Matematika kritériumtárgy
Segédanyag az ELTE TTK matematika alap és osztatlan tanárszakosok számára

Szerző: Pálfalvi Józsefné
Lektor: Vásárhelyi Éva
Szerkesztette: Fried Katalin

TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007
Országos koordinációval a pedagógusképzés megújításáért

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ez a jegyzet segítséget kíván nyújtani a matematika kritériumtárgy követelményei sikeres teljesítéséhez. A matematika kritériumtárgy gyakorlatain a feladatmegoldások célja a matematikai gondolkodásmód és a feladatmegoldó rutin fejlesztése, a középiskolás anyag felfrissítése, kiegészítése, felzárkóztatás, biztos alapok teremtése az egyetemi tanulmányokhoz. Az egyes fejezetek a témakörben legfontosabb fogalmak, ismeretek rövid felsorolásával indulnak, 8–10 mintapéldát és 10–20 megoldandó feladatot tartalmaznak. A példák és feladatok kiválasztásában figyelembe vettük az előző évek tapasztalatait. Ezekkel a példákkal és feladatokkal a leggyakrabban előforduló hibákra, hiányosságokra kívántuk a hallgatók és a gyakorlatokat vezető oktatók figyelmét is ráirányítani. A közölt megoldásokkal szeretnénk segítséget nyújtani a szokásos tévedések, hibák kiküszöböléséhez, illetve esetleges újabb módszerek, alkalmazások megismertetéséhez.

Szintfelmérő dolgozat

Azok közül a hallgatók közül, akik a gimnáziumi tagozatokon, vagy a fakultációkon az emelt szintű matematikát tanulták, sokan viszonylag könnyen megbirkóznak a középiskola és az egyetem közötti átmenet nehézségeivel. Az első éves évelejі felmérő dolgozatok tapasztalatai alapján azonban a hallgatók többsége számára ez az átmenet nagy ugrásnak bizonyul.

2006 óta a matematika és a többi természettudományos BSC szak, illetve 2013 óta az osztatlan matematikatanári szak tantervében szerepel a matematika felzárkóztató kritériumtárgy, amely a tanév eleji szintfelmérő dolgozattal indul. A tárgy célja, hogy segítséget kapjanak azok a hallgatók, akiknek a szintfelmérő dolgozata nem érte el a megfelelt szintet.

Mit mérünk a szintfelmérő dolgozatokban?

Általában a középiskolai tananyag olyan elemeinek a tudását mérjük, amelyek a szakmai közvélekedés szerint az egyetemi stúdiumokhoz feltétlenül szükségesek. Ez nem teljesen azonos sem az éppen aktuális minisztériumi kerettanterv anyagával, sem a közép- vagy emeltszintű érettségi követelményeivel, de nagymértékben támaszkodik ezekre.

Az eltérések okai

Az iskolák számára a NAT és a kerettanterv a kötelező előírás, de emellett van lehetőség különböző tantervek szerint haladni. Többféle heti órabeosztás lehetséges. A minimális heti 3 óra kevés lehetőséget ad kitekintésre, alapos gyakorlásra. A nagyobb óraszámú tantervek alapján lényegesen több ismeret elsajátítását, a matematikai gondolkodás magasabb szintjét érhetik el a diákok. Ezért az elsőéves hallgatók között az előképzettség tekintetében nagy különbségek mutatkoznak. Mindehhez hozzájárul a kétféle érettségi szint is. Az emelt szintű érettségit tett hallgatók között általában kevesen vannak, akik nem érik el a bevezető dolgozatban a megfelelt szintet.

A színvonalbeli különbségeket a szeptemberi dolgozat összeállításánál figyelembe vesszük. Ezekben a dolgozatokban az alapvető rutinfeladatok mellett mindig van olyan feladat is, amely meghaladja az alapóraszámú oktatásban részesülők ismereteit. Van olyan is, amely, bár csak az alapismeretekre támaszkodik, összetettebb gondolkodást, többlépéses logikai következtetést, az ismert fogalmak és tételek ötletesebb, kreatívabb, szokatlanabb alkalmazását igényli

A leggyakrabban tapasztalt hiányosságok a szintfelmérő dolgozatok alapján

1. A számolási rutin hiánya

A kezdő hallgatók közül soknak nehézséget okoznak a kicsit összetettebb, főleg törtes algebrai kifejezésekkel végzendő műveletek, bizonytalanok a hatványokkal, gyökökkel, logaritmussal. Nem ismerik fel, ezért nem alkalmazzák a nevezetes azonosságokat. A trigonometrikus kifejezések terén az általános algebrai rutin hiánya mellett a konkrét ismeretek hiánya is nehezíti a helyzetet. A hallgatók nagy része számára a szögfüggvények fogalma megmarad a hegyesszögek tartományán, és emlékezetből, pontatlanul próbálják felidézni a derékszögű háromszögekben a megfelelő arányokat. Nem ismerik fel, nem használják az általános összefüggéseket. Nem világos számukra, hogy mit jelent az, hogy a szögfüggvényeket a valós számok halmazán értelmezzük.

2. Adatok, képletek, megjegyzendő ismeretek

Kevés adatot, képletet tudnak biztonságosan. Hibáznak néha a legalapvetőbb összefüggések alkalmazásában is, például a másodfokú egyenlet megoldóképlete, a számtani és mértani sorozat összegképlete stb. esetén is. Alig tudnak számszerű adatot fejből, pedig egy-egy feladatban gyakran lehet találni egyszerűbb megoldást, ha felismerjük például a négyzetszámokat, teljes hatványokat, pitagoraszi számhármasokat, nevezetes szögek szögfüggvényeit stb. Bár az informatikai eszközök használata megkönnyíti a számolási feladatok megoldását, a jó becslésekhez szükséges, hogy az eszközök nélkül is jól tájékozódjunk a számok világában. Tudni kell azt is, hogy mikor érdemes, és mikor lehet vagy mikor nem lehet megoldani egy feladatot számológéppel.

3. Tapasztalataink szerint vannak rendszeresen visszatérő tartalmi és fogalmi hiányosságok, pontatlanul, hibásan rögzült ismeretek. Néhány tipikus példa:

Az *abszolút érték* hibás használata, a *racionális és az irracionális számok értelmezése, a valós számok tizedes tört alakja.* A *függvények értelmezése*, ábrázolása, tulajdonságaik, *a racionális törtfüggvények, a logaritmus és az exponenciális függvények*, valamint *általában ismeretlenek* az *egészrész, törtrész*, és a *szignum függvények.* A *másodfokú egyenlőtlenségek* megoldása, e*gyenletek, egyenlőtlenségek ekvivalenciája. Ponthalmazok megadása algebrai eszközökkel, alakzatok egyenletei.*

4. Gondolkodási képesség, logikai ismeretek, bizonyítások

A legtöbb nehézséget a *definíciók és tételek pontos* kimondása, a *bizonyítások szükségességének belátása, a diszkussziók, az állítások tagadása és megfordítása és a kvantorok helyes használata* okozza. Általában nehéz a teljes indukciós vagy az indirekt bizonyítás megértése és alkalmazása.

5. Súlyos probléma *a geometriai alapismeretek szinte teljes hiánya*

A dolgozatokban a geometriai feladatok közül legtöbbször csak néhány számításos (kerület, terület) feladattípus megoldása sikeres. Különösen nagy nehézséget okoznak még a legegyszerűbb bizonyítási feladatok is. Ebben nagy szerepe lehet annak is, hogy a középszintű érettségin nem követelmény a bizonyítás. Ez nemcsak azt jelenti, hogy a hallgatók nem tudják a korábbi tantervekben szokásos bizonyításokat, hanem a bizonyítási készségük is kevésbé fejlődik, a tételek is kevésbé rögzülnek. Így egy-egy témakör felépítése, módszerei, eszközei nem alkotnak logikus rendszert, az ismeretek mozaikszerűek, felületesek.

A matematika felzárkóztató kritérium tárgy a fentiekben ismertetett problémákat kiemelten kezeli. A gyakorlatokon feladatok megoldásával kívánja a matematikai gondolkodásmódot és a feladatmegoldó rutint fejleszteni, ezzel is elősegítve a biztos alapok megteremtését.

A feladatok, példák egy részét középiskolai tankönyvek, feladatgyűjtemények, illetve a KöMaL és más országos matematika versenyek feladataiból válogattuk, esetenként azok ötleteire támaszkodtunk, a megoldásaikat átfogalmaztuk, kiegészítettük.

Az olvasónak ajánljuk, hogy tanulmányai során használja a magyar matematikatanítást segítő feladatgyűjtemények és példatárak tartalmas, gazdag feladatanyagát. Ezek az elmúlt évtizedek kiváló matematikatanárai szakmai tudása, gazdag tapasztalatai alapján jöhettek létre.

2. fejezet

A tantárgy részletes tematikája: mintapéldák és feladatok

2.1. Gondolkodási módszerek, halmazok, logikai feladatok, bizonyítási módszerek, számelméleti feladatok

Állítások megfogalmazása, értelmezése kombinatorikai, logikai és számelméleti feladatok megoldásában. Szövegértés, szöveges feladatok lefordítása a matematika nyelvére, bizonyítási igény, bizonyítási készség fejlesztése.

Mintapéldák

1. Egy autóbuszvonal két végállomása egy lejtős út két végén van. Az alsó végállomásról elindul egy busz felfelé, majd 6 perc elteltével elindul egy másik busz a felső végállomástól lefelé és az út felénél találkoznak. A lefelé haladó az alsó végállomáson 6 percet várakozik, majd elindul felfelé. Eközben az első busz felér a felső végállomásra és azonnal visszafordul. A két busz az alsó végállomástól számított harmadrésznél találkozik. Mekkora a menetidő lefelé és felfelé?

Megoldás:

Legyen a menetidő felfelé t_1 és lefelé t_2. Lefelé az út feléhez 6 perccel kevesebb idő kell, mint felfelé, ezért $t_2 = t_1 - 12$. Az indulástól a második találkozásig eltelt időt felírjuk mindkét busz szemszögéből, ezek egyenlők:

Egyszer felmegy, és a $\frac{2}{3}$ részig visszajön: $t_1 + \frac{2t_2}{3}$.

