 0 & -2z & 1 & 0 \\ -z & -z & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{2z^3 + 2z^2}{4z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 1}.$$

Semelyik diáknak, aki elvégezte a bevezető lineáris algebrát nem okozhat problémát megkapni ezt a formulát. Itt -1 a számlálónak és a nevezőnek is az egyik gyöke, tehát egyszerűsíthetünk $z + 1$-gyel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (1 \to 3) z^n = \frac{2z^3 + 2z^2}{4z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 1} =$$

$$= \frac{(z+1) 2z^2}{(z+1)(4z^3 - 6z^2 - z + 1)} = \frac{2z^2}{4z^3 - 6z^2 - z + 1}.$$

Hogy megkapjuk a hatványsor együtthatóit, ki kell számolnunk a függvény Taylor-sorát.

Alkalmazzuk az analízisből jól ismert $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ formulát, ahol $f^{(n)}(0)$ az f-nek az n-edik deriváltja a 0-ban, és $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, az egész számok szorzata 1-től n-ig (és $0!$ megállapodás szerint 1). Itt $f(z) = 2z^2 / \left(4z^3 - 6z^2 - z + 1\right)$, tehát ennek a deriváltjait kell megkeresnünk 0-ban. Legyen $h(z) = 2z^2$, $g(z) = 4z^3 - 6z^2 - z + 1$, ekkor $f(z) = h(z) / g(z)$. Will az első hat tag együtthatóját adta meg, amit f első hat deriváltjának kiszámolásával kaphatunk meg. Minthogy f két polinom hányadosa, igen fáradságos lehet ezt kézzel kiszámolni. Ezért egy egyszerű trükköt alkalmazunk a számítás idejének csökkentésére. $h/g = f$, tehát $h = fg$, és $h^{(k)} = (fg)^{(k)}$. A binomiális tétel segítségével könnyen megadhatóak a deriváltak. Most $h'(z) = 4z$, $h''(z) = 4$, $h'''(z) = 0$, $g'(z) = 12z^2 - 12z - 1$, $g''(z) = 24z - 12$, $g'''(z) = 24$, $g^{(4)}(z) = 0$, tehát egy lineáris egyenletrendszert kapunk az f 0-beli deriváltjaira:

$$\begin{aligned}
(0) &= f(0)g(0) && \Longrightarrow f(0) = 0, \\
h^{(1)}(0) &= f^{(1)}(0)g(0) + f(0)g(0) && \Longrightarrow f^{(1)}(0) = 0, \\
h^{(2)}(0) &= f^{(2)}(0)g(0) + 2f^{(1)}(0)g^{(1)}(0) && \\
&\quad + f(0)g^{(2)}(0) && \Longrightarrow f^{(2)}(0) = 4, \\
h^{(3)}(0) &= f^{(3)}(0)g(0) + 3f^{(2)}(0)g^{(1)}(0) && \\
&\quad + 3f^{(1)}(0)g^{(2)}(0) + f(0)g^{(3)}(0) && \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 12, \\
h^{(4)}(0) &= f^{(4)}(0)g(0) + 4f^{(3)}(0)g^{(1)}(0) && \\
&\quad + 6f^{(2)}(0)g^{(2)}(0) + 4f^{(1)}(0)g^{(3)}(0) && \\
&\quad + f(0)g^{(4)}(0) && \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 336,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{(5)}(0) &= f^{(5)}(0)g(0) + 5f^{(4)}(0)g^{(1)}(0) \\
&\quad + 10f^{(3)}(0)g^{(2)}(0) + 10f^{(2)}(0)g^{(3)}(0) \\
&\quad + 5f^{(1)}(0)g^{(4)}(0) + f(0)g^{(5)}(0) && \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 2160, \\
h^{(6)}(0) &= f^{(6)}(0)g(0) + 6f^{(5)}(0)g^{(1)}(0) \\
&\quad + 15f^{(4)}(0)g^{(2)}(0) + 21f^{(3)}(0)g^{(3)}(0) \\
&\quad + 15f^{(2)}(0)g^{(4)}(0) + 6f^{(1)}(0)g^{(5)}(0) \\
&\quad + f(0)g^{(6)}(0) && \Longrightarrow f^{(6)}(0) = 67680.
\end{aligned}$$

A megfelelő faktoriálisokkal leosztva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (1 \to 3) z^n = 2z^2 + 2z^3 + 14z^4 + 18z^5 + 94z^6 + \dots,$$

ami ismét egyezik azzal, amit Will a táblára írt.

II.

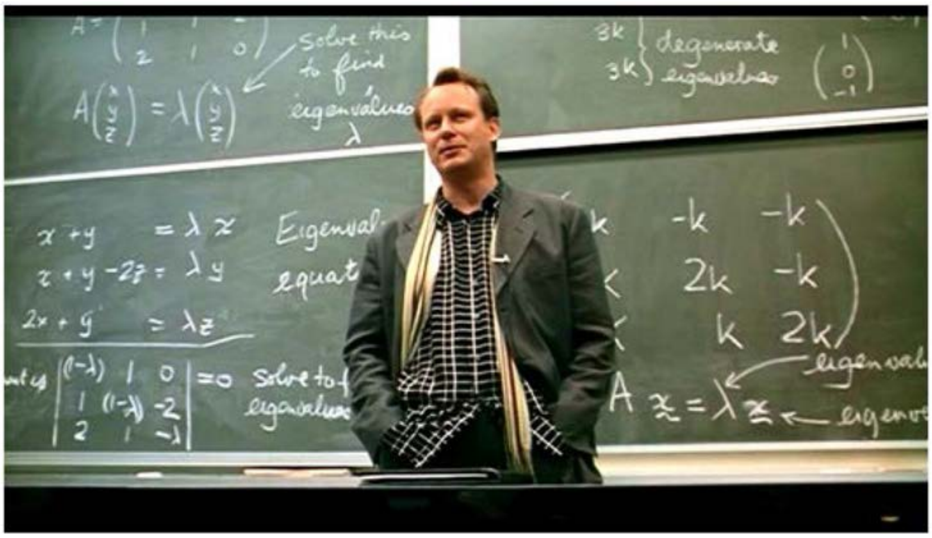
Amikor Gerald Lambeau bemegy a nagy előadóba, ahol rengeteg diák várja a titkos megfejtő kilétének felfedését, a háttérben két feladatot látunk a táblán, megoldásaikkal együtt.

Mindkettő lineáris algebrai feladat, egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásáról szólnak.

A bal oldali táblán elmagyarázzák, hogyan kell az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit kiszámolni. Ennek a mátrixnak egy valós (irracionális) és két komplex sajátértéke van. Ezeket egy harmadfokú egyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Mivel a valós sajátérték sem kellemes, ezért aszokásos eljárást – a



harmadfokú polinom leosztását a valós gyöktényezővel – nem kényelmes. Ez a feladat inkább a Cardano-formula alkalmazását igényelné, melyet az ELTE-n Algebra 1-ből (1. félév), a DE-n Bevezetés az algebrába és számelméletbe (2. félév), az SzTE-n Klasszikus algebrából (2. félév) tanítanak.

A második feladat a táblán szintén egy sajátérték-számítási feladat az

$$A = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ k & 2k & -k \\ k & k & 2k \end{pmatrix}.$$

mátrix sajátértékeinek meghatározása található – bizonyos értelemben. A filmben efölött a mátrix fölött látható, hogy a 0 és a $3k$ két sajátérték, és itt a $3k$ multiplicitása kettő (a táblán elfajuló sajátértéknek nevezik). Elolvashatjuk a hozzájuk tartozó sajátvektorokat is. Azonban sem a 0, sem a $3k$ nem sajátvektora az A mátrixnak (kivéve, ha $k = 0$). Ezért úgy gondoljuk, hogy a filmkészítők itt hibáztak, és a szimmetrikus

$$B = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

mátrixot akarták a táblára írni. Könnyen ellenőrizhető, hogy B három sajátértéke 0, $3k$, $3k$. A 0-hoz tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a kétdimenziós sajátalteret pedig a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

vektorok generálják.

III. Fák

A folyosó tábláján szereplő második feladatot kifejezetten az első feladat megoldójának írták fel. Két részből áll:

A feladatok magyarul:

a) Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?

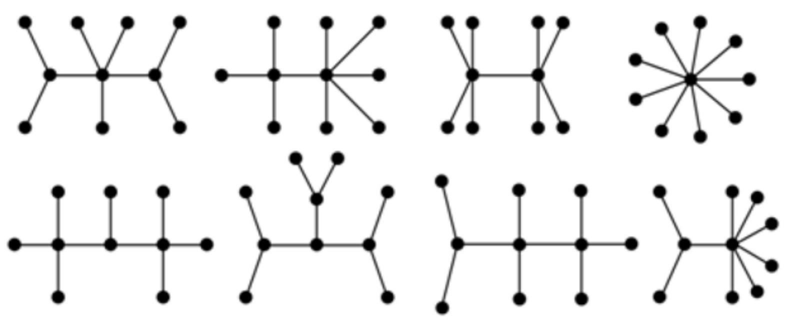
b) Rajzolja le az összes homeomorfikusan felbonthatatlan fát $n = 10$ *esetén!*

Will megadja az n^{n-2} megoldást az első kérdésre, és lerajzol nyolc gráfot a második kérdésre válaszul. Az első kérdéshez tartozó eredmény Cayley-formula néven ismert [10], de először Borchardt [9] fedezte fel 1860-ban [9]. Számos különböző bizonyítása létezik, a legismertebb talán Prüferé [30], aki ún. Prüfer-kódot rendelt hozzá a fákhoz.

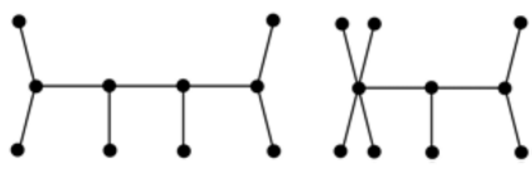
Cayley tétele ezzel a bizonyítással szerepel az ELTE Véges matematika 1 (1. félév) kurzusában, így itt nem részletezzük.

Most nézzük a második feladatot. Egy fagráfot homeomorfikusan irreducibilisnek nevezhetünk, ha nincs másodfokú csúcsa. Az első eredmény ilyen fákról Haray és Prins [22] nevéhez köthető. Például felsorolják az összes ilyen fát legfeljebb 12 csúcson, speciálisan a 10-csúcsúakat is. Elemi gráfelmélet eredményeket használva mi is megtalálhatjuk az összes ilyen 10-csúcsú fát.