6 perccel később indul, lemegy, 6 percet vár, $\frac{1}{3}$ részig felfelé megy: $6+t_2+6+\frac{t_1}{3}$, azaz $t_1+\frac{2}{3}t_2 = 12+t_2+\frac{1}{3}t_1$.
Rendezve: $2t_1 - 36 = t_2$. Összevetve az első egyenlettel: $2t_1 - 36 = t_1 - 12$. Tehát $t_1 = 24$ perc és $t_2 = 12$ perc a lehetséges megoldáspár. A szövegbe behelyettesítve láthatjuk, hogy az is.

2. Mennyi az $n^2 + 2n$ szám utolsó előtti számjegye, ha az utolsó számjegye a 4 és az n természetes szám?

Megoldás:

$$n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$$

Ha a szám utolsó számjegye 4, akkor az $(n+1)^2$ négyzetszám 5-re végződik, de akkor az $(n+1)$ is 5-re végződik. Ha egy 5-re végződő számot négyzetre emelünk, akkor a négyzetszám 25-re végződik, tehát az utolsó előtti számjegy a 2.

3. Hány hatjegyű számot alkothatunk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből?

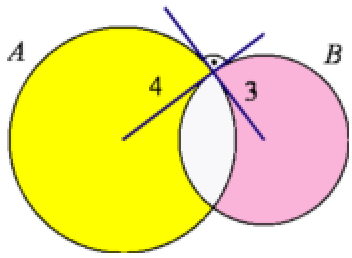
Hány négyzetszámot kaphatunk így, ha a számjegyek különbözők?

Megoldás:

Az összes lehetőség: 6^6. Ezek közül azoknak a száma, amelyeknek a számjegyei különbözők $6! = 720$.

Ezek között nincs négyzetszám, mert valamennyi ilyen szám osztható hárommal, de nem osztható 9-cel, hiszen a számjegyek összege minden esetben 15. A 15 nem osztható 9-cel, de osztható 3-mal, így ezek a számok 3-nak többszörösei, de 9-nek nem, tehát nem lehetnek négyzetszámok

4. Adott két egymást metsző kör, A és B, sugaruk 4, illetve 3 egység. Tudjuk, hogy az egyik metszéspontban a két körhöz húzott érintők merőlegesek egymásra. Számítsuk ki, hogy mennyivel nagyobb területű az A körnek a B kör által le nem fedett része a B körnek az A kör által nem lefedett részénél!



Megoldás:

Az A körnek a B kör által le nem fedett részét úgy kapjuk, hogy az A kör területéből kivonjuk a közös rész területét. A B körnek az A kör által le nem fedett részét úgy kapjuk, hogy a B kör területéből kivonjuk a közös rész területét. E két terület különbsége, tehát megegyezik az A kör és a B kör területének különbségével, hiszen mindkét tagból ugyanannyit vontunk le.

Az adatok szerint ez $16\pi - 9\pi = 7\pi$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy annak, hogy derékszögben metszi egymást a két kör, semmi jelentősége nincs. Valójában azt kell meghatároznunk, hogy mennyi $(t_A - t_{A\cap B}) - (t_B - t_{A\cap B})$, ami mindentől függetlenül $t_A - t_B$.

5. Legyen $A = a^3 + b^3 - c^3$ és $B = a^2 - b^2$. Hány igaz állítás van az alábbiak között, ha $a = 2{,}4$ és $b = -1{,}5$ és c rögzített valós szám?

Első állítás: $A \cdot B \leq -10$

Második állítás: $0 \leq A \cdot B \leq 100$

Harmadik állítás: $A \cdot B > 100$

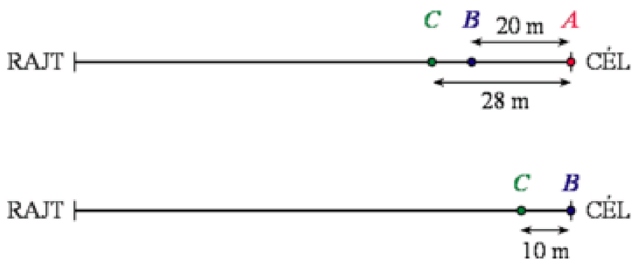
Negyedik állítás: $-10 < A \cdot B < 0$

Megoldás:

Pontosan egy igaz állítás van. Az állításokban megadott intervallumok diszjunktak, és lefedik a teljes számegyenest. Az $A \cdot B$ szorzat egy valós szám, amely így pontosan az egyik intervallumnak eleme.

6. Egy bizonyos versenytávon versenyez három futó, Aladár, Béla és Csaba. Mindhárman egyenletes sebességgel futják le a távot. Aladár a célba érkezésekor 20 méterrel van Béla és 28 méterrel Csaba előtt. Béla a célba érkezésekor 10 méterrel van Csaba előtt. Hány méteres a versenytáv?

Megoldás:



A szöveg alapján Béla 8 méterrel előzte meg Csabát, amikor Aladár célba ért. Ekkor Béla előtt még 20 m út van a célig. Ezalatt a 20 méteren még 2 méterrel növelte az előnyét Béla Csaba előtt.

Ha ezen a 20 méteren 2 m előnyt tudott szerezni Béla, akkor a korábbi 8 méter előnyéhez 80 méteres táv kellett, ha mindnyájan egyenletes sebességgel futnak.

Tehát a teljes távolság $80 + 20 = 100$ méter volt.

Másik megoldás:

A feladatot megoldhatjuk egyenletek segítségével is.

Legyen a teljes távolság: d, Béla sebessége v_b és Csaba sebessége v_{cs}.

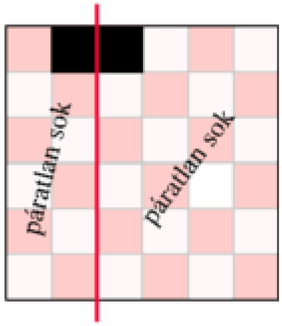
Amíg Aladár célba ért, Béla $d-20$ métert, Csaba $d-28$ métert tett meg, tehát sebességük aránya: $\frac{v_{cs}}{v_b} = \frac{d-28}{d-20}$. A második feltétel szerint amíg Béla megtette a teljes távolságot, d-t, azalatt Csaba $d-10$ métert tett meg, tehát sebességük aránya: $\frac{v_{cs}}{v_b} = \frac{d-10}{d}$. Mivel mindnyájan egyenletes sebességgel haladtak, az egyenlet: $\frac{d-28}{d-20} = \frac{d-10}{d}$. Ebből $d(d-28) = (d-20)(d-10)$.

A zárójelek felbontása, rendezés után azt kapjuk, hogy $d = 100$.

7. Egy $6{\times}6$ mezőből álló sakktáblát hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk be. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar el. Bizonyítsuk be, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté.

Megoldás:

Bárhogy is teszünk le egy dominót, annak középvonala az ábrának megfelelően két részre vágja a táblát. Ekkor azonban a tábla mindkét fele páratlan sok négyzetet tartalmaz, azaz ha le akarjuk fedni 1×2-es dominókkal, akkor ugyanazt a középvonalat még egy dominóval le kellene fednünk.



Összesen 5 vízszintes és 5 függőleges vonalat kell tehát lefednünk 2-2 dominóval. Ez 20 dominó lenne, egy táblára azonban csak 18 dominó helyezhető el. Ez nem lehetséges, tehát biztosan van olyan vonal, amelyik nem vág el dominót.

Feladatok

1. Lehet-e négyzetszám az a pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában 510 darab 1-es és valahány 0 szerepel?

Megoldás:

Végtelen sok olyan szám van, amely eleget tesz a feltételnek, nem tudjuk egyenként ellenőrizni, hogy melyik négyzetszám.

Keressünk közös tulajdonságot az adott alakú számok között!

A feltételnek eleget tevő végtelen sok különböző számnak közös tulajdonsága, hogy a számjegyeik összege éppen 510. A számjegyek összegéből a 9-cel és a 3-mal való oszthatóságra tudunk következtetni. Az 510 osztható 3-mal, de 9-cel nem. Van-e ilyen négyzetszám?

A négyzetszámok prímtényezőik páros kitevőjű hatványával oszthatók, tehát nem lehetséges az, hogy egy négyzetszám 3-mal osztható, de 9-cel nem.

Tehát nincs ilyen négyzetszám.

2. Egy kft-ben a dolgozók számára nyelvtanfolyamot indítottak angol és német nyelvből. A német nyelvet a csoport $\frac{3}{8}$-a, az angol nyelvet a csoport fele vette fel. Mekkora a kft dolgozóinak a létszáma, ha a dolgozók 75%-a tanulja valamelyik nyelvet, és a pontosan egy nyelvet tanulók száma 15 fő?

Megoldás:

24 fő.

3. Tulipánhagymákat vettem, de sajnos összekeveredtek. Tudom, hogy közülük 30 darab piros, 50 darab fehér és 40 darab sárga tulipán hagymája. A kertész szerint úgy kell számolni az ültetésnél, hogy a virághagymák 90%-ából nő ki virág.

a) Az összesből legalább hány darab virághagymát kell elültetni, hogy a virágok közt biztosan legyen legalább 10 szál sárga tulipán?

b) Az összesből legalább hány darab virághagymát kell elültetnem, hogy a virágok közt biztosan legyen legalább 5 szál piros vagy 6 szál fehér tulipán?

Megoldás:

a) Legalább 92 darab virághagymát kell elültetni.

b) Legalább 52 darab virághagymát kell elültetni.

4. Határozza meg azokat az a és b egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $a + b + 20 = ab$, és az a, b, 21 hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető!

Megoldás:

Ahhoz, hogy háromszög szerkeszthető legyen, szükséges, hogy $a + b > 21$ és $a > 0$, $b > 0$.

Érdemes szorzattá alakítással próbálkozni. Rendezzük az egyenletet: $ab - a - b + 1 = 21$, kiemeléssel folytathatjuk: $a(b - 1) - (b - 1) = 21$, újabb kiemeléssel: $(a - 1)(b - 1) = 21$.

A pozitív egész számok körében keressük 21 szorzattá bontását. $1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$. A tényezők felcserélésével nem kell foglalkoznunk, hiszen az egyenlet a-ban és b-ben szimmetrikus.

$a - 1 = 1$ és $b - 1 = 21$, ebből $a = 2$ és $b = 22$, vagy $a - 1 = 3$ és $b - 1 = 7$, ebből $a = 4$ és $b = 8$.

Az első esetben lehet háromszöget szerkeszteni, az oldalak nagyságrendben: $a = 2$, 21 és $b = 22$; $2+21 > 22$.

A második esetben nem szerkeszthető háromszög, mert $a + b < 21$.

Tehát a feladat megoldása: $a = 2$ és $b = 22$.

2.2. Racionális számok, tizedes törtek, irracionális számok, abszolút érték, gyökök, hatványok, logaritmusok

Számok felírása különböző alakban. Racionális számok tizedestört alakban, irracionális számok tizedestört alakban, számok pontos és közelítő értéke. Számítások gyökökkel, hatványokkal, logaritmussal. A hatványozás értelmezése racionális kitevő esetén, hatványozás azonosságai, gyökvonás azonosságai, logaritmus fogalma, a logaritmus azonosságai, áttérés más alapú logaritmusra.

Mintapéldák

1. Adjunk meg két olyan racionális számot, amelyek a $\frac{4}{113}$ és $\frac{5}{113}$ közé esnek. A választ indokoljuk!

Megoldás:

Ismeretes, hogy a racionális számok felírhatók két egész szám hányadosaként.

Ötlet: két pozitív szám számtani közepe biztosan a két szám közé esik.

Az ötlet alapján megadhatjuk a következő számokat:

$$\left(\frac{4}{113} + \frac{5}{113}\right) : 2 = \frac{9}{226} \text{ és } \left(\frac{4}{113} + \frac{9}{226}\right) : 2 = \frac{17}{452}$$

És igaz, hogy $\frac{4}{113} < \frac{17}{452} < \frac{9}{226} < \frac{5}{113}$.

Egy másik gondolatmenet: azért nem tudunk egyszerűen beszúrni két számot a két tört közé, mert a számlálók egymást követő természetes számok. Bővítsük úgy (3-mal) a törteket, hogy a számlálók közé be tudjunk írni két természetes számot:

$$\frac{4}{113} = \frac{12}{339} < \frac{13}{339} < \frac{14}{339} < \frac{15}{339} = \frac{5}{113}.$$

Végtelen sok további jó példa található.

2. Állapítsa meg, hogy a következő törtek közül melyek írhatók fel

a) véges tizedestört;

b) végtelen szakaszos tizedes tört;

c) végtelen nem szakaszos tizedestört alakban

$$\frac{9}{2}; \quad \frac{6}{18}; \quad \frac{5}{32}; \quad \frac{2}{7}; \quad \frac{3}{40}; \quad \frac{11}{6}; \quad \frac{1}{13}$$

Megoldás:

a) Véges tizedestört:

$$\frac{9}{2} = \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{45}{10}, \quad \frac{5}{32} = \frac{5 \cdot 5^5}{2^5 \cdot 5^5} = \frac{5^6}{10^6}, \quad \frac{3}{40} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2}, \quad \frac{3 \cdot 5^2}{10^3}$$

A véges tizedestörteket végtelen tizedestört alakban is fel lehet írni.

b) A racionális számok tizedestört alakja lehet véges és lehet végtelen szakaszos. Ezért a szokásos értelemben azok a törtek végtelen szakaszosak, amelyek nem végesek.

A véges tizedes törteket is fel lehet írni végtelen szakaszos tizedestört alakban is, például kiegészíthetjük egy $\dot{0}$ szakasszal.

Minden racionális szám felírható végtelen szakaszos tizedestört alakban.

A végesek többféleképpen is. Például $\frac{9}{2} = 4{,}5 = 4{,}5\dot{0} = 4{,}50\dot{0} = 4{,}4\dot{9}$ stb.

c) A felsorolt törtek valamennyien racionális számok, amelyek nem egyenlők egyetlen irracionális számmal sem. Az irracionális számok végtelen nem szakaszos tizedestörtek.

3. Írja fel a következő tizedestörteket közönséges törtalakban!

$$4{,}125; \qquad 5{,}\dot{6}; \qquad 3{,}0625; \qquad 4{,}58\dot{3}; \qquad 2{,}1\dot{9}; \qquad 123{,}\dot{1}2\dot{3}$$

Megoldás:

$$\frac{33}{8}; \quad \frac{17}{3}; \quad \frac{49}{16}; \quad \frac{55}{12}; \quad \frac{22}{10}; \quad \frac{123}{999}.$$

4. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét, ne használjon számológépet!

a) $\lg 8 + 3 \lg 50$

b) $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4}$

c) $\dfrac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 4} + \dfrac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 4} + \dfrac{1}{\log_4 1 + \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 4}$

Megoldás:

a) $\lg 8 + 3 \lg 50 = \lg(8 \cdot 50^3) = \lg(2 \cdot 50)^3 = 3 \lg 100 = 6.$

b) $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} = \dfrac{49}{49^{\log_7 2}} - \dfrac{1}{5^{\log_5 4}} = \dfrac{49}{2^2} - \dfrac{1}{4} = 12$

c) Az első tag: $\dfrac{1}{\log_2(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)} = \dfrac{1}{\log_2 24} = \log_{24} 2$ a többi tagon is hasonló átalakítást hajtunk végre. Az összeg:

$$\log_{24} 2 + \log_{24} 3 + \log_{24} 4 = \log_{24} 24 = 1.$$

5. Számológép használata nélkül bizonyítsa be, hogy $5\sqrt{2}-7$ reciproka $5\sqrt{2}+7$.

Megoldás:

Használjuk a bizonyításhoz a tört nevezőjének gyöktelenítését nevezetes szorzat alkalmazásával.

$$\frac{1}{5\sqrt{2}-7}\cdot\frac{5\sqrt{2}+7}{5\sqrt{2}+7} = \frac{5\sqrt{2}+7}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-7^2} = \frac{5\sqrt{2}+7}{50-49} = 5\sqrt{2}+7$$

Egy másik lehetséges meggondolás szerint két szám egymás reciproka, ha a szorzatuk 1. Ezt ellenőrizzük: $\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(5\sqrt{2}+7\right) = 25\cdot 2 - 49 = 1$.

6. Mennyi a $\left|\sqrt{5}-3\right| + \left|\sqrt{5}+3\right|$ kifejezés értéke? Válasszuk ki a helyes választ!

A) 6 *B)* 0 *C)* $-2\sqrt{5}$ *D)* $2\sqrt{5}$

Megoldás:

Mivel $\sqrt{5}-3<0$, így $\left|\sqrt{5}-3\right| = 3-\sqrt{5}$, tehát az összeg $3-\sqrt{5}+\sqrt{5}+3=6$. Az *A)* válasz a helyes.

7. Állapítsuk meg, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indoklással!

a) Két irracionális szám összege irracionális

b) Egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális

c) Egy racionális és egy irracionális szám szorzata irracionális

d) Egy racionális és egy irracionális szám hányadosa irracionális

Megoldás:

a) Hamis. Ellenpélda: $\left|\sqrt{5}-3\right| + \left|\sqrt{5}+3\right| = 6$ (előző feladat).

b) Igaz. Indirekt bizonyítást adunk rá. Legyen p racionális szám és q irracionális szám, az összegük r. Tegyük fel, hogy r racionális szám (az állítással ellentétben). Az $r=p+q$ egyenlőségből fejezzük ki q-t, $q=r-p$, ez két racionális szám különbsége, tehát racionális. Így a kiindulási feltétellel ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevésünk hamis. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a p racionális szám és q irracionális szám összege irracionális.

c) Hamis. Ha a racionális szám a 0, akkor a szorzat is 0, tehát racionális szám.

Megjegyezzük, hogy más esetben valóban irracionális a szorzat. Ezt indirekt bizonyítjuk. Legyen p racionális szám és q irracionális szám, a szorzatuk r. Tegyük fel, hogy r (az állítással ellentétben) racionális szám. Az $r=p\cdot q$ egyenlőségből fejezzük ki q-t. Ha $p\neq 0$, akkor $q=\dfrac{r}{p}$; ez két nem 0 racionális szám hányadosa, tehát racionális. Így a kiindulási feltétellel ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevésünk hamis. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a 0-tól különböző p racionális szám és q irracionális szám szorzata irracionális.

d) Hamis. Ha a számlálóban lévő racionális szám a 0, akkor a hányados is 0, tehát racionális szám.

Ha a racionális szám nem 0, akkor racionális és irracionális szám hányadosa valóban irracionális, függetlenül attól, hogy melyik a számláló, melyik a nevező. Az előzőekhez hasonló módszerrel bizonyítható.

8. Igazoljuk, hogy egy végtelen sok elemű számtani sorozat elemei között nem lehet pontosan két irracionális szám.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a sorozatban pontosan két irracionális szám van, legyenek ezek az a_k és az a_n, $n > k$. A feltétel szerint a sorozat többi tagja racionális. A racionális tagok közül két szomszédos esetén a nagyobb sorszámú tagból kivonva a kisebb sorszámú tagot, a különbség $d \neq 0$ differencia is racionális.

$a_{n+1} = a_n + d$: ez egy irracionális és egy racionális szám összege, tehát irracionális, vagyis találtunk újabb irracionális számot a sorozat elemei között, amely különbözik az a_n-től és az a_k-tól. (A gondolatmenet hasonlóképpen folytatható, így végtelen sok irracionális szám is lehetne a sorozat tagjai között). Beláttuk, hogy nem lehet pontosan két irracionális szám a sorozat tagjai között.

9. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\sqrt{27}-4\right)x+\left(\sqrt{12}-3\right)y=\sqrt{48}-5$$

Megoldás:

Vegyük észre, hogy az összes négyzetgyökös kifejezést át tudjuk alakítani $\sqrt{3}$ egész számú többszörösére: $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Ezeket felhasználva az egyenlet: $3\sqrt{3}x - 4x + 2\sqrt{3}y - 3y = 4\sqrt{3} - 5$.

Rendezzük úgy az egyenletet, hogy a megfelelő tagokból emeljük ki a $\sqrt{3}$-at:

$$\sqrt{3}(3x + 2y - 4) = 4x + 3y - 5.$$

Ha az egyenletnek van gyöke a racionális számok halmazán, akkor a jobb oldalon biztosan racionális szám áll. A bal oldal csak úgy lehet egyenlő egy racionális számmal, ha a $\sqrt{3}$ szorzója 0, és akkor a jobb oldal is 0.

Tehát felírhatunk egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert, amelyet például a behelyettesítéses módszerrel megoldhatunk.

$$\begin{aligned}3x + 2y - 4 &= 0\\ 4x + 3y - 5 &= 0\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer gyöke $x = 2$ és $y = -1$.