Érdekes, hogy a készítők matematikai értelemben hibát követtek el: Will csak 8 fát rajzol a táblára:



Pedig még két ilyen fa létezik:

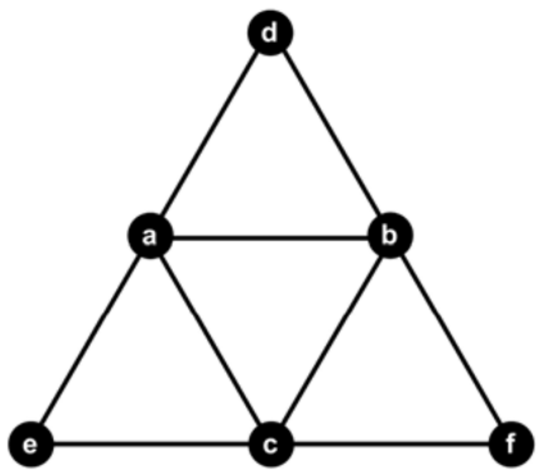


Számozzuk a csúcsokat 1-től 10-ig, fokszámaik pedig legyenek $d_1, \dots, d_{10}$. Tegyük fel, hogy a csúcsok fokszám szerint nem növekvően vannak sorbarendezve. A fokszámok összege 18, hiszen egy 10-pontú fának 9 éle van. Ha l darab levél és $10-l$ darab nemlevél van, akkor a fokszámösszeg legalább $l+3\cdot(10-l) = 30-2l$, tehát $l \geq 6$. Ha 9 levél és 1 nemlevél van, csillagot kapunk. Ha 8 levél van, akkor $d_1 + d_2 = 10$ és $d_1 \geq d_2 \geq 3$, tehát $d_1 = 7$ és $d_2 = 3$ vagy $d_1 = 6$ és $d_2 = 4$ vagy $d_1 = d_2 = 5$. Mindhárom, a feltételnek – ne legyen benne másodfokú pont – megfelelő fát ad, ahol az 1. és 2. csúcs össze van kötve, a levelek pedig a maradék foknak megfelelően vannak hozzájuk kötve. Ha 7 levél van, akkor $d_1 + d_2 + d_3 = 11$ és $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 3$. Tehát vagy $d_1 = d_2 = 4$ és $d_3 = 3$, vagy $d_1 = 5$ és $d_2 = d_3 = 3$. Az első esetben két különböző fát kapunk: egyet, ha a két negyedfokú csúcs össze van kötve, és egyet, ha nem. A második eset szintén két fát ad: egyet, amikor a két 3-fokú csúcs nincs összekötve, és egyet, amikor igen. Ez utóbbi hiányzik a tábláról, amit valószínűleg a készítők felejtettek le, és nem a film matematikus szakértői. Végül, ha 6 levél van, akkor $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 12$, $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq 3$, tehát $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$. Ez további két fát ad: egyet, amikor az egyik 3-fokú csúcshoz nem csatlakozik levél, és egyet, amikor nincs ilyen csúcs. Ez utóbbi szintén hiányzik a tábláról, ami egy újabb (matematikai) hiba a filmben. Összesen 10 (és nem 8) másodfokú pontot nem tartalmazó fa van 10 csúcson.

Az irodalomjegyzékben szereplő [5] könyvben bővebben lehet homeomorfikusan irreducibilis fákról olvasni.

IV. Kromatikus polinom

A probléma, melyet Gerald Lambeau és Will Hunting együtt old meg az, hogy adjuk meg a 3-napgráf (azaz a *csúcsok* a, b, c, d, e, f, az élek ab, ac, ad, ae, bd, bf, ce, cf) kromatikus polinomját. Ez egy síkgráf, amely úgy néz ki, mint például egy háromszög a középvonalaival.



Általánosságban napgráfoknak nevezzük az olyan $2n$-pontú gráfokat, melyek előállnak úgy, hogy tekintünk egy n-pontú teljes gráfot 1-től n-ig számozott csúcsokkal, és minden 1-2, 2-3, ..., $(n-1)$-n és n-1 csúcspár mindkét tagját összekötjük egy-egy újabb ponton keresztül.

Egy G gráf kromatikus polinomja az a $p_G(k)$ függvény, amely megadja a gráf jólszínezéseinek számát k szín esetén. Egy csúcsszínezést jólszínezésnek nevezünk, ha szomszédos csúcsok különböző színűek. Bonyolultságelméleti szempontból nehéz (NP-nehéz) feladat a minimálisan szükséges színszám meghatározása. Természetesen a kromatikus szám az a legkisebb pozitív egész szám, amely nem gyöke a kromatikus polinomnak. Tehát általános esetben a kromatikus polinom meghatározása is NP-nehéz. Konkrét gráfokra viszonylag könnyű lehet a polinom megadása, például egy n-csúcsú teljes gráfé $k(k-1)\dots(k-n+1)$, míg az üres gráfé egyszerűen k^n.

Már az is érdekes, hogy ez a $p_G(k)$ függvény valóban polinom. Foka legfeljebb n, ha G-nek n csúcsa van. Ez például a következőképp mutatható meg: Egy jólszínezés színosztályokba partícionálja a csúcsokat, mindegyik osztály egy független csúcshalmaz. Mivel G véges, csak véges sokféleképp lehet így partícionálni. Tehát a színezések száma kiszámítható az adott partíciót adó színezések külön számolásával, majd ezek összegzésével. Legyen P egy partíció d független halmazra. Ekkor az első független halmazt k-féleképpen színezhetjük, a másodikat $(k-1)$-féleképpen stb., az utolsót $(k-d+1)$-féleképpen, tehát az ilyen színezések száma $k(k-1)\dots(k-d+1)$. Ez egy k-ban d-edfokú polinom, ahol $d \leq n$.

Számoljuk meg a k színű jólszínezések számát. Az a csúcsot k színnel színezhetjük, ami $(k-1)$ színt hagy a b csúcs színezésére. Ekkor $(k-2)$ színünk marad a c csúcs színezésére. Végül a maradék három csúcs egymástól függetlenül $k-2$ színnel színezhető, mivel csak két már színezett szomszédjuk van. Tehát $p_G(k) = k\,(k-1)\,(k-2)^4$, ahogy Will Hunting és Gerald Lambeau a filmben együtt kitalálta.

A filmben azonban szemlátomást más módon kapták ezt az eredményt. Az alábbiakban konstruálunk egy olyan gondolatmenetet, ami formailag is a táblán szereplő értéket adja.

1. Lemma. *Ha G és H két gráf, melyek egy teljes gráfban metszik egymást, akkor*

$$p_{G\cup H}(k) = \frac{p_G(k)p_H(k)}{p_{G\cap H}(k)}.$$

Bizonyítás. Először színezzük $G\cap H$-t. Itt $G\cap H$ egy teljes gráf, tehát minden csúcsa különböző színű. Rögzítsük tehát egy jólszínezését, és legyen q_G a G ezt kiterjesztő jólszínezéseinek száma. Vegyük észre, hogy $G\cap H$ egy másik jólszjnezését ugyanúgy q_G féleképpen terjeszthetjük ki G-re. Tehát $p_G(k) = p_{G\cap H}(k)\cdot q_G(k)$. Hasonlóképpen, legyen q_H a H-ra kiterjedő színezések száma. Ekkor $p_H(k) = p_{G\cap H}(k)\cdot q_H(k)$. Na, most $p_{G\cup H}(k)$ kiszámolható úgy, mint hogy leszámláljuk, hányféleképpen terjeszthető ki $G\cap H$ a $G\cup H$ egy jólszínezésévé. Mivel $G\setminus(G\cap H)$ és $H\setminus(G\cap H)$ függetlenek, azt kaptuk, hogy

$$p_{G\cup H}(k) = p_{G\cap H}(k)\cdot q_G(k)\cdot q_H(k) = \\ = \frac{p_{G\cap H}(k)\cdot q_G(k)\cdot p_{G\cap H}(k)\cdot q_H(k)}{p_{G\cap H}(k)} = \frac{p_G(k)\cdot p_H(k)}{p_{G\cap H}(k)},$$

amit be akartunk bizonyítani. □

A gráfok számára vonatkozó teljes indukcióval azonnal belátható, hogy

1. Következmény. *Ha G_1, G_2, ... , G_d olyan gráfok, hogy bármely kettő ugyanabban a teljes gráfban metszi egymást, akkor*

$$p_{G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_d}(k) = \frac{p_{G_1}(k) p_{G_2}(k) \dots p_{G_d}(k)}{p_{G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_d}(k)^{d-1}}.$$

Most válasszuk G_1-et az a, b, c, d csúcsok által kifeszített részgráfnak, G_2-t az a, b, c, e, G_3-at az a, b, c, f által kifeszítettnek. Tekintsük a G_1 gráfot. Itt az a csúcsot k-féleképpen színezhetjük, a b csúcsot $k-1$-féleképpen, c-t és d-t függetlenül $k-2$-féleképpen. Ugyanez az érvelés működik G_2-re és G_3-ra. Tehát $p_{G_i}(k) = k\,(k-1)\,(k-2)^2$. A teljes 3-csúcsú gráf kromatikus polinomja $k(k-1)(k-2)$, tehát a 1. Következményből kapjuk, hogy

$$p_G(k) = p_{G_1 \cup G_2 \cup G_3}(k) = \frac{p_{G_1}(k) p_{G_2}(k) p_{G_3}(k)}{p_{G_1 \cap G_2 \cap G_3}(k)^2} = \frac{k^3\,(k-1)^3\,(k-2)^6}{k^2\,(k-1)^2\,(k-2)^2}.$$

Ez a képlet most már tényleg pontosan ugyanaz, mint a filmben látható.

Kromatikus polinomról további feladatokhoz ld. [27, 9.36.–9.49 feladatok] vagy [26].

Egyéb filmekben is fordulnak elő korrekt, vagy legalábbis felismerhető, beazonosítható matematikai tartalmak. Például:

Az It's My Turn" című amerikai filmben (1980) a Snake-lemma teljes, korrekt bizonyítása elhangzik.

https://www.youtube.com/watch?v=etbcKWEKnvg

A Gyilkos számok egy epizódjának feldolgozásából Pártos Boglárka készített TDK dolgozatot, és szakdolgozatot.

http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2012/partos_boglarka_andrea.pdf

II.3. Matematikai tartalmak az interneten

Az Interneten rendkívül sokféle matematikai tartalom található mind mélységét, mind színvonalát illetően. De maga a mennyiség is rendkívül nagy, ezeket katalogizálni nincsen sem idő a kurzus óráin, sem hely ebben a jegyzetben. A kurzuson kutatási feladat szokott lenni egy pozitív és egy negatív példa keresése matematikai ismeretterjesztő oldalra. Természetesen a „pozitív" és a "negatív" is számos szempont, tartalmi és formai jegyek alapján kerül megítélésre.

II.4. Saját matematikai tartalom megjelenítése

A kurzus hallgatói feladatai közé tartozik annak végiggondolása és rendszerbe szedése, hogy mely szempontok fontosak egy matematikai tárgyú írásbeli interjú vagy ismeretterjesztő cikk esetén. Az összegyűjtött szempontok segítséget tudnak nyújtani a saját interjú, illetve cikk elkészítésében.

Mivel a nyomtatásban megjelenő anyagoknál igen nagy fontossággal bír a tipográfia, ezért összegyűjtöttünk pár fontosabb tudnivalót a tipográfiáról:

Az ismeretek továbbadásának egyik leggyakoribb módja az írásban való közlés. Az írásbeliség története többezer évre nyúlik vissza. A legelső ismert írásos emlékek 5000 évvel ezelőttről, a suméroktól származnak. Már ezen feljegyzések egy része is matematikai tárgyú volt: számszerű nyilvántartások, vagyon, örökség, föld elosztásáról szóló szerződések. Ugyanebből az időből találtak matematikai feladványokat is.

http://www.nytimes.com/2010/11/23/science/23babylon.html?_r=0

A rendszeresen leírt (általában szignó) szövegekhez pecsétnyomót készítettek, ez tekinthető a nyomtatás első formájának. A pecsét kialakításának egyedinek, esztétikusnak és célszerűnek kellett lennie. Az agyagba vésést felváltotta a papiruszra tintába mártott madártollal történő írás. Az európai nyomtatás kialakulásáig ez, a kézírás volt a legelterjedtebb, és az is rendelkezett a korábban szükséges jegyekkel: egyediség, esztétika, célszerűség. Jóval később, a 15. században alakult ki Európában a nyomdászat (Gutenberg), amelynek alapjául – a pecsétnyomóhoz hasonlatosan – előre kiöntött betűk szolgáltak. Ezekből állították össze egy fatáblára a szöveget (tükörfordítva), amelyet aztán megfestékezve papírra nyomtattak, akár több példányban is. A nyomtatott szöveg megjelenésével újabb fontos funkció lépett be a szövegírásba: az egységesség. A betűk az öntőformáknak köszönhetően szinte teljesen egyformák voltak. A nyomtatással egyidőben fogalmazódtak meg fontos igények a nyomtatott szövegekkel kapcsolatban.

1. A nyomtatási kép esztétikusa (formai jegy)

2. Olvashatóság (formai-tartalmi jegy)

3. Tartalomhoz illő külső (formai-tartalmi jegy)

4. Egységes megjelenés (formai jegy)

5. Érthetőség (tartalmi jegy)

Nehéz pontosan meghatározni, hogy a tipográfia művészet-e vagy tudomány, hiszen fontosak az esztétikai jegyek, viszont nem elegendő csak ezeket ismerni és követni. A betűk megtervezése például nem lehet csak esztétikai kérdés. Az arányában komponált képeket esztétikusabbnak látjuk, a szimmetria szép a szemnek. Ugyanakkor nem áldozhatjuk fel az olvashatóságot az esztétikum oltárán. Ma már a tipográfia legfontosabb célja, hogy a nyomtatott formában megjelenő tartalomnak megfelelő hangsúlyt adjon. A tipográfiába tartozik

1. a betűk, betűcsaládok kiválasztása

2. a nyomtatási méretek meghatározása

3. a szöveg esztétikus elrendezése

4. a kiemelések rendszerének megtervezése

5. a címrendszer beállítása

6. a grafikák alkalmas elhelyezése (és természetesen a grafika és a szöveg összhangjának megteremtése)

Szakmai – például matematikai – szövegek esetében a tipográfiával szemben támasztott követelmények még fontosabbak, mint például a szépirodalomban.

Egy-egy szépirodalmi alkotás lehet sejtelmes, titokzatos. A matematikai szöveg soha! A matematikai szöveg tiszta, világos, logikus felépítésű, jól olvasható; a forma nem vonhatja el a figyelmet a tartalomról.

Az alábbiakban – a teljesség igénye nélkül – felsorakoztatunk néhány tipográfiai követelményt, amely a szakszövegekkel kapcsolatban támasztható.

1. A betűtípust úgy válasszuk meg, hogy az minél kevésbé hívja fel magára a figyelmet. A talpatlan betűtípusok közül erre egy Swiss vagy egy Helvetica betű, a talpas betűtípusok közül a Times vagy a GoudyOldStyle a legalkalmasabb. Kerüljük a betűkavalkádot! Ne használjunk olyan típust, amelyből hiányoznak a magyar ékezetes betűk (akár csak egy is!).

2. A szövegben alkalmazott kiemelések: a félkövér (bold vagy fett), valamint a dőlt (italic vagy kurzív) betűtípus ajánlott. Semmilyen más – korábban az írógépek használatakor alkalmazott – kiemelés (aláhúzás, ritkítás, csupa nagybetűs írás stb.) nem használható. Általában elmondható, hogy a matematikai szövegben nem ajánlatos túl sokféle betűtípus használata.

3. A szöveg és a betű mérete legyen összhangban. A túl hosszú sorok (kicsi betű) olvasása közben a szem elfárad, elkalandozik, sort ugrik. A túl rövid sorok (túl nagy betű) gyakori sortöréshez, olvasásban történő váltáshoz, a figyelem lankadásához vezet.

4. A matematikai szövegekben gyakran fordulnak elő matematikai képletek. Igyekezzünk ezeket minden esetben megfelelő képletszerkesztő programmal készíteni, még akkor is, ha csak egyetlen betűt írunk be, ugyanis a matematikai képletek szedésére külön műszaki tipográfiai szabályok érvényesek! Ennek legfontosabb részei:

– a matematikai változók dőltbetűsek, vektorok esetén félkövérek;

– az operátorok (relációk, műveleti jelek) előtt és után kis helyet kell hagyni;

– a közismert függvényneveket álló betűvel kell írni (sin, cos, log stb.);

– a speciális jeleket az arra alkalmas jelkészletből kell venni, és nem összebarkácsolni; – és még hosszan sorolhatnánk a képletekre vonatkozó szabályokat.

5. Igyekezzünk nagyon figyelmesen betartani a Magyar Helyesírás Szabályaiban foglaltakat! Ennek az az elsődleges célja, hogy az írásunk érthetőbbé, könnyebben olvashatóvá, értelmezhetőbbé váljon.

6. Legyünk tisztában a legfontosabb stilisztikai követelményekkel, és matematikai szövegek írásakor is alkalmazzuk azokat, különösen ismeretterjesztő szövegek esetén! A dagályos körmondatokban bővelkedő szöveget és a nyers stílusú, tőmondatokban való fogalmazást egyaránt kerüljük! Mindazonáltal matematikai szövegben nem minden stilisztikai szabályt tudunk olyan komolyan venni, mint például a szépirodalomban. A szóismétlést irodalmi szövegben komoly stiláris hibának számít. De szakszövegekben nem hagyhatjuk el például egy mondatban az alanyt azért, hogy ezt elkerüljük – még akkor sem, ha az az előző mondatban már szerepelt –, ha anélkül érthetetlenné válna a mondandónk.

7. Ismerjük a tipográfiai legfontosabb mértékét, ez a ”pont”! (Hosszmérték, körülbelül 1/3 mm.)

8. Tervezzük meg írásunk címrendszerét, és eközben ügyeljünk arra, hogy a különböző címfokozatok (első-, másod-, harmadrendű cím) jó elkülöníthetőek legyenek! Ne csak méretben, de típusban is különbözzenek!

9. Az esztétikus szöveg – kevés kivételtől eltekintve – sorkizárt. Az ábraaláírás, a cím, a mottó kivétel ez alól. A sorkizárt szöveg csak akkor valósítható meg jól, ha például 16-18 cm-es sorszélességhez 12-11 pontos betűméret tartozik. A sortávolság olyankor 13-15 pont lehet. De ha a szövegben matematikai képlet is szerepel, akkor ez a szabály gyakran nem tartható be, hiszen egy tört vagy egy integráljel már nem fér el ebben a méretben. A betű, sorszélesség, sortávolság beállításokat gyakran jobb a programra bízni – ha megfelelő programot használunk. A szövegszerkesztő programok általában sokkal kevésbé kifinomultan állítják be ezeket az értékeket – és jóval kevesebb beállítási lehetőséggel is bírnak – mint a kifejezetten kiadványkészítésre kifejlesztett programok.

10. A központozás szinte fontosabb, mint a helyesírás. A központozás célja, hogy visszaadja a beszéd hanglejtését, hangsúlyait. Egy jól központozott, hibás helyesírással írt szöveget meg lehet érteni, azonban a helyesen leírt, de hibásan központozott mondat érhetetlenné válhat. Ezért nagyon fontos, hogy a helyesírás központozásra vonatkozó részével tisztában legyünk. Figyelnünk kell arra is, hogy ami kézírásban fel sem tűnik, az a nyomtatásban fontos szerepet kaphat. A felsoroláskor alkalmazott három pont nem esztétikus az egymás után leütött három pont ... alakjában, erre külön speciális „három pont karaktert" kell használnunk, amelyet a betűkészletek általában tartalmaznak is. Figyeljünk az idézőjelek helyes használatára! A magyarban egy szövegen belül kétféle hosszúságú kötőjelet használhatunk. A rövid változat az elválasztás, a toldalékok hozzáillesztésének, az összetett szavak kötésének a jele, a hosszú a gondolatjel, a felsorolásnál használt jel vagy a szópárosításra (Budapest–Szeged) használt jel. Ne feledkezzünk meg róla, hogy a zárójelek, idézőjelek tapadnak a közrefogott szöveghez! A százalékjel a számhoz, a celziusz fokjele viszont a C-hez balról tapad, a fok mérőszámához nem. A mértékegységeket álló betűvel kell írni, és nem tapadhatnak a mérőszámhoz. Az a helyes, ha a mértékegységet el nem választható szóközzel kötjük a mérőszámhoz, így nem fordulhat elő az a hiba, amikor az összetartozó párból a mértékegység egy új sorba kerül. Ugyancsak el nem választható szóközt érdemes használnunk a számok tagolásakor is. A szám közepén kialakult sortörés nagyon komoly hiba!

A szorzás jele a középre helyezett pont – amelynek mérete a pont írásjelével egyezik (képletszerkesztő!) –, nem pedig a csillag vagy a szorzókereszt. A szorzókeresztet kell viszont használnunk, amikor egy téglalap vagy téglatest méreteit adjuk meg. A szorzókeresztre külön karakter van, nem azonos az x betűvel!

A szövegben a kisebb számokat – ha nincs matematikai jelentőségük – rendszerint betűvel kiírjuk.