10. Van-e olyan x valós szám, amelyre teljesül, hogy $x < x^3 < x^4 < x^2$? (Indoklással)

Megoldás:

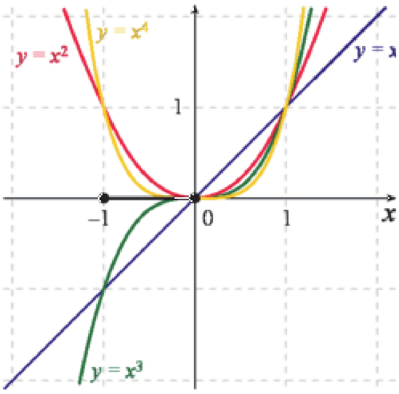
Érdemes az egyenlőtlenségsorozatot részenként vizsgálni. 0-ra és 1-re mindenütt egyenlőséget kapunk, a (-1)-re $x = x^3$ és $x^4 = x^2$, ezek tehát nem megoldások.

$x^4 > x^2$ minden olyan számra, amelynek abszolút értéke 1-nél nagyobb. Tehát ha $x^4 < x^2$, akkor csak $|x| < 1$ lehet. Ellenőrizni kell a többi egyenlőtlenséget is!

Vizsgáljuk ezen az intervallumon, vagyis ahol $-1 < x < 1$, az $x < x^3$ egyenlőtlenséget. Ha $0 < x < 1$, akkor $x > x^3$, tehát ez az intervallum nem felel meg. Az intervallum másik fele a $-1 < x < 0$, erre már teljesül, hogy $x < x^3$.

Sőt, ezen az intervallumon igaz az az egyenlőtlenség is, amelyet eddig nem néztünk: $x^3 < x^4$, hiszen a bal oldal negatív, a jobb oldal pozitív. A fentiek alapján a válasz: az egyenlőtlenségsorozat igaz a $(-1; 0)$ intervallumban.

Érdemes grafikont is készíteni!



Egy kicsit más gondolatmenettel: $x \neq 0$, hiszen 0-ra nem teljesülnek az egyenlőtlenségek. Eszerint $x^2 > 0$. Osszunk a pozitív x^2-tel:

$$\frac{1}{x} < x < x^2 < 1$$

Csak úgy lehet egy szám és annak reciproka is kisebb 1-nél, ha negatív: $x < 0$. Mivel azonban $x^2 < 1$, így $-1 < x < 1$. Tehát $-1 < x < 0$. Ellenőrizhető, hogy ezekre mindegyik egyenlőtlenség teljesül.

Feladatok

1. Állapítsuk meg, hogy az alábbi számok racionálisak vagy irracionálisak!

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Megoldás:

a) Jelöljük a kérdéses számot x-szel, és határozzuk meg az x^2-et.

$x^2 = 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)} = 8+2\sqrt{16-12} = 12$, ebből $|x| = \sqrt{12}$, de mivel $4-2\sqrt{3} > 0$, ezért $x > 0$, tehát $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, ez irracionális szám.

b) Jelöljük a kérdéses számot y-nal, és határozzuk meg az y^2-et.

$$y^2 = 14+6\sqrt{5}+14-6\sqrt{5}+2\sqrt{\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(14-6\sqrt{5}\right)} =$$
$$= 28+2\sqrt{14^2-36\cdot 5} = 28+2\sqrt{16} = 36,$$

ebből $|y| = \sqrt{36} = 6$, mert $4-\sqrt{5} > 0$, ezért $y > 0$, tehát $y = 6$, ez racionális szám.

Másik megoldás:

a) Észrevehetjük, hogy a gyökök alatt teljes négyzet van:

$4+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$, illetve $4-2\sqrt{3}=1-2\sqrt{3}+3=\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

Tehát $x=\left|1+\sqrt{3}\right|+\left|1-\sqrt{3}\right|=1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$, mert $1-\sqrt{3}<0$.

b) Észrevehetjük, hogy a gyökök alatt teljes négyzet van:

$14+6\sqrt{5}=9+6\sqrt{5}+5=\left(3+\sqrt{5}\right)^2$, valamint $14-6\sqrt{5}=9-6\sqrt{5}+5=\left(3-\sqrt{5}\right)^2$.

Tehát $y=\left|3+\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=6$.

2. Mennyi a $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}}$ tört értéke? Melyik a helyes válasz?

A) 1 *B)* $\sqrt{3}$ *C)* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *D)* 3

Megoldás: *D)*

3. Legyen d egy valós szám. Válasszuk ki a négy lehetőség közül azt, amelyik kifejezi az eltérést a $3d$ és a -5 számok között!

A) $3d-5$ *B)* $3d+5$ *C)* $|3d+5|$

D) Az eltérést nem lehet kifejezni, mert d nem ismert.

Megoldás: *C)*

4. Számológép használata nélkül rakja növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$x=5\sqrt{2}-7; \quad y=5\sqrt{2}+7; \quad z=\lg 6+\lg 4+\lg 20-\lg 3-\lg 16;$$

$$t=\sin\left(\frac{3\cdot 2^{100}+1}{3}\cdot\pi\right); \quad v=\log_{10}(10^{2015})$$

Megoldás:

$$x<t=\frac{\sqrt{3}}{2}<z=1<y<v=2015$$

2.3. Egyenletek, egyenlőtlenségek, rendszereik, paraméteresek is

Algebrai átalakítások, nevezetes azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek rendezése. Másodfokú egyenletek – megoldóképlet, diszkrimináns, gyökök és együtthatók összefüggése, gyöktényezős alak. Törtes egyenletek és egyenlőtlenségek, másodfokú egyenlőtlenségek, abszolút értékes egyenletek és egyenlőtlenségek. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, paraméteres feladatok megoldása. Trigonometrikus egyenletek négyzetgyökös, abszolút értékes, exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány-, illetve értékkészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható feladatok, összetett feladatok megoldása.

Mintapéldák

1. Van-e megoldása a valós számok halmazán a következő egyenleteknek?

a) $\sqrt{-x} = 9$;

b) $\lg x = -5$;

c) $\sin 2x = \sqrt{3}$;

d) $|x| = -x$

Megoldás:

a) $x = -81$.

b) $x = 10^{-5}$.

c) Nincs megoldás, hiszen a szinusz érték nem lehet 1-nél nagyobb, márpedig $\sqrt{3} > 1$.

d) x tetszőleges nem pozitív szám, hiszen $|x| \geq 0$, x tetszőleges értéke mellett.

2. Oldjuk meg az $|x+3| + |x-9| < 1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Első megoldás:

Osszuk a számegyenest három diszjunkt intervallumra, amelyek egyesítése kiteszi a teljes számegyenest. Ehhez nézzük meg, hogy az abszolút értékes tagokban a lineáris kifejezések hol váltanak előjelet. Az első tag (-3)-nál, a második tag 9-nél.

Ezért a három intervallum: $x < -3$, $-3 \leq x \leq 9$ és $x > 9$.

Ha $x < -3$, akkor az egyenlőtlenség $-x - 3 - x + 9 < 1$, azaz $2x > 5$, ezért $x > 2{,}5$. Itt nincs megoldás.

Ha $-3 \leq x \leq 9$, akkor az egyenlőtlenség $x + 3 - x + 9 < 1$, azaz $11 < 0$, ami ellentmondás. Itt sincs megoldás.

Ha $x > 9$, akkor az egyenlőtlenség $x + 3 + x - 9 < 1$, azaz $2x < 7$. Itt sincs megoldás.

Tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Második megoldás: értékkészlet-vizsgálattal.

A bal oldalon mindkét abszolút értékes tag nemnegatív az x bármely valós értéke mellett. Az összeg minimumát akkor kapjuk, ha legalább az egyik tag 0. Mivel a két tag egyszerre nem lehet 0, a minimum értéke az $x = -3$-nál, illetve az $x = 9$-nél felvett értékkel egyenlő, vagyis 12. Tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

3. Keressük meg a hibát (hibákat) az $|x+3| + |x-9| < 1$ $(x \in \mathbf{R})$ egyenlőtlenségnek az alábbi hibás megoldásában.

„1. eset: $x + 3 + x - 9 < 1$, azaz $2x < 7$, tehát $x < 3{,}5$.

2. eset: $x + 3 - x + 9 < 1$, azaz $12 < 1$, nincs megoldás.

3. eset: $-x - 3 + x - 9 < 1$, azaz $-12 < 1$, ez igaz.

4. eset: $-x - 3 - x + 9 < 1$, azaz $-2x + 6 < 1$, tehát $x > 2{,}5$, tehát $2{,}5 < x < 3{,}5$."

Megoldás:

A megoldó gondolkodás nélkül, mechanikusan járt el, külön-külön vizsgálta a két abszolút értékes kifejezést, és így négy esettel dolgozott a négy lineáris kifejezés előjele szerint. Nem vette figyelembe azonban a négy esetet meghatározó feltételt; fel sem írta.

Az 1. esetben a számítás csak akkor érvényes, ha $x \geq 9$ (és $x > -3$), a kapott eredmény ennek nem felel meg.

A 2. esetben a számítás csak akkor érvényes, ha $-3 \leq x < 9$. Itt valóban nem kapunk megoldást.

A 3. eset feltétele lenne $x < -3$ és $x \geq 9$, ez üres halmaz. A számítással hiába jutunk igaz állításhoz, ebben az esetben sem kapunk megoldást.

A 4. feltétel $x < -3$ (és $x < 9$), a kapott eredmény ennek nem felel meg. Tehát az idézett rossz megoldás végső megállapítása hibás.

Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x-5} \geq 2x - 11$$

Első megoldás:

A bal oldal értelmes, ha $2x - 5 \geq 0$, azaz $x \geq 2{,}5$.

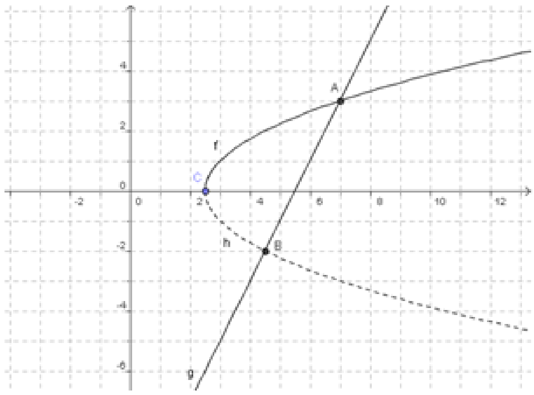
Ha $x < 5{,}5$, akkor a jobb oldalon negatív szám áll, ekkor az egyenlőtlenség teljesül, hiszen a bal oldalon nemnegatív kifejezés áll. Tehát a $[2{,}5; 5{,}5[$ intervallum biztosan hozzátartozik a megoldáshalmazhoz.

Ha $2x - 11 \geq 0$, azaz $x \geq 5{,}5$, akkor mindkét oldalon nemnegatív szám áll, négyzetre emelve a $\geq$ reláció továbbra is fennáll. Rendezzük az egyenlőtlenséget, ebből azt kapjuk, hogy $2x^2 - 23x + 63 \leq 0$. A nullhelyek: 4,5 és 7.

Mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív (2), ezért az egyenlőtlenség megoldása ebben az esetben: $4{,}5 \leq x \leq 7$. Az előző esetet is figyelembe véve a teljes megoldás a két halmaz uniója $2{,}5 \leq x < 7$.

Második megoldás:

A megoldáshoz segítségül szemléltessük az egyenlet két oldalán álló függvény grafikonját.



Az ábrán az $f(x) = \sqrt{2x-5}$, a $g(x) = 2x - 11$ és a $h(x) = -f(x)$ függvények grafikonját ábrázoltuk. Az f és a h függvények grafikonja egy-egy „félparabola”, a $\sqrt{x}$ grafikonjának transzformált változata, a $g(x)$ lineáris függvény képe egyenes.

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények metszéspontja a $(7; 3)$ pont. Behelyettesítéssel ellenőrizzük. A metszésponttól jobbra az egyenes a parabolaív fölött halad, tőle balra pedig alatta, $g(x) \geq f(x)$, ha $x \geq 7$. Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $x \geq 2{,}5$. Tehát az egyenlőtlenség megoldása $2{,}5 \leq x \leq 7$.

Az ábra segítségével magyarázatot kaphatunk arra is, hogyan léphet be az algebrai megoldásnál az $x = 4{,}5$. Ez a $-f(x) = g(x)$ egyenlet gyöke, amely a négyzetre emeléssel került be a gyökök közé, hiszen a négyzetre emelés utáni egyenlet megegyezik azzal, amit az $f(x) = g(x)$ négyzetre emelése után kapunk.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x-5} \geq 2x - 11$$

Hol a hiba az alábbi megoldásban?

„Az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emeljük: $2x - 5 \geq 4x^2 - 44x + 121$, 0-ra rendezzük és osztunk 2-vel: $2x^2 - 23x + 63 \leq 0$

Megkeressük a bal oldal nullhelyeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével.

A nullhelyek: 4,5 és 7.

Mivel a másodfokú tag együtthatója pozitív (2), ezért az egyenlőtlenség megoldása: $4{,}5 \leq x \leq 7$. A megoldás helyes, mert a gyök alatti kifejezés nemnegatív, ha $x \geq 2{,}5$, és a kapott megoldás beleesik ebbe a halmazba.

Ez a válasz mégis hibás, mert például az $x = 3$ esetén az egyenlőtlenség: $1 \geq -5$ igaz, holott ez nem szerepel a válaszként megadott megoldáshalmazban Hol a hiba?

Megoldás:

A megoldó nem figyelt arra, hogy a négyzetre emelésnél nem ekvivalens átalakítást hajtott végre. Nem vette tekintetbe, hogy a jobb oldalon álló kifejezés lehet negatív is, ha $x < 5{,}5$, és ilyenkor az értelmezési tartomány minden idetartozó eleme ($2{,}5 \leq x < 5{,}5$) megoldás, hiszen a bal oldal nemnegatív, azaz nagyobb a jobb oldalon álló negatív számnál. A helyes megoldás tehát $2{,}5 \leq x \leq 7$.

6. Az a valós paraméter mely értéke mellett lesz két egyenlő gyöke az $x^2 - ax + 4 = 0$ egyenletnek?

Megoldás:

A másodfokú egyenletnek akkor van két egyenlő gyöke, ha a diszkriminánsa 0.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet diszkriminánsa $b^2 - 2ac$.

Az egyenlet diszkriminánsa $a^2 - 4 \cdot 4 = 0$, ebből $|a| = 4$.

Tehát $a = 4$ vagy $a = -4$.

7. Oldja meg a $[-1; 1]$ intervallumon a következő egyenletet.

$$|x-1| + |x+1| = |2\operatorname{tg} x|\,.$$

Megoldás:

A legjobb grafikusan próbálkozni. A bal oldal a $[-1; 1]$ intervallumban konstans 2, itt a $|2\operatorname{tg} x|$ függvény 2-t vesz fel, ha $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{4}$.

8. Oldja meg valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$9^x - 4^{x-\frac{1}{2}} = 4^{x+1} - 3^{2x-1}$$

Megoldás:

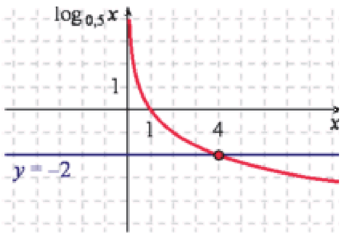
$$\begin{aligned} 3^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 4^x &= 4 \cdot 4^x - \frac{1}{3} \cdot 3^{2x} \\ \frac{4}{3} \cdot 3^{2x} &= \frac{9}{2} \cdot 2^{2x} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} &= \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

9. Oldja meg a $\log_{0,5} x \geq -2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján $-2 = \log_{0,5} 0{,}5^{-2}$ és $x > 0$.

A $\log_{0,5} x$ függvény grafikonja és az $y = -2$ egyenes metszi egymást a $(4; -2)$ pontban.



A 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért ha $\log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 0{,}5^{-2}$, akkor $0 < x \leq 0,5^{-2}$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $0 < x \leq 0{,}5^{-2} = 4$, ezen az intervallumon az egyenes a logaritmus görbéje alatt halad.

10. Oldja meg a $2\sin^2 x - 2\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A trigonometria alapegyenlete szerint $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ebből a bal oldal:

$$2\sin^2 x - 2\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 2\sin^2 x - 2(1 - \sin^2 x) + 4\sin x - 1 = 4\sin^2 x + 4\sin x - 3.$$

A $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ egyenlet $(\sin x)$-ben másodfokú, gyökei $\sin x = 0{,}5$ és $\sin x = -1{,}5$. Ez utóbbi gyök nem megoldása az egyenletnek, hiszen $-1 \leq \sin x \leq 1$.

A $\sin x = 0{,}5$ egyenlet gyökei: $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ és $x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + l \cdot 2\pi$, ahol $k, l \in \mathbf{Z}$.

11. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$$

Megoldás:

A bal oldalon álló kifejezések alapján az értelmezési tartomány: $\cos x \neq 0$ és $\cos x \neq -1$, tehát $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ és $x \neq (2k+1)\pi$; $k \in \mathbf{Z}$.

Mivel $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, beszorzunk $\sin x(1+\cos x)$-szel:

$$\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin x + 2\sin x \cos x;$$

felhasználjuk, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, és a jobb oldalon kiemelünk $2\sin x$-et:

$$\cos x + 1 = 2\sin x(1+\cos x).$$

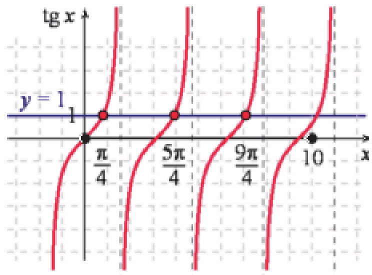
Már kikötöttük, hogy $(1+\cos x) \neq 0$, tehát oszthatunk vele, ebből azt kapjuk, hogy $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Ez akkor igaz, ha $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (és ez nem ütközik a kikötésekkel).

12. Hány megoldása van a $\operatorname{tg} x = 1$ egyenletnek a $[0;10]$ intervallumon?

Megoldás:

A $\operatorname{tg} x$ függvény értelmezve van a valós számok halmazán, kivéve a $\dfrac{\pi}{2}$ páratlan többszöröseit. Periodikus π szerint.



A $\operatorname{tg} x$ függvény grafikonja és az $y = 1$ egyenes

Ismeretes, hogy $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, így

$$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \pi < \frac{\pi}{4} + 2\pi < 10 < \frac{\pi}{4} + 3\pi.$$

Tehát a $[0;10]$ intervallumon 3 megoldása van az egyenletnek, ezek: $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}$.

13. Az $f(x) = x^2 + 2x + c$ függvényt a valós számok halmazán értelmezzük. Hogyan kell megválasztani a c értékét ahhoz, hogy

a) a függvény grafikonja érintse az x tengelyt;

b) a függvény minimuma -5 legyen;

c) a függvény értékkészletébe csak negatív számok tartozzanak?

A válaszokat indokoljuk!

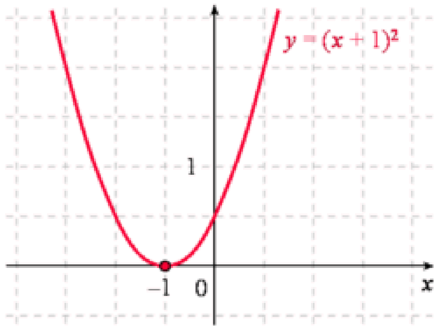
Megoldás:

a) A másodfokú függvény grafikonja parabola, amelynek szimmetria tengelye párhuzamos az y tengellyel. A parabola és az x tengely közös pontjai adják meg a függvény 0-helyeit. Érintés esetén egy 0 helye van, ilyenkor a diszkrimináns 0.

A diszkrimináns: $4 - 4c = 0$, tehát $c = 1$.

Úgy is gondolkodhatunk, hogy ilyenkor a kifejezés teljes négyzet, mégpedig csak az $x + 1$ négyzete lehet. Így $c = 1$, és $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ valóban teljes négyzet.

Ábrázoljuk a parabolát!



b) A függvény minimumának megfelelő pont a grafikonon a parabola szimmetria tengelyén van. Próbálkozzunk a teljes négyzetté alakítással!