Ne feledjük, minden esetben igyekezzünk igényes, nyomdai minőségű kéziratot kiadni a kezünkből. De azért jó, ha tudjuk: Ha mindezeket a szabályokat be is tartjuk, és sikerül valóban esztétikus munkát létrehoznunk, az ettől még nem lesz nyomdai minőségű. A nyomdai előkészítés külön szakma, rengeteg, most meg sem említett szabállyal, tudnivalóval. Ha valamikor nyomdai anyagot kell létrehoznunk, a tördelést érdemesebb szakemberekre bízni. De megkönnyíthetjük a munkájukat azzal, hogy jól elkészített kéziratot bocsájtunk rendelkezésükre, ezzel egyúttal a megbecsülésünknek is jelét adjuk.

III. fejezet

A médiában megjelenő matematikai tartalmak felhasználása az oktatásban

A felhasználás lehetőségei igen sokfélék. A tanítási óra részeként is használhatunk a médiában megjelenő matematikai tartalmakat, és az órákon kívül is. Talán a legnyilvánvalóbb felhasználási módja ezeknek, ha ismeretterjesztő cikket, filmet mutatunk be a diákoknak.

A matematika tanítása során alapvető, de az egyik legnehezebb feladat a nem, vagy csak kevéssé motivált tanulók érdeklődésének felkeltése.

Ennek egyik eszköze lehet a populáris kultúrában helyenként megjelenő matematikai tartalmak bevitele a tanórákra. Az ebben az eszközben rejlő lehetőségeket ismét a Good Will Hunting című filmet felhasználva, az ott szereplő matematikai tartalmak ilyen szempontból való feldolgozásával mutatjuk be. Bemutatunk egy olyan feladatsort, amely elsősorban középiskolások számára készült, és ezeken a matematikai tartalmakon alapul. Mint már volt szó róla, a filmben a felmerülő problémák nagy része a véges matematika tárgykörébe tartozik, annak különböző területeit érinti. Ez esetünkben különösen indokolttá teszi ennek a filmnek a választását: Magyarországon több évtizedre visszanyúló hagyománya van a gráfelmélet középiskolában való tanításának. A gráfelmélet igen korán, a kutatásokkal párhuzamosan bekerült a magyarországi tananyagba, tankönyvekbe. A szakterület nemzetközi szinten is jegyzett művelője, Gallai Tibor is írt tankönyvet középiskolások számára, például 1949-ben is jelent meg ilyen [16]. A gráfelmélet azóta is jelen van a tantervekben, tankönyvekben, feladatgyűjteményekben és a ma használatos taneszközök közül is számosban található gráfelmélet – természetesen a legkülönbözőbb szinteken és feldolgozási módokon. Például: [18], [20], [21], [24], [25].

Az, ha a problémákat egy széles körben ismert, a filmes szakma és a közönség által is elismert filmből tudjuk választani jelentősen növelheti az érdeklődést a téma iránt. Mint az a matematikai tartalom részletes feldolgozásakor már kiderült, a film matematikai mélység és nehézség szempontjából eléggé különböző problémákat jelenít meg. A filmben időnként említés történik ezek nehézségéről is, de az, hogy a filmben mit mondanak róluk, még csak köszönő viszonyban sincs a problémák valódi nehézségével. A film számára – mint arról már szintén esett szó – ezek dekorációk és díszletek.

Nekünk azonban lehetőséget nyújtanak az érdeklődés felkeltése mellett arra is, hogy bizonyos matematikai tartalmakat megismertessünk a tanulókkal és matematikai kompetenciáikat fejlesszük.

A matematikai tartalmak többfélesége lehetőséget ad arra, hogy különböző szinteken és képzettségi fokokon lévő tanulók számára is érdekes és tartalmas anyagot tudjunk belőle felépíteni.

A megjelenő problémákat, feladatokat kétféleképpen fogjuk vizsgálni.

1. Megnézzük, melyik milyen szintű matematikai képzettséget igényel, milyen szinten lévők számára mit mond, illetve kik számára tudhat releváns tananyag lenni.

2. Konkrét feladatsorokon, illetve felépítésen keresztül példát mutatunk arra, hogy a különböző szinteken tanulók számára hogyan lehet feldolgozni ezeket a feladatokat, felvillantva a továbblépés lehetőségét is.

A vizsgált a matematikai tartalmak a filmben táblákon jelennek meg, így mi is „táblánként" tekintjük át a problémákat, de most tanítási szempontból, elsősorban a középiskolás korosztályra tekintettel.

1. tábla

A tábla filmbeli szerepéről: A film főhőse – Will Hunting –, aki bár rendkívüli matematikai képességekkel és tudással rendelkezik, de rossz szociális háttere miatt takarítóként dolgozik az MIT-n. A kép azt a jelenetet mutatja, amikor a napi munkája során rátalál a folyosói táblára, melyre a hallgatók számára írtak fel feladatokat, azzal, hogy aki a szemeszter végéig megoldja a feladatokat, az rendkívüli jutalmakban részesül, például a megoldása megjelenik az egyetem folyóiratában is.

A tábla a filmben csak matematikai díszlet a különleges sorsú szereplő zsenialitásának érzékeltetésére. (Will ugyanis egy-két napon belül, lényegében fejben megoldja a problémákat.) A matematikai tartalom a szakértő számára is korrekt módon jelenik meg, a filmben be nem mutatott elméleti háttér rekonstruálható. Ezt korábban már meg is tettük. A feladatok nehézségének és a kérdések komplexitásának érzékeltetése minden didaktikai alapot nélkülöz, teljesen esetleges, pontosabban teljesen a film dramaturgiájának van alárendelve.

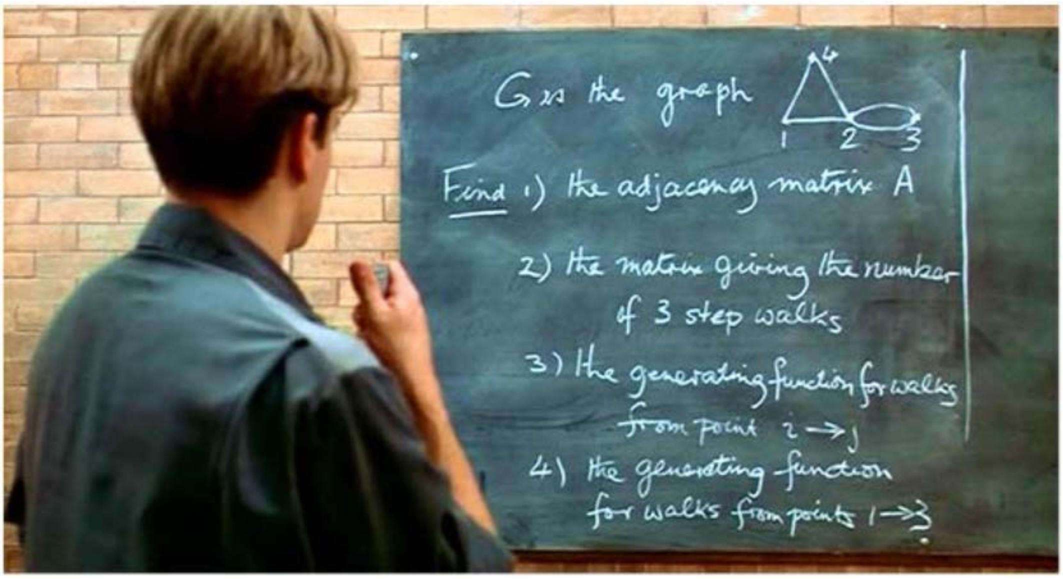
A tábla képe tisztán látható, alkalmas arra, hogy matematikai szempontból korrekt módon elemezzük.

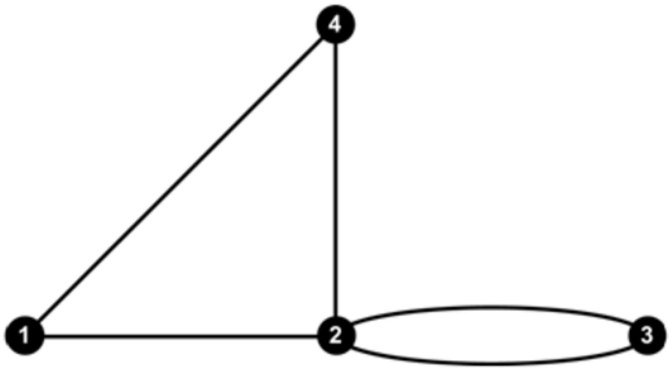
A feladatok a matematikai tartalom elemzésekor már szerepeltek, most ismét felidézzük őket:

Legyen G az ábrán látható gráf (III.1. ábra).

Keresse meg

1. az A szomszédsági mátrixot;


G is the graph
4
1 2 3
Find 1) the adjacency matrix A
2) the matrix giving the number of 3 step walks
3) the generating function for walks from point i → j
4) the generating function for walks from points 1 → 3


4
1
2
3

III.1. ábra.

2. azt a mátrixot, amelyik megadja a három-hosszú séták számát;

3. az i pontból a j pontba vezető séták generátor-függvényét;

4. az 1 pontból a 3 pontba vezető séták generátor-függvényét!

A feladatok – mint azt már láttuk – alapvetően egyetemi tananyagokhoz kapcsolódnak.

Egy matematikus számára jól ismert fogalmakkal dolgoznak, a szakember számára a *ráismerés* élményét adja. A mozgósított tudásanyag felöleli az analízis, a lineáris algebra, a kombinatorika és a gráfelmélet bizonyos fejezeteit.

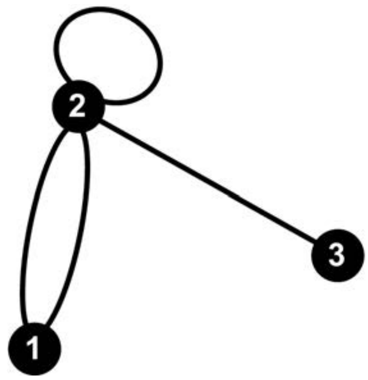
A matematika szakos hallgatók számára már általában nem egyszerűen ráismerésről van szó. Egy átlagos hallgató a megértéshez szükséges ismereteket tanulmányai során több tantárgyon keresztül, folyamatosan kapja, sajátíthatja el. Viszont épp ezért jó lehetőséget adhatnak a feladatok bizonyos fogalmak bevezetésésére, elsajátítására és gyakorlására.