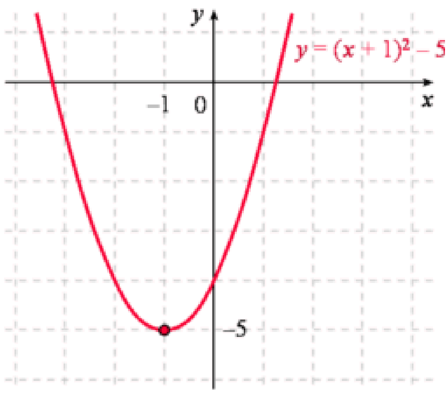
$$f(x) = x^2 + 2x + c = (x + 1)^2 - 1 + c.$$

Ebből tudjuk, hogy a szimmetria tengely helye az $x = -1$, a minimum értéke $-1 + c$.

Ahhoz, hogy ez -5 legyen, az kell, hogy $c = -4$ legyen.

Más meggondolással: az előző rész eredményét felhasználva $c = 1$ esetén a minimum értéke 0; ahhoz, hogy ez -5 legyen, még 5-tel kell csökkentenünk c-t: $c = 1 - 5 = -4$.

A parabola grafikonja:



c) Mivel az x^2 együtthatója 1 – pozitív szám –, ezért a függvény grafikonja felfelé nyílik. Akárhova toljuk az y tengellyel párhuzamosan, a parabolának mindig lesz olyan darabja, amelyik az x tengely fölé esik. Tehát lehetetlen, hogy csak negatív értékeket vegyen fel a függvény.

Ezt beláthatjuk a grafikonra való hivatkozás nélkül is, pusztán algebrai eszközökkel. Akármennyi is a c, helyettesítsünk x helyébe $|c|$-t. Ha $c > 0$, akkor a kifejezés minden tagja pozitív. Ha $c = 0$, akkor a kifejezés értéke is 0. Ha $c < 0$, akkor

$$f(x) = x^2 + 2x + c = c^2 + 2|c| + c = c^2 + 2(-c) + c = c^2 - c = c^2 + |c| > 0,$$

hiszen ilyenkor $|c| = -c$.

Más megfontolással esetszétválasztás nélkül: $f(|c|) = |c|^2 + 2|c| + c$. Mivel $|c| + c \geq 0$ minden c-re, így $|c|^2 + 2|c| + c \geq |c|^2 + |c| \geq 0$.

Ezzel beláttuk, hogy a függvény a $|c|$ helyen nemnegatív.

14. Oldja meg a valós számok halmazán az $\dfrac{x+2}{3-x} \leq 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A tört értéke akkor 0, ha a számláló 0 és a nevező nem 0. Tehát $\dfrac{x+2}{3-x} = 0$, ha $x = -2$.

A tört értéke akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele különböző, vagyis $\dfrac{x+2}{3-x} < 0$, ha $x < -2$ vagy $x > 3$.

Tehát az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $x \leq 2$ vagy $x > 3$.

Feladatok

I. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenleteket

1. $\cos^2 x = \sin 2x + \sin^2 x$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - \sin^2 x &= \sin 2x \\
\cos 2x &= \sin 2x \\
2x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \\
x &= \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbf{Z}
\end{aligned}$$

Ha fokokban számolunk, a gyökökre $22{,}5° + k \cdot 90°$, $k \in \mathbf{Z}$ adódik.

Másik megoldás:

Felhasználjuk az ismert $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ azonosságot. A megoldandó egyenlet ekkor a $\cos^2 x = 2 \sin x \cos x + \sin^2 x$.

Első lépésként tisztázzuk, hogy abban az esetben, amikor $\cos x = 0$, nem kaphatunk megoldást. Ebben az esetben ugyanis $\sin^2 x = 1$, továbbá $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$, amely értékekre nem teljesül a kívánt egyenlőség.

Ezután helyettesítsük be az ismert képletet: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, és rendezés után osszunk $\cos^2 x$-szel ($\cos x \neq 0$).

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= 2 \sin x \cos x + \sin^2 x \\
\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x &= 0 \qquad (\cos x \neq 0) \\
\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

A $\operatorname{tg} x$-ben másodfokú egyenlet gyökei: $-1 + \sqrt{2}$ és $-1 - \sqrt{2}$.

Zsebszámológép segítségével megkaphatjuk (négy tizedest kiírva) az $x_1 = 0{,}3927$ és $x_2 = -1{,}1781$.

A tangens értékből fokokban keresve x-et, a kapott értékek $22{,}5°$ és $67{,}5°$.

A $\operatorname{tg} x$ periódusa π, tehát a gyökök $x_1 = 0{,}3927 + k\pi$ és $x_2 = -1{,}1781 + k\pi$.

Meggyőződhetünk róla, hogy az előző megoldásban kapott gyökök tizedestört alakja négy tizedes jegyre ugyanaz, mint a most kapott két megoldás: $\frac{\pi}{8} = 0{,}3927$ és $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -1{,}1781$.

A kapott eredmények nem pontosak, de bebizonyítható, hogy $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ pontosan $-1 + \sqrt{2}$. Ehhez alkalmazzuk a kétszeres szög tangensére vonatkozó összefüggést:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ha $\operatorname{tg} x = -1 + \sqrt{2}$, illetve $-1 - \sqrt{2}$, akkor a $\operatorname{tg} 2x$ értéke

$$\frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{1-(1-2\sqrt{2}+2)} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}} = 1,$$
$$\frac{2(-1-\sqrt{2})}{1-(-1-\sqrt{2})^2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{1-(1+2\sqrt{2}+2)} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2-2\sqrt{2}} = 1,$$

azaz mindkét esetben 1. Tudjuk azonban, hogy $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1$, ezért $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

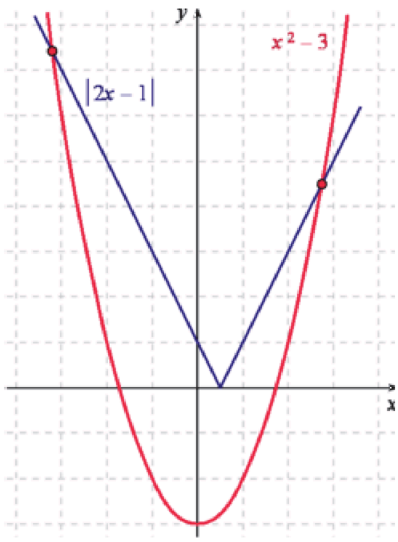
2. $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$

Megoldás:

A gyök alatti mennyiség teljes négyzet, ezért rendezés után az egyenlet:

$$x^2 - 3 = |2x - 1|\,.$$

Ábrázoljuk grafikonon a két oldalon álló függvényt:



Két metszéspontot látunk. A pontos értékeket számítással határozzuk meg.

Ha $x \geq \frac{1}{2}$, akkor az egyenlet: $x^2 - 3 = 2x - 1$, ebből $x = 1 + \sqrt{3}$. (A másodfokú egyenlet másik gyöke nem felel meg a kikötésnek.)

Ha $x \leq \frac{1}{2}$, akkor az egyenlet $x^2 - 3 = -2x + 1$, ebből $x = -1 - \sqrt{5}$. (A másik gyök ebben az esetben sem felel meg a kikötésnek.)

Eszerint az egyenlet két megoldása: $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ és $x_2 = -1 - \sqrt{5}$.

Megjegyzés. Az ábrázolás nem elengedhetetlen része a megoldásnak, csak segít a gyökök helyének „betájolásában”.

3. $(\log_3 3x)^2 = \log_3 \frac{x^3}{3} + 4$

Megoldás:

A logaritmus azonosságai alapján az egyenlet:

$$\begin{aligned}(\log_3 3 + \log_3 x)^2 &= 3\log_3 x - \log_3 3 + 4 \\ (1 + \log_3 x)^2 &= 3\log_3 x + 3\end{aligned}$$

Vezessünk be új ismeretlent, legyen $a = \log_3 x$ (azaz $x = 3^a$), $x > 0$, ekkor az egyenlet:

$$\begin{aligned}(1 + a)^2 &= 3a + 3 \\ a^2 - a - 2 &= 0\end{aligned}$$

A gyökök: $a_1 = 2$ és $a_2 = -1$, tehát $x_1 = 9$ és $x_2 = \frac{1}{3}$, és ezek valóban gyökei az eredeti egyenletnek.

4. $\lg(5^x + 1) = x(\lg 2 - 1) + \lg 30$

Megoldás:

Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait az $x(\lg 2 - 1)$ tagra:

$\lg 2 - 1 = \lg 2 - \lg 10 = \lg \frac{2}{10} = \lg \frac{1}{5}$, ebből $x(\lg 2 - 1) = x \lg \frac{1}{5} = \lg \frac{1}{5^x}$. Valamint további azonosságokat felhasználva az egyenlet: $\lg(5^x + 1) = \lg \frac{30}{5^x}$.

A logaritmus kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért: $5^x + 1 = \frac{30}{5^x}$, amelyet 5^x-nel beszorozva és rendezve 5^x-ben másodfokú egyenletet kapunk: $5^{2x} + 5^x - 30 = 0$. Mivel $5^x > 0$, az egyenletnek csak a pozitív gyökei adnak megoldást x-re: $5^x = 5$, ekkor $x = 1$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy $x = 1$ valóban megoldása az egyenletnek.

5. $(x - 2)^2 |\cos x| = \cos x$

Megoldás:

A bal oldalon álló kifejezés soha nem negatív, ezért csak a $\cos x \geq 0$ esetet kell tekintetbe vennünk. Ekkor azonban $|\cos x| = \cos x$. Eszerint az egyenlet ekvivalens azzal, hogy $\cos x \geq 0$ és $(x - 2)^2 \cos x = \cos x$. Ez utóbbi kifejezést átrendezve és szorzatalakba írva $(x - 1)(x - 3)\cos x = 0$.

A $\cos x = 0$ nyilvánvalóan megoldás. Ekkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Az $x = 3$ csak akkor jöhet számításba megoldásként, ha $\cos 3$ nemnegatív. Mivel azonban $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{3\pi}{2}$, ahol is a koszinusz függvény negatív, a 3 nem megoldás.

Az $x = 1$ viszont megoldás, mert $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ és itt a koszinusz pozitív.

Más gondolattal:

Az abszolút érték jelentése alapján:
$|\cos x| = \cos x$, ha $\cos x \geq 0$, illetve $|\cos x| = -\cos x$, ha $\cos x \leq 0$.

Ha $|\cos x| = \cos x$, akkor az egyenlet: $(x-2)^2 \cos x = \cos x$.