Ha az előképzettségtől függetlenül akarunk eljárni, akkor érdemes egy, az elemzési folyamat tipikus lépéseit felfűző feladatsorozatban feldolgozni a témát. Így biztosíthatjuk a tanulás feltételeit (emlékeztetés, közös jelölés, szóhasználat azoknál, akiknek vannak ilyen irányú előismereteik, ugyanakkor önálló problémamegoldás azoknak, akik most szerzik meg a szükséges ismereteket).

A 3., illetve 4. feladat nem feldolgozható fel ilyen módon, mivel ezek olyan előképzettséget és a téma iránti olyan elkötelezettséget igényelnek, ami egyetemi szint alatt általában nem remélhető.

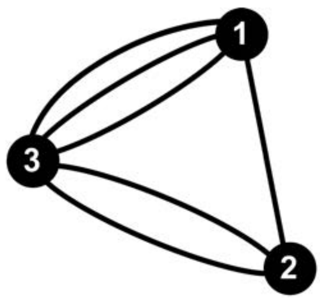
Az első két probléma azonban – épp úgy, mint a filmben megjelenő további problémák – számottevő matematikai előképzettséget nem igényel, ezek lényegében tetszőleges középiskolai, esetenként általános iskolai osztályba bevihetőek. A segítségükkel megszerezhető ismeretek, fejleszthető képességek és kialakítható attitűdök összhangban vannak a NAT célkitűzéseivel, az ott megfogalmazott célok részét képezik. Mivel azonban a konkrét anyagnak csak egy része szerepel a közoktatás törzsanyagában, ezért célszerűbb lehet ezeket szakkörökön, esetleg matematikai táborokban feldolgozni.

Az első két feladatra alapuló gyakorlat-sorozatnak kiindulása lehet egy-két olyan feladat, amelyek még a filmben szereplőnél is egyszerűbb gráfokat használ. Amikor mondjuk a



(f_1: 3 pontú gráf, hurokéllel, kettős éllel)

és



(f_2: 3 pontú gráf, hurokél nélkül, többszörös élekkel)

gráfokkal kapcsolatban adjuk feladatul egy-egy szomszédsági mátrix elkészítését, akkor a gyengébb képességű, illetve a kudarckerülő típusú tanulókat is sikerélményhez juttathatjuk. E feladatokban a lehetőségekhez mérten érdemes a szakkifejezéseket kerülni, különösen eleinte. Tehát a tanulókat nem mátrixokról kérdezzük, hanem például olyan feladatokat adunk fel, mint az alábbiak:

– Készítsünk T_1 táblázatot, hogy az f_1 rajzon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve!

– Készítsünk T_2 táblázatot, hogy az f_2 rajzon/gráfon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve!

E két feladat után már bátran feladhatjuk a filmbeli táblán szereplő 1. számú feladatot:

– Készítsünk T_3 táblázatot, hogy az alábbi gráfon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve! (GWH 1. tábla, 1. feladat.)

A szaknyelv használatát előkészítendő megemlíthetjük – és ezt a filmbeli szöveg megértése szükségessé is teszi –, hogy az ilyen táblázatokat szomszédsági mátrixoknak szokták nevezni.

Általános iskolás tanulóknál az alacsonyabb absztrakciós készség miatt a rajzokat történetekbe ágyazhatjuk, de legalábbis mint konkrét helyzetről – pl. városokat vagy házakat összekötő utakról – készített térképeket vezethetjük elő, ezzel is fejlesztve a modellalkotási képességüket.

A táblázat (mátrix) felírása után felhívhatjuk a tanulók figyelmét, hogy az első „nehéz problémát" megoldottuk. Ez a sikerélmény motiváló lehet a kapott táblázat/mátrix elemzésére (például, hogy szimmetrikus) és következő kérdés megválaszolásához vezető feladatsorhoz is.

A GWH táblán szereplő második kérdés megválaszolásához például egy ehhez hasonló feladatsoron keresztül vezethetjük el a tanulókat:

- Hányféleképpen tudunk elmenni az egyes pontokból egy-egy pontba két lépésben az f_2 rajzon? Készítsünk róla egy $T_{2;2}$ táblázatot!
- Készítsük el ugyanezt a – $T_{3;2}$ – táblázatot a 3. (filmbeli) gráfhoz!

(Mindkét feladatban elsődleges szerepet játszik a manipulatív tevékenység, majd az adatok begyűjtése és rendszerezése, az eredmények ábrázolása.)

- Keressünk összefüggést a T_2 és a $T_{2;2}$ táblázat között!
- Fent áll-e ugyanez az összefüggés a T_3 és a $T_{3;2}$ táblázat között?

(Összefüggések keresése, felismerése és megfogalmazása. Analógiák felismerése és alkalmazása.)

- Mi okozhatja felismert összefüggést? (Nevezetesen, hogy az új táblázat – pl. $T_{3;2}$ – egy elemét úgy kaphatjuk, hogy a T_3 megfelelő sorában és oszlopában lévő számokat rendre összeszorozzuk és a kapott számokat összeadjuk.) Véletlen ez, az adott gráfokra jellemző, vagy minden (véges) gráfnál ezt tapasztalnánk?

(Logikai kapcsolat felismerése, megfogalmazása, bizonyítása. A felismert elv érvényességi körének vizsgálata, megfogalmazása.)

- Keressünk három lépésből álló „sétákat" az f_2 és f_3 gráfokon!
- Készítsünk $T_{2;3}$ és $T_{3;3}$ táblázatokat a korábbiakhoz hasonlóan, tehát az egyes helyekre a megfelelő pontok közötti három lépéses séták számát írjuk!

(Manipulatív tevékenység, de már az elméleti ismeretek birtokában. Várhatóan a tanulók a néhány séta számának megkeresése után már inkább gondolkozni fognak, megpróbálják a korábban tapasztalt összefüggést az új helyzetre átvinni. Ehhez kapcsolódhatnak, illetve ezt segíthetik a következő kérdések.)

– Lehet-e használni valami módon a kétlépéses táblázatoknál megismert elvet ezekben az esetekben?

– Miért igaz az összefüggésünk a három lépéses sétákra?

(A bizonyítási igény fejlesztése. Várhatólag a tanulók nagyobbik része először csak az összefüggést általánosítja a háromlépéses esetre, az érvényesség megfontolása, pláne bizonyítása nélkül.)

– Hogyan általánosíthatjuk a tapasztaltakat tetszőleges gráfra és tetszőlegesen hosszú sétákra? Igazoljuk is a megfogalmazott állítást!

(A szűkebb körben tapasztalt és bizonyított összefüggések általánosítása. Az érvényességi kör keresése. A bizonyítási igény és a bizonyítási technikák fejlesztése.)

A film 2. feladatát már a $T_{3;3}$ táblázat felírásával megoldottuk. Erre hívjuk fel a tanulók figyelmét! Viszont a téma kapcsán számos kérdés vetődött fel, amelyek létjogosultságát ilyen módon nem kellett külön indokolni, azok természetes módon kapcsolódtak a kiindulási helyzethez, a filmhez.

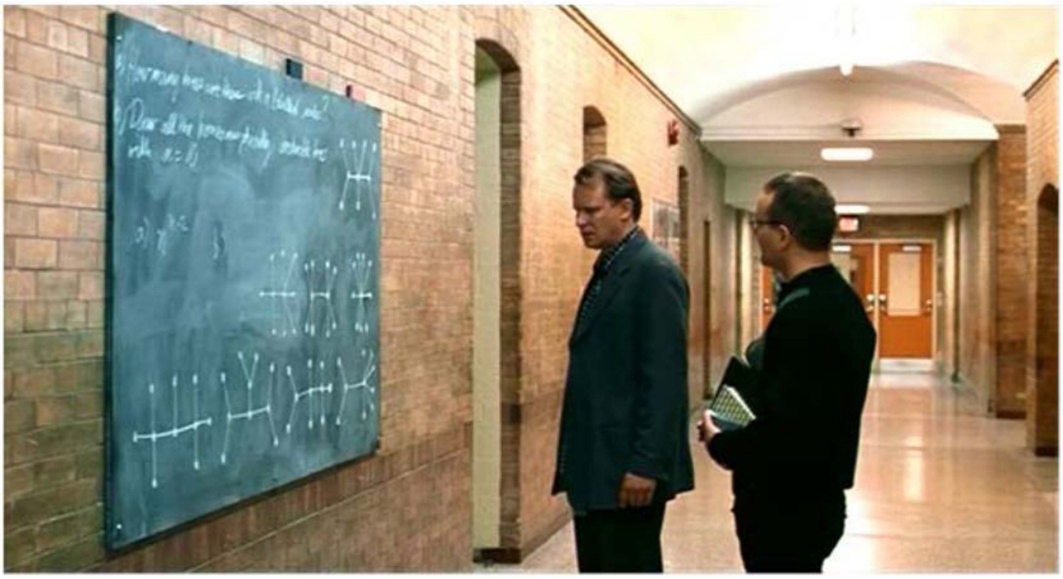
Az 1. tábla 1. és 2. problémájának ilyen módon való tárgyalása további kibontakozási lehetőségeket rejt magában. Mégpedig a mátrix-szorzás egy nem szokványos, de természetes bevezetését teszi lehetővé. Általános gyakorlat ugyanis, hogy a mátrixok szorzását a puszta technika ismertetésével tanítjuk, jobbára egyetemen. A hallgatók számára ez nem csupán nehezen megjegyezhető, de általában teljesen értelmetlennek is tartják, és csak elhiszik, hogy ennek így van értelme, ezt így célszerű csinálni. A mátrixok és a homogén lineáris leképezések kapcsolata, ami jól láthatóvá teszi végre, hogy mátrixokat tényleg így érdemes összeszorozni, általában jóval később kerül elő a tananyagban, és olyan kurzusok is vannak, ahol ez az összefüggés így nem is fogalmazódik meg.

A szomszédsági mátrix viszont általában már az első féléves anyagban megjelenik, sőt, például a fent vázolt módon a közoktatásba is bevihető. A séták számlálásával természetes módon ismerhető fel a szomszédsági mátrix szorzásának és hatványozásának elve és a módszer értelmes volta, hatékonysága az n-hosszú séták számának meghatározásában. Innen már ugyancsak természetes módon általánosítható a mátrixok szorzása nem csak szimmetrikus, utána pedig nem csak négyzetes mátrixok esetére is.

2. tábla

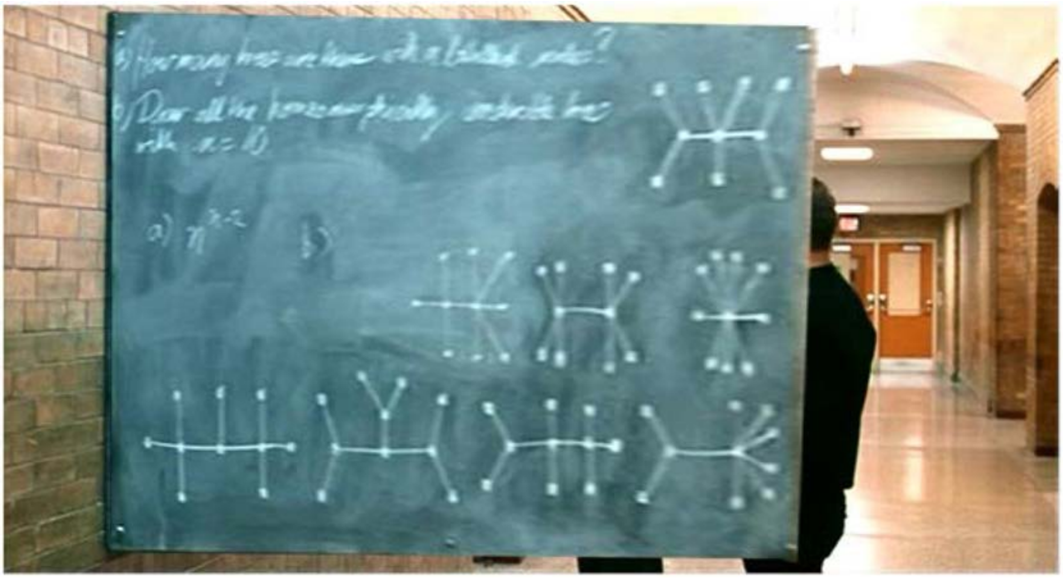
A film szerint az első feladatsort Will Hunting megoldotta, a végeredményeket felírta a hirdetőtáblára. A megoldásokra a hallgatók és a tanszék oktatói rátalálnak, de azt, hogy ki a megoldó, rejtély övezi. A tanszék ezért egy újabb feladatsort ír fel a táblára, immáron kifejezetten az ismeretlen megoldónak címezve. Will természetesen ezeket a feladatokat is megoldja, és a megoldásokat felírja a táblára.

Ez a kép a filmben a matematika tanszék által kitűzött második feladatsort mutatja, Will Hunting végeredményeivel együtt, abban a percben, amikor a tanszék két oktatója – Lambeau professzor és Tom – a megoldásokra rátalál.



Ez a filmnek az kockája, amelyen legjobban látható a tábla. Az írás rajta a néző számára itt sem olvasható tisztán. A szöveg és az ábrák kissé elmosódottak, ráadásul a tábla perspektivikusan erősen rövidült. Különösen problematikus a kérdések elolvasása.

A tábla képét azonban alkalmas grafikai program segítségével „beforgatva” a lap síkjába a rövidülést megszüntethetjük.



Az így látható táblakép már lényegében elolvasható, annyira mindenképpen, hogy matematikai szempontból elemezzük.

A feladatok:

a) How many trees are there with n labeled vertices?

b) Draw all the homeomorphically irreducible trees with $n = 10$

(Az angolul nem tudó diákok számára természetesen le is kell fordítanunk a szöveget:

a) Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?

b) Rajzolja le az összes homeomorfikusan felbonthatatlan fát $n = 10$ *esetén!)*

Mint azt az előző fejezetben részletezteük, egy matematikustól vagy egy matematika szakos hallgatótól mindkét probléma csak egészen alapfokú ismereteket kíván.

Közép-, illetve általános iskolai tanulóknak viszont a két feladat egészen eltérő nehézségű, kellő előkészítés nélkül számukra ezek elég nehéz problémák.

Az első – *a)* – feladatra a válasz a közismert Cayley-tétel [10]. Mint az a táblán a válaszban is látható, az ilyen fák száma n^{n-2}.

A film sajátossága, hogy sem az előző, sem a mostani táblán szereplő problémáknál nem szerepel az eredmény levezetése, az állítások bizonyítása. Pedig a matematika művelésének egyik legfontosabb része, hogy állításainkat bizonyítjuk. A matematikai kompetencia egyik legfontosabb összetevője, hogy „a matematikai kompetencia birtokában az egyén… követni és értékelni tudja az érvek láncolatát, matematikai úton képes indokolni az eredményeket, megérti a matematikai bizonyítást." [NAT]

A Cayley-tételt általában a Prüfer-kód segítségével szoktuk bizonyítani, ami egy szellemes, de egyáltalán nem nyilvánvaló módszer fa gráfok kódolására.

A problémát alkalmasan megfogalmazva azonban ez a feladat is kiválóan alkalmas lehet a matematikai kompetencia számos összetevőjének fejlesztésére.

Egy lehetséges feladatsor középiskolások számára az *a)* feladat feldolgozásához:

(A számozott feladatok, mint ez majd a szövegből is látható lesz, több esetben is egész feladatcsoportokat jelentenek.)

1. feladat: *Egy szigeten* 3 *(*4, 6, 12, 200*) város van. Legalább, illetve legfeljebb hány utat kell építeni, ha azt szeretnénk, hogy bármely városból bármely városba el lehessen jutni épített úton? Minden út, ami két várost köt össze egynek számít, a hosszától függetlenül.*

Ezzel a feladattal a tanulók gyakorolhatják egy lényegében valós probléma matematikai modellezését.

A városokat nevek helyett számokkal jelöljük. (*Elvonatkoztatás a konkrét hosszúságtól, szimbólumok használata.*)

3 és 4 város esetén a tanulók konkrét-manipulatív módon, kísérletezve állapíthatják meg az eredményt. Ugyanezt a módszert használhatják 6 városnál maximális útszám keresése esetén. Közben a szisztematikus próbálgatással a rendszerező képességük is fejlesztődik. A 3 és 4 városról szóló konkrét esetben már összefüggést fedeznek fel, megsejtik, hogy az utak minimális száma nem függ a konkrét utaktól, csak a városok számától. Felismerik, hogy a legtöbb utat akkor építjük, ha bármely két város között utat építünk.

Számítani lehet arra, hogy legkésőbb a 6 város esetén rájönnek arra is, hogy akkor minimális az utak száma, ha nem lehet sehogyan sem körbe menni az utakon. (Fa gráf.)

Már 4 város esetén előkerül a bizonyítás igénye, egyelőre oly módon, hogy az összes esetet megrajzolva le lehet olvasni az utak számát. Itt derül ki a két eset közötti legmarkánsabb különbség, az, hogy míg a maximális számú utak esetében elegendő egy gráfot megrajzolni, addig a minimális útszám keresésekor több, nem is feltétlen könnyen összegyűjthető eset van, amiket mind meg kéne rajzolni, ha az utak számának leolvasását válaszjuk bizonyítási módszerül.

Az összes minimális úthálózat megrajzolása során felvetődik, hogy bizonyos hálózatok „lényegében” nem térnek el egymástól, legalábbis ami az utak számát illeti. *(Tapasztalatok összegyűjtése, analógiák keresése, megfogalmazása.)* Ez alkalmat ad arra is, hogy a számozott és a számozatlan csúcsú gráfok különbözőségére ráirányítsuk a figyelmüket. (A konkrét úthálózatnál nyilván nem mindegy, mely városokat köt össze közvetlenül út. Az utak száma szempontjából viszont vannak egymással ekvivalens esetek. Ez jó alkalom arra is, hogy előkészítsük a filmben a folyosói táblán *b*-vel jelölt feladatot, amelyben már számozatlan csúcsú gráfok szerepelnek.)

Innentől érdemes a maximális és a minimális számú utakra vonazkozó kérdéseket külön vizsgálni.

– 6, illetve 12 város esetén az utak maximális számára vonatkozó kérdésnél már várható, hogy le is rajzolják az utakat, és számszerűen is megfogalmazzák az összefüggést. *(A rajztól – a konkrétumtól – való elvonatkoztatás; az absztrakciós készség fejlesztése; összefüggések felismerése, számszerű megfogalmazása.)* Ugyanezt megfogalmazzák 200 város esetére is. Ebben az esetben viszont már nem lehet áttekinthetően megrajzolni az összes utat tartalmazó ábrát és az utakat leszámlálni, megjelenik a bizonyítás igénye. A konkrét eset bizonyítása után felvetjük – **2. feladat** – hogy n számú város esetén legfeljebb hány utat lehet építeni. A 200 városnál megfogalmazott összefüggést általánosítjuk. *(Összefüggések megfogalmazása, általánosítása; jelölések, képletek, formulák alkalmazása.)* Az ugyancsak a 200 városnál alkalmazott gondolatmenet általánosításával az összefüggést bizonyítjuk is.

  Ez a gondolatmenet az iskolai tanagyag számos helyén előfordul, a szabályos sokszögek átlóinak összeszámlálásánál épp úgy, mint számtani sorozat összegzésekor, vagy a kombinatorikai feladatoknál, ismétlés nélküli kombinációként. Ezeknek a kapcsolódási pontoknak a megmutatásával elsősorban az analógiák használatának képességét fejleszthetjük.

– Már 6 város esetén is gyakorlatilag esélytelen, hogy az összes lehetséges minimális számú utat építő hálózatot megrajzolják a tanulók. Erre, mint nehézségre hívjuk is fel a figyelmüket akkor is, ha esetleg ők maguk nem fogalmazzák meg. Ezzel ugyanis előkészítjük a filmbeli probléma tárgyalását is, természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon hány ilyen úthálózat lehetséges, hány ilyen vázlatot (gráfot) kéne megvizsgálnunk, hogy az összes eset előforduljon. *(Probléma felvetés.)*

A tanulók azonban 6 város esetén is könnyen felismerik, hogy az általuk megrajzolt úthálózatok mindegyike olyan, hogy benne az utak száma 5. A korábbi tapasztalatok – 3 és 4 város – alapján megfogalmazzák azt is, hogy az utak száma mindig eggyel kevesebb a városok számánál. *(Összefüggések felismerése, általánosítás.)* Az a tanulók korától és matematikai kompetenciájuk fejlettségétől függ, hogy ezek alapján bizonyítottnak tekintik-e, hogy 6 város esetén mindig legalább 5 utat kell építeni.