A $\cos x = 0$ megoldása az egyenletnek. Ha $\cos x \neq 0$, akkor osztva vele azt kapjuk, hogy $(x-2)^2 = 1$.

Ha $|\cos x| = -\cos x$, akkor az egyenlet: $-(x-1)^2 \cos x = \cos x$.

Ebben az esetben is megoldást kapunk a $\cos x = 0$ alapján. Ha pedig $\cos x \neq 0$, akkor osztva vele $(x-2)^2 = 1$ adódik.

Az összes esetet megvizsgálva megkapjuk a gyököket.

1. $\cos x = 0$, ekkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. $(x-2)^2 = 1$, ebből $x = 3$ vagy $x = 1$, de mivel $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{3\pi}{2}$, itt $\cos x < 0$, tehát az $x = 3$ nem megoldás. Az $x = 1$ azonban megoldás, mert $\cos 1 \geq 0$ (kicsit kevesebb $\frac{1}{2}$-nél).

3. $-(x-2)^2 = 1$ nem fordulhat elő.

Összesítve, az egyenlet megoldása: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, továbbá $x = 1$.

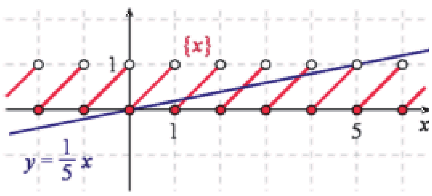
Megjegyzés: A második gondolatmenet eseteit nemcsak a $|\cos x|$ értelmezése, hanem a $\cos x$ előjele alapján is vizsgálhatjuk, három esetre bontva így a megoldást.

6. $\{x\} = \frac{1}{5}x$

Az $\{x\}$ az x törtrészét jelöli, $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x egész részét, vagyis az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelenti.

Megoldás:

Grafikus megoldás.



Észrevehetjük, hogy a $[0; 4]$ intervallumban találunk közös pontokat. Számítással megtalálhatjuk a pontos értékeket.

A törtrész függvény definíciója alapján a következő összefüggést írhatjuk fel:

$\{x\} = x - n$, ha $n \leq x < n + 1$, ahol $n \in \mathbf{Z}$.

Érdemes intervallumonként keresni a megoldásokat.

Mivel a $\{x\}$ függvény minden értékre nemnegatív, az egyenletnek nincs negatív megoldása. Egy lehetséges megoldása $x_1 = 0$.

A $(0;1)$ intervallumban a $\{x\} = x > \frac{1}{5}x$.

Az $[1;2[$ intervallumban $\{x\} = x - 1 = \frac{1}{5}x$, ha $x_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

A $[2;3[$ intervallumban $\{x\} = x - 2 = \frac{1}{5}x$, ha $x_3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

A $[3;4[$ intervallumban $\{x\} = x - 3 = \frac{1}{5}x$, ha $x_4 = \frac{15}{4} = 3{,}75$.

Ha $x \geq 4$, akkor $\frac{1}{5}x > x$, nincs több megoldás.

Más meggondolással:

$\{x\} = \frac{1}{5}x$ ekvivalens azzal, hogy $5\{x\} = x$. Ebből is kiindulhatunk (és fel is fogjuk használni), de még egy kicsit alakítunk az egyenleten. $4\{x\} = x - \{x\} = [x]$, azaz $4\{x\} = [x]$. Vagyis $\{x\}$ egy egész szám negyedrésze, így $\{x\}$ – lévén $0 \leq \{x\} < 1$ – lehetséges értékei: 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. Ezért mivel $x = 5\{x\}$, a megoldások $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = \frac{15}{4}$. (Vagy másképp: $[x] = 4\{x\}$ alapján $[x]$ lehetséges értékei rendre 0, 1, 2, 3.)

II. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

1. $\sqrt{2x + 11} \geq x - 12$

Megoldás:

Értelmezési tartomány: $x \geq -5{,}5$.

Ha a jobb oldal nem pozitív, akkor az egyenlőtlenség igaz, tehát a $-5{,}5 \leq x \leq 12$ hozzá tartozik a megoldáshoz.

Legyen $x > 12$ (vagyis amikor a jobb oldal pozitív), akkor mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, ezzel a $2x + 11 \geq x^2 - 24x + 144$ másodfokú egyenlőtlenség adódik, amelyből

$$0 \geq x^2 - 26x + 133.$$

A nullhelyek 19 és 7. Ennek a másodfokú egyenlőtlenségnek a megoldása a $[7;19]$ intervallum, de ez csak a 12-nél nagyobb értékekre megoldás: $[12;19]$.

Összesítve, az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $-5{,}5 \leq x \leq 19$.

2. $\sqrt{x^4 - 2x + 1} \geq 1 - x$

Megoldás:

Vegyük észre a gyök alatt a teljes négyzetet: $\sqrt{(x^2 - 1)^2} = \left|x^2 - 1\right|$. Az abszolút érték definíciója szerint: $\left|x^2 - 1\right| = x^2 - 1$, ha $|x| \geq 1$, de $\left|x^2 - 1\right| = -(x^2 - 1)$, ha $|x| \leq 1$.

Válasszuk először az első esetet: $x \geq 1$ vagy $x \leq -1$, ekkor az egyenlőtlenség:

$$x^2 - 1 \geq 1 - x,$$

0-ra rendezve: $x^2 + x - 2 \geq 0$. A bal oldali másodfokú kifejezés 0-helyeit megkereshetjük például a megoldóképlettel vagy szorzattá alakítással. A nullhelyek: 1 és -2.

Tehát a bal oldalt szorzatalakban felírva azt kapjuk, hogy $(x-1)(x+2) \geq 0$.

A szorzat akkor és csak akkor nemnegatív, ha a tényezők egyező előjelűek – vagy valamelyik 0. A nullhelyeket már megállapítottuk, a szorzat pozitív, ha mindkét tényező pozitív, azaz $x > 1$ vagy ha mindkettő negatív, azaz $x < -2$, illetve 0, ha $x = 1$ vagy $x = -2$.

Ezeket összevetve az esetszétválasztásban tett kikötésekkel, a megoldás: $x \geq 1$ vagy $x \leq -2$.

Az abszolút érték definíciója alapján választva a második esetet, a $-(x-1)^2 \geq 1 - x$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Ekkor a $-1 \leq x \leq 1$ intervallumban az egyenlőtlenség: $-x^2 + 1 \geq 1 - x$, ebből $x^2 - x \leq 0$. A bal oldalt szorzattá alakítjuk: $x(x-1) \leq 0$.

A szorzat nem pozitív, ha $0 \leq x \leq 1$. Mivel most a $[-1; 1]$ intervallumban keressük a gyököket, azért itt ez a megoldás.

Az abszolút érték értelmezésének megfelelő esetszétválasztás eredményeit összesítve kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása: $x \leq -2$ vagy $0 \leq x$.

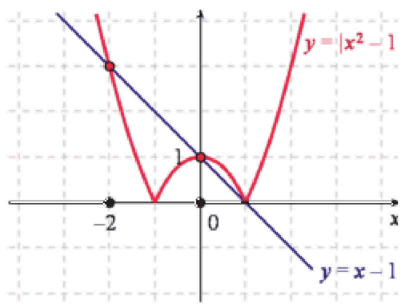
Másik megoldás:

Oldjuk meg az eredetivel ekvivalens $\left|x^2 - 1\right| \geq 1 - x$ egyenlőtlenséget grafikusan!

Az $x^2 - 1$ másodfokú függvény képe parabola, amelyet az x^2 normál parabolából az y tengely mentén 1 egységgel negatív irányba eltolással kapunk.

Az abszolút érték a nemnegatív függvényértékekhez tartozó pontokat helyben hagyja, a negatív függvényértékeknek megfelelő pontok ellentettjét kell megrajzolnunk, vagyis az x tengelyre tükrözzük az eredeti parabola $[-1; 1]$ intervallumhoz tartozó parabolaívet.

A jobb oldali függvény képe egyenes, amelynek a meredeksége -1, és az y tengelyt az 1-ben metszi. A két görbe metszéspontjainak helye: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$. Ezek helyességéről behelyettesítéssel meggyőződhetünk. A bal oldali függvény görbéje az egyenes „fölött” halad, ha $x < -2$ vagy $x > 0$, hozzávéve az egyenlőségeket, a megoldás: $x \leq -2$ vagy $0 \leq x$.



További feladatok

A) Oldja meg az alábbi gyökös és abszolút értékes egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x-\sqrt{x}-2=0$ *b)* $\sqrt{x^2-4x+4}=x-2$ *c)* $\sqrt{3-2x}=x-1$
d) $\sqrt{(2x-3)^2}=3x+2$ *e)* $|x+2|=(x+4)^2$ *f)* $|x+2|\,x=1$
g) $\sqrt{8-x^2}=-x$ *h)* $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}=-1$ *i)* $\sqrt{x-4}=\sqrt{x}-2$
j) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x}-4$ *k)* $|x+1|+|x-3|=-\dfrac{1}{2}x+5$ *l)* $\sqrt{4x+9}=9-\sqrt{x-3}$
m) $\sqrt{x^2}=-x$

B) Oldja meg az alábbi gyökös és abszolút értékes egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2+4x+4}>x+6$ *b)* $|x+2|<(x+4)^2$
c) $x+|x|\geq x^2-3$ *d)* $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}\leq 5$
e) $\sqrt{20-x}\leq x$ *f)* $\sqrt{2x-5}\geq 2x-11$
g) $\left|\dfrac{2}{x-13}\right|>\dfrac{8}{9}$ *h)* $\left|\dfrac{2}{x-4}\right|>1$
i) $2\sqrt{x^2-10x+25}+x\leq 14$ *j)* $\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{4x-3}\leq 3x-1$
k) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}\geq 0$ *l)* $\dfrac{2x}{|x-3|-5}\geq 0$
m) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}\leq 1$ *n)* $\sqrt{x+1}+x<\dfrac{1}{2}$

C) Oldja meg az alábbi exponenciális és logaritmikus egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.

a) $5^x=3^x$ *b)* $10^x=0$ *c)* $2^{(x-1)(x+3)}=1$
d) $2^{x^2+2x-3}<1$ *e)* $x^{\frac{2}{3}}-16x^{\frac{1}{3}}=0$ *f)* $3^x-1\leq 0$
g) $3^{1-x}\geq 81$ *h)* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}\geq 2$

2.

a) $\log_3(x+3)+\log_3(x+5)=1$ *b)* $\lg(x+3)+\lg(x-3)=\lg(x+9)$
c) $\dfrac{1}{2}\lg 2x=\lg(3-x)-\lg\sqrt{x+1}$ *d)* $\lg x^2+\lg|x|=3$
e) $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}$ *f)* $\log_x(x^2+x-6)<2$
g) $\lg\sin x=0$ *h)* $\log_2\cos x=-\dfrac{1}{2}$ *i)* $\lg\operatorname{tg}x=2$

2.4. Sorozatok, vegyes példák, különböző megadási módok. Számtani és a mértani sorozatok

Pozitív egész számok, reciprokok, páratlan számok, páros számok, négyzetszámok, köbszámok, a 2 hatványai, háromszögszámok sorozatai, stb. Megadási módok, jelölések, grafikonok, egyszerű összegezések. Számtani és mértani sorozatok.