12 város esetén a tanulók megfogalmazzák, hogy a minimális számú utat tartalmazó hálózatok esetén mindig eggyel kevesebb utat kell építeni, mint ahány város van. Ekkor újra hangsúlyozhatjuk, hogy az összes esetet meg kéne nézzük, hogy leszámlálással bizonyíthassuk az állításunkat. Megmondhatjuk az összes lehetséges úthálózat számát is – ami 61 917 364 224 – érzékeltetendő a módszer használhatatlanságát már ennyi város esetén is. *(Probléma-érzékenység és bizonyítási igény fejlesztése. A változatos módszerek szükségességének érzékeltetése.)* Ekkor – tanulónként változó mértékű tanári segítséggel – beláthatják a tanulók az állítást 12, illetve 200 város esetére. Várhatóan a megtalált bizonyítások olyanok lesznek, amelyek bármely más város-szám esetén is alkalmazhatóak. *(„Naiv indukció”, konkrétban az általános. Pre-matematikai bizonyítás. [1, p. 77–79])*

3. feladat: Ezek után általánosan is megfogalmazzuk/megfogalmaztatjuk az összefüggést és annak bizonyítását is. *(Absztrakciós képesség fejlesztése, szimbólumok használata, logikai lánc kiépítése, használata.)*

4. feladat: Mutassuk meg, hogy tetszőleges számú város között épített bármely minimális úthálózat esetén lesz olyan város, amelyikből csak egy irányba vezet út!

Ezzel a kérdéssel előkészíthetjük a tábla *a)* feladatának megoldását. A bizonyításához nem kell más, mint az a gondolat, hogyha nem lenne ilyen város, akkor valamely városból elindulva mindig tovább tudnánk menni minden városból, mígnem olyan városba jutunk, ahol már jártunk. Ekkor viszont valahol körbe mentünk, vagyis nem volt minimális az úthálózat. *(Logikai következtetési séma gyakorlása – indirekt bizonyítás.)*

5. feladat: Fogalmazzuk át az állításunkat gráfokra! („Minden fa gráfban van elsőfokú pont”.) *(Absztrakciós készség fejlesztése, fogalmak kialakítása, rögzítése, használatuk gyakorlása.)*

6. feladat: Az építők döntöttek az egyik minimális úthálózat mellett. Mi módon tudhatják leírni, melyik tervet fogadták el, ha valamiért nem szabad rajzolniuk, csak a városok sorszámait használhatják?

(Természetes gondolat: Írják le párban azon a városok számait, amelyeket út köt össze!)

A feladat egyszerű és jól átlátható az általános esetben is, így ezt a feladatot nem kérdezzük meg konkrét számú városokra.

7. feladat: Hogyan kódolják az úthálózat tervét, ha arra törekszenek, hogy minél rövidebb számsorozatot használjanak?

A feladat kitűzésekor tetszőleges mese található ki arra, miért szükséges a számsorozat hosszát minimalizálni. Arról viszont már érdemes lehet hosszasabban beszélni, hogy számos olyan valós helyzet van, amikor igen fontos a jelek, illetve a matematikai műveletek számának minimalizálása. *(Konkrét problémák matematikai modellezése, alapvető bonyolultság-elméleti fogalmak megértése.)*

Ennek a feladatnak kapcsán a tanulók – szükség esetén jelentős tanári segítséggel – eljuthatnak a Prüfer-kód ötletéhez: Vágjuk le áganként a fát! (Végülis szűkebb udvarokon, vagy más, környezetükre veszélyes módon álló fákat gyakorta vágnak ki úgy, hogy előbb az ágait vágják le.) Írjuk le mindig a legkisebb sorszámú olyan város számát, amelyikből csak egy út vezet ki, utána azt a város a hozzá vezető úttal együtt „hagyjuk el" a tervrajzról! Így egy $n-1$ hosszúságú számsorozatot kapunk. De ez $n-2$ hosszúságúra csökkenthető, hiszen az utolsó leírt szám mindig a legnagyobb sorszám, amit a városok megnevezésére használtunk – n –, így ezt fölösleges leírni. Tehát egy $n-2$ hosszúságú számsorozattal leírhatjuk az úthálózatot/gráfot.

A gondolat várhatóan nem természetes a tanulók számára, így több konkrét feladattal és tanári utasítással, illetve közléssel egyengethetjük a tanulók gondolkodásának útját.

A kód ötletének közös megfogalmazása után következik annak vizsgálata, hogy vajon egy adott úthálózat kódja egyértelműen meghatározott-e, illetve minden ilyen $n-2$ hosszúságú számsorozathoz tartozik-e egyértelműen meghatározott fa gráf. Ez a vizsgálat megint konkrét esetek vizsgálatából kiindulva juthat el az általános összefüggés felismeréséig és bizonyításáig.

8. feladat: Hány különböző úthálózat lehetséges 3, 4, 6, 12, illeteve 200 város esetén?

Fogalmazzuk át a feladatot gráfokra!

A feladat megoldása a 7. feladat eredményét felhasználva kombinatorikai feladattá válik: 3, 4, 6, 12, illetve 200 különböző számból hány 1, 2, 4, 10, illetve 198 hosszúságú jelsorozat készíthető? *(Tanultak felidézése, megfogalmazása, alkalmazása.)*

9. feladat: Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?

Ez már a filmbeli táblán szereplő feladat. A 8. feladatban alkalmazott „naiv indukció" precíz megfogalmazásával a filmben is szereplő eredményt kapjuk.

A *b)* feladat különösen izgalmas didaktikai szempontból, elsősorban a probléma didaktikai sokrétűsége miatt.

A feladat látszólag igen nehéz, hiszen „homeomorfikusan irreducibilis" gráfokról szól. De csak látszólag. Valójában a feladat általános iskolába is bevihető, egy közepes képességű tanuló is a siker reményével láthat hozzá a megoldásához.

A szakkifejezések használata mint általában, ez esetben is erősen hozzájárul a kognitív gát kialakulásához. Mint hallgatóimnak is mondani szoktam, a legegyszerűbb matematikai probléma is igen nehézzé válik, ha a leírásában szereplő fogalmakat nem ismerjük.

Jelen esetben a szakkifejezés különösen bonyolult fogalmat sejtet, ezért a feladat ismertetése majd megoldása igen erős emóciókat válthat ki egy általános iskolai osztályban, így a feladathoz és az általa tanultakhoz erősebb kötődést hozhat létre.

Az, hogy egy gráf „homeomorfikusan irreducibilis” – mint e dolgozatban már írtam is – mindössze annyit jelent, hogy nincsen benne másodfokú pont.

Tehát a problémát például a következő módon fogalmazhatjuk át középiskolások számára:

„Rajzoljátok le az összes 10 pontú fa gráfot, amelyiknek nincsen másodfokú pontja, ha az egyes pontokat nem különböztetjük meg.”

Általános iskolások számára – minthogy gráfokról még nem tanultak, és absztrakciós szintjük is alacsonyabb – a következő, az eredeti problémára vezető feladatot adhatjuk:

„Rajzoljátok meg az összes olyan tíz város közötti úthálózat vázlatát, amely olyan, hogy:

- Bármely városból bármely városba el lehet jutni.
- Nem lehet benne körbe menni.
- Nincs olyan város, amelyiken csak áthaladó út lenne, vagyis minden város vagy végállomás, vagy legalább három fele vezet belőle út.”

Általános iskolai osztályban az absztrakciós készség fejlesztését szolgálja annak tisztázása, hogy az eredeti feladat megoldása ekvivalens az átfogalmazottéval.

Akár közép-, akár általános iskolásoknak adjuk fel a feladatot, a tanulók nem túl hosszú idő után mind a tíz megoldást megrajzolják.

Sőt, általában ennél – látszólag – többet is találnak.

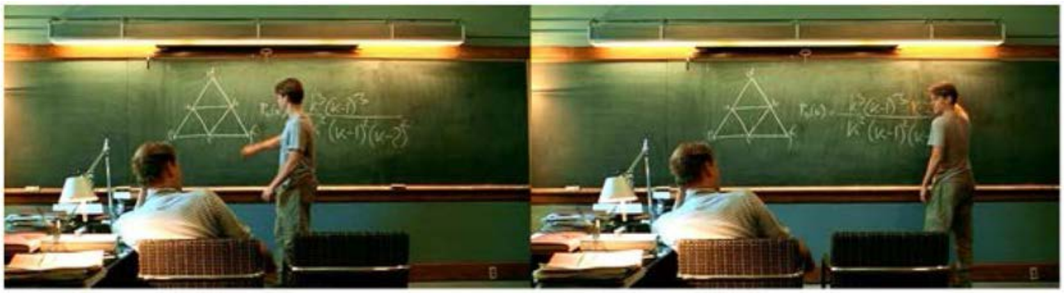
Általános iskolában a bizonyítási igény és a topologikus szemlélet kialakítását, illetve fejlesztését szolgálja az a vizsgálat, amelyben a látszólag eltérő megoldásokról kiderítik, hogy „lényegében” azonosak. Ugyancsak a bizonyítási igény és készség fejlesztésére szolgál annak tisztázása, hogy megtalálták-e az összes, a feladat feltételeinek megfelelő gráfot. Annak bizonyítása, hogy a felsorolt tíz eseten kívül nincsen más, az esetek rendszerezésével történhet. A rendszerezés alapja lehet a pontok lehetséges fokszáma, vagy a gráfban található utak hossza.

Középiskolában az ez iránt érdeklődő tanulókkal számítógépes programot is írathatunk, amely az összes lehetséges megoldást megkeresi. Ez is, mint az esetek rendszerezése, az algoritmikus gondolkozást fejleszti.

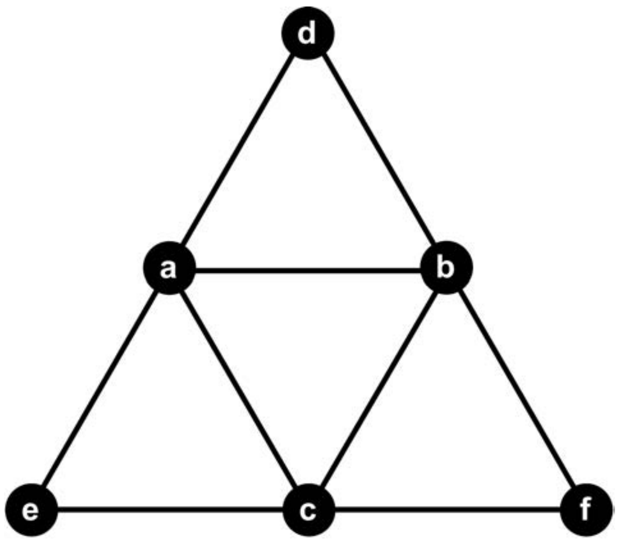
A probléma tárgyalásának újabb szintjét jelenti, ha a diákok felvetik (vagy a tanár felveti), hogy tetszőleges számú pont (illetve város) esetén hány gráfból áll a megoldás. A tanulók számára most az lehet meglepő, és így érzelmi kötődéseket kialakító, hogy az általánosított probléma már tényleg igen nehéz, még senki sem tudta megoldani. Ez – mint a nagy nyitott problémák felvetés általában is – alkalmas a tanulók érdeklődésének felkeltésére, illetve fokozására. Várhatólag néhány érdeklődőbb tanuló meg is próbálkozik azzal, hogy majd ő megoldja – ez főleg középiskolában várható –, amely próbálkozás még sikertelenség esetén is számos matematikai kompetencia fejlesztésére alkalmas.

3. tábla

Az utolsó olyan jelenetben, amikor a szereplők pontosan értelmezhető matematikai tartalommal foglalkoznak, a filmbeli professzor és Will Hunting közösen csinálnak matematikát, úgy, hogy felváltva írnak a táblára. A tábla jól olvasható, bár a filmben valamelyik része mindig takarásban van, így itt két képet szerepeltetünk.



A táblán lényegében ez a rajz és ez a képlet szerepel:



III.2. ábra. $P_g(k) = \dfrac{k^3(k-1)^3(k-2)^6}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}$

A rajz – mint erről már esett szó – egy nap-gráf rajza, a képlet pedig ennek a gráfnak a kromatikus polinomja, vagyis egy olyan polinom, ami azt adja meg, hogy egy adott gráfot hányféleképpen lehet k féle színnel jólszínezni.

Azt, hogy ez a polinom ilyen törtes formában milyen gondolatmenet során jön ki, korábban már leírtuk. De ugyanez a probléma elemi eszközökkel, középiskolában is vizsgálható, alkalmas az érdeklődés felkeltésére és matematikai kompetenciák fejlesztésére.

Ehhez mutatunk egy lehetséges felépítést.

Az alábbi feladatokban a gráfok csúcsait megkülönböztetjük. (Számozott csúcsok.)

– Rajzoljuk meg az összes olyan n-pontú gráfot, amelyek színezhetőség szempontjából különböznek! ($n = 1$; 2; 3 vagy 4)

(Manipulatív tevékenység során összefüggések felismerése, megfogalmazása. A rendszerező-képesség fejlesztése. A bizonyítási igény fejlesztése.)

(A továbbiakban csak egyszerű, számozott csúcsú gráfokkal foglalkozunk.)

– Az első feladat megoldása során kapott gráfok közül melyiket hányféleképpen lehet kiszínezni 1, 2, 3, 4 vagy 5 színnel?

(Manipulatív tevékenység, erre épülő csoportosítások, általánosítások. A felismert összefüggések megfogalmazása, képletekbe foglalása a fogalmazási készséget, az absztrakciós szintet és a jelölések, képletek használatát fejleszti. Várhatóan több, egymásnak ellentmondó formulát írnak fel a tanulók. Ezek ütköztetése a szaknyelv-használatot, az érvelési készséget, a bizonyítási igényt és a bizonyítási készségüket is fejleszti.)

– Az első feladat megoldása során kapott gráfok közül melyiket hányféleképpen lehet kiszínezni k színnel?

(Manipulatív tevékenység. Összefüggések absztrakt megfogalmazása, képletekbe foglalása. A bizonyítási igény és a bizonyítási technikák fejlesztése.)

– Hányféleképpen színezhető k színnel egy n hosszú lánc? Hányféleképpen színezhető k színnel egy n hosszú kör?

(Analógiák keresése és használata. Képlethasználat.)

– Hányféleképpen színezhető k színnel az alábbi gráf?

Ez maga a filmbeli probléma. (A ráismerés élménye, motiváció.) A tárgyalt feladatok után ezt a tanulók többsége meg tudja oldani. (Sikerélmény nyújtása a tanulóknak, önbizalmuk erősítése.)

– Ha egy kétkomponensű gráf egyik komponensét $f(k)$-, másik komponensét $g(k)$-féleképpen lehet színezni k színnel, akkor hányféleképpen lehet színezni a gráfot?

– Milyen összefüggés érvényes egy olyan gráf esetén, amelynek m komponense van, amely komponensek külön-külön $f_1(k)$, $f_2(k)$, $\ldots$, $f_m(k)$-féleképpen színezhetők k színnel?

(Kombinatorikus gondolkozás fejlesztése. Absztrakciós készség fejlesztése. Általánosítás, analógiák felismerése, használata.)

– Adott egy egyszeresen összefüggő gráfunk, amelynek egy elválasztó éle által összekötött G_1 és G_2 részgráfját $f_1(k)$-, illetve $f_2(k)$-féleképpen lehet k színnel színezni. Hányféleképpen színezhető k színnel a gráf?

– Miért biztos, hogy egy gráf k színnel való színezéseinek száma mindig k egy polinomjával írható le?

Az egyszerűbb, közvetlenül a filmbeli problémákhoz kapcsolódó feladatok után nem lesz riasztó nehezebb, mélyebb összefüggések felismerését célzó feladatok, problémák vizsgálata sem. (Kombinatorikus gondolkozás fejlesztése. Absztrakciós készség fejlesztése. Belső matematikai összefüggések keresése, felismerése, megfogalmazása.)

Irodalomjegyzék

[1] A. Ambrus. *Bevezetés a matematikadidaktikába,* ELTE Eötvös Kiadó, 1995.

[2] C. R. Barman. How Do Students Really View Science and Scientists? *Science and Chiuldren* **34**(1), 30–33, 1996.

[3] D. C. Beardsley, D. D. O'Dowd. The college-student Image of the Scientist. *Science* **133**(3457), 997–1001, 1961.

[4] H. Bessoondyal, S. J. Gribble. Mauritian students' perceptions of mathematicians and mathematics, `https://s3.amazonaws.com/zanran_storage/www.gasat-international.org/ContentPages/2485850801.pdf` 421–430, 2003.

[5] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux. Combinatorial species and tree-like structures, volume 67 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy. With a foreword by Gian-Carlo Rota.

[6] J. S. Berry, S. H. Picker. Your pupils' images of mathematicians and mathematics. *Mathematics in School* **29** (2000), 24–26.

[7] A. Bodzin, M. Gehringer. Breaking Science Stereotypes. Can meeting actual scientists change students' perceptions of scientists? Science and Children **39**(1), 2001. `http://web.missouri.edu/~hanuscind/4280/breakingstereotypes.pdf`

[8] M. L. Bohrmann, V. L . Akerson. A teacher's refiections on her actions to improve her female students' self-efficacy toward science. *Journal of Elementary Science Education* **13**(2) (2001), 41–55.

[9] C. W. Borchardt. Über eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante. *J. Reine Angew. Math.* **57** (1860), 111–121.

[10] A. Cayley. A theorem on trees. *Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, XXIII. (1889), 376–378.

[11] D. W. Chambers. Stereotypic images of the scientist: The Draw-a-Scientist Test. *Science Education* **67**(2) (1983), 255–265. `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/sce.3730670213/pdf`

[12] J. M. Dickson, C. F. Saylor, A. J. Finch. Personality factors, family structure, and sex of drawn figure on the Draw-A-Person Test. *J. Pers Assess.* **55** (1990), 362–366.

[13] K. D. Finson. Applicability of the DAST-C to the images of scientists drawn by students of different racial groups. *Journal of Elementary Science Education* **15**(1), Spring (2003), 15–27.

[14] K. D. Finson, J. B. Beaver, B. L. Cramond. Development of a field-test checklist for the draw-a-scientist test. *School Science and Mathematics* **95**(4) (1995), 195–205.

[15] L. Flick. Scientist in residence program improving children's image of science and scientists. *School Science and Mathematics* **90** (1990), 204–214.

[16] T. Gallai, R. Péter. Matatematika a középiskolák I. osztálya számára. Tankönyvkiadó Nemzeti Vállalat, 333–336. 1949.

[17] C. L. Mason, J. B. Kahle, A. L. Gardner. Draw-A-Scientist Test: Future Implications. *School Science and Mathematics* **91** (1991), 193–198.

[18] L. Gerőcs, Gy. Orosz, J. Paróczay, J. Szászné Simon. Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény. Nemzeti Tankönyvkiadó, 51–82, 2010. 18. kiadás.

[19] B. Grevholm. Norwegian upper secondary school students' views of mathematics and images of mathematicians. *In: K. Kislenko (Ed.), Current state of research on mathematical beliefs XVI, Proceedings of the MAVI-16 Conference,* June 26–29, 2010, Tallinn, Estonia, 120–136. Tallin University. 2010.

[20] I. Hajnal. Matematika IV. (Fakultatív B változat) Nemzeti Tankönyvkiadó, 432–435, 1982.

[21] I. Hajnal, F. Pintér. Matematika III. (fakultatív B változat) Nemzeti Tankönyvkiadó, 406–411, 2001.

[22] F. Harary, G. Prins. The number of homeomorphically irreducible trees, and other species. *Acta Math.* **101** (1959), 141–162.

[23] T. Kántor. Referensi vélemény Korándi József *A matematika és a média kapcsolata* című előzetes formában levő PhD disszertációjáról. Kézirat, 2012.

[24] M. Kocsis, P. Marosvári, Cs. Molnár, A. Siposs. Matematika feladatgyűjtemény 12. osztályosok számára, 61–64.

[25] J. Kosztolányi, I. Kovács, K. Pintér, J. Urbán, I. Vincze. Matematika 11., Mozaik Kiadó, Szeged, 38–62., 2005.

[26] L. Lovász. *Combinatorial problems and exercises.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2007.

[27] L. Lovász. Kombinatorikai problémák és feladatok. Typotex Kiadó, Budapest, 72–73. 1999.

[28] M. Mead, R. Metraux. The image of the scientist among high school students: a pilot study, *Science* **126**(3270) (1957), 384–390.

[29] G. Pólya and G. Szegő. *Problems and theorems in analysis. Vol. I: Series, integral calculus, theory of functions.* Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the German by D. Aeppli, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 193.

[30] H. Prüfer. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. d. Math. u. Phys. (3)*, **27** (1918), 142–144.

[31] A. Rampal. Images of science and scientists: A study of school teachers' views I. Characteristics of scientists. *Science Education* **76**(4) (1992), 415–436.

[32] D. B. Rosenthal. Images of scientists: A comparison of biology and liberal studies majors. *School Science and Mathematics* **93**(4) (1993), 212–216.

[33] R. A. Schibeci, I. Sorenson. Elementary school children's perceptions of scientists. *School Science and Mathematics* **83**(1) (1983), 14–19.

[34] H. Türkmen. Turkish primary students' perceptions about scientist and what factors affecting the image of scientists. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* **4**(1) (2008), 55–61.

[35] J. L. Wilson, C. M. Latterell. Nerds? Or nuts? Pop culture portrayals of mathematicians. *ETC: A Review of General Semantics* **58** (2001), 172–178.

[36] K. Y. Wong. Images of mathematicians. In R. P. Hunting, G. E. Fitzsimons, P. C. Clarkson, and A. J. Bishop (Eds.), Regional collaboration in mathematics education 1995, 785–794. Melbourne: Monash University. 1995.