Mintapéldák

1. Egy sorozatot a következő képlettel adunk meg: $a_n = -4 + \log_2(n+1)$, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. Hány 2-nél kisebb nemnegatív tagja van a sorozatnak?

Megoldás:

A következő egyenlőtlenséget kell megoldani a pozitív egész számok halmazán:

$$0 \leq -4 + \log_2(n+1) < 2.$$

Egyrészt $0 \leq -4 + \log_2(n+1)$, azaz $4 \leq \log_2(n+1)$, ebből $n+1 \geq 16$, tehát $n \geq 15$.

Másrészt $-4 + \log_2(n+1) < 2$, vagyis $\log_2(n+1) < 6$, ebből $n+1 < 64$, tehát $n < 63$.

Összevetve a két feltételt: $15 \leq n < 63$, tehát összesen 48 megfelelő tagja van a sorozatnak.

Más meggondolással: azt kell összeszámolnunk, hogy hány n természetes számra teljesül, hogy $4 \leq \log_2(n+1) < 6$, tehát (felhasználva, hogy a 2 alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő) a $16 \leq n+1 < 64$ hány n-re teljesül.

2. Egy mértani sorozat első három elemének összege 7. Egy másik mértani sorozatnak az első eleme megegyezik az előzőével, de a hányadosa az előzőénél 1-gyel nagyobb. Ez utóbbi mértani sorozat első három elemének összege 13. Mennyi az első sorozat első eleme és hányadosa?

Megoldás:

Alkalmazzuk a mértani sorozat szokásos jelöléseit, és írjuk fel a feltételek alapján az összefüggéseket!

$$\begin{aligned} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 &= 7 \\ a_1 + a_1(q+1) + a_1(q+1)^2 &= 13 \end{aligned}$$

Sem $1 + q + q^2$, sem a_1 nem lehet nulla. Osszuk el a második egyenletet az elsővel:

$$\frac{1 + (q+1) + (q+1)^2}{1 + q + q^2} = \frac{13}{7},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} 7q^2 + 21q + 21 &= 13q^2 + 13q + 13 \\ 3q^2 - 4q - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek gyökei $q_1 = 2$ és $q_2 = -\frac{2}{3}$. A nekik megfelelő a_1 értékek pedig 1, illetve 9.

Mind a két megoldás megfelel a feladat feltételeinek.

3. Egy sorozat első n tagjának összege $3n^2$ minden pozitív n egész számra. Igaz-e, hogy ez számtani sorozat? Határozzuk meg a sorozat n-edik tagját n függvényében!

Megoldás:

Az első n tag összege $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

Mivel az összeg minden pozitív egész n számra $S_n = 3n^2$, akkor ez igaz $n = 1,\ 2,\ 3$ esetén. Tehát $S_1 = a_1 = 3$, $S_2 = a_1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 = 13$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 27$, ebből $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 15$.

Ha van ilyen számtani sorozat, akkor az első három tagja: 3; 9; 15, ami azt jelenti, hogy a differencia 6 lehet, és – azt sejtjük, hogy – $a_n = 6n - 3$. Az ismert összegképletbe helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez igaz, és csak ez a sorozat jöhet szóba.

Másik meggondolás:

Számolhatunk mindjárt általánosan, az S_n jelentése alapján

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 6n - 3.$$

Ez valóban számtani sorozat.

4. Egy mértani sorozatban (amelyben nem szerepel a 0) az első hat tag összege (-7)-szerese az első három tag összegének. Mennyi lehet a mértani sorozat hányadosa (kvóciense)? Van-e ilyen sorozat?

Megoldás:

Az első három tag összege a szokásos jelöléseket alkalmazva

$$a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2),$$

ennek a (-7)-szerese az első hat tag összege:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 = a\left(1 + q + q^2 + q^3(1 + q + q^2)\right) = (1 + q^3)a(1 + q + q^2).$$

Eszerint $1 + q^3 = -7$, ebből $q = -2$.

Ellenőrzés: Az első hat tag összege: $a(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32) = -21a$, az első három tag összege, $a(1 - 2 + 4) = 3a$, valóban (-7)-szerese az előző összegnek.

Vegyük észre, hogy az a tetszőleges nem 0 valós szám lehet! Ilyen mértani sorozat valóban létezik, ha például – az egyszerűség kedvéért – az a-t 1-nek választjuk, akkor az 1; −2; 4; −8; 16; −32; … sorozat, általános alakban: $a_n = (-2)^n$.

5. Egy növekvő mértani sorozatnak elemei az a és a b pozitív valós számok, azaz $b > a > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{b^3}{a^2}$ szám is eleme a sorozatnak!

Megoldás:

Mivel a sorozatnak eleme a, létezik olyan k pozitív egész szám, amelyre $b = a \cdot q^k$. Ezzel kifejezve $\frac{b^3}{a^2}$-et: $\frac{a^3q^{3k}}{a^2} = aq^{3k}$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\frac{b^3}{a^2}$ a sorozatban az a-tól számítva a $3k$-adik elem.

Megjegyzés: Hasonlóan belátható, hogy minden $l \in \mathbf{N}$ esetén a sorozat eleme a $\frac{b^l}{a^{l-1}}$ is, nevezetesen az a-tól számított kl-edik elem.

6. Egy számtani sorozat első tagja 0, differenciája 6. Van-e olyan k egész szám, amelyre teljesül, hogy a sorozat második, negyedik és k-adik tagja egy mértani sorozat szomszédos elemei?

Megoldás:

A szokásos jelöléssel: $a_1 = 0$, $d = 6$, a sorozat első néhány eleme: 0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54.

$a_2 = 6$, $a_4 = 18$. A számtani sorozat k-adik eleme esetünkben:

$$a_k = a_1 + (k-1)d = 0 + (k-1) \cdot 6 = 6k - 6.$$

A mértani sorozat definíciója szerint a sorozatban a második tagtól kezdve bármelyik tagot az előzővel osztva a hányados állandó.

Jelen esetben a számtani sorozat második és negyedik tagja – a 6 és a 18 – a mértani sorozat szomszédos elemei, ezért a mértani sorozat hányadosa (kvóciense) $\frac{18}{6} = 3$. A mértani sorozat következő tagja csak $18 \cdot 3 = 54$ lehet, és ez valóban tagja a számtani sorozatnak is, nevezetesen a tizedik. A keresett k szám tehát a 10.

7. Melyek azok a háromszögek, amelyekben az oldalak mértani, a szögek számtani sorozat egymás után következő elemei?

Megoldás:

Ha a szögek számtani sorozatot alkotnak, akkor a középső szög – a számtani sorozat elemeire vonatkozó tulajdonságok alapján – $60°$-os.

Válasszuk a legrövidebb oldalt egységnyinek, a mértani sorozat hányadosát jelöljük q-val ($q \geq 1$). Így az oldalak nem csökkenő sorrendben: $1 \leq q \leq q^2$.

Három oldal és egy szög közötti összefüggést fejez ki a koszinusztétel, amelynek szokásos formája: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ennek az a lényege, hogy a c oldallal szemben van a γ szög.

Jelen esetben a q hosszúságú oldallal szemben van a $60°$-os szög. Tehát a koszinusztétel a keresett háromszögben: $q^2 = q^4 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot q^2 \cdot \cos 60°$. Tudjuk, hogy $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Az egyenlet rendezés után: $0 = q^4 - 2q^2 + 1 = (q^2 - 1)^2$. Ebből $q = 1$.

Mivel a mértani sorozat hányadosa 1, ezért az oldalak egyenlők, akkor a szögek is egyenlők. A háromszög szabályos.

Másik meggondolás: A szinusztétellel is megoldható a feladat. Az oldalak aránya megegyezik a szemközti szögek szinuszának arányával. Így ha a középső szöget β jelöli, a két másik szög ennél x-szel nagyobb, illetve kisebb, akkor nemcsak az oldalakra, hanem az oldalakkal arányos mennyiségekre is teljesül a mértani sorozat összefüggése: $\sin(\beta + x)\sin(\beta - x) = \sin^2\beta$. A kevésbé ismert

$$\sin(u + v) \cdot \sin(u - v) = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(2u) - \cos(2v)]$$

trigonometrikus összefüggést alkalmazva azt kapjuk, hogy $\frac{\cos 2x - \cos 2\beta}{2} = \sin^2\beta$. Rendezve és felhasználva a $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ összefüggést,

$$2\sin^2\beta + \cos^2\beta - \sin^2\beta = \cos 2x$$

adódik, amiből $1 = \cos 2x$. Ez csak $x = 0$ esetén lehetséges, mert x hegyesszög. Vagyis a három szög egyenlő, és így nyilván a három oldal is.

Megjegyzés. A felhasznált, kevésbé ismert összefüggés egyszerűen levezethető az összegképletekből.

8. Egy sorozatra teljesül, hogy minden pozitív n esetén $a_n = 5n - 4$.

a) Igazolja, hogy a sorozat számtani sorozat!

b) A sorozatnak van három olyan egymást követő tagja, amelyből az elsőt 1-gyel, a másodikat 14-gyel, a harmadikat 39-cel növelve az így kapott három tag mértani sorozat egymást követő három tagja lesz. Melyik ez a három tag, és mennyi a sorozat kvóciense (hányadosa)?

Megoldás:

A számtani sorozatban a második tagtól kezdve bármelyik tagból az előzőt kivonva a különbség (differencia, azaz d) állandó, az n-edik eleme pedig $a_n = a_1 + (n-1)d$.

A mértani sorozatban a második tagtól kezdve bármelyik tagot az előzővel osztva a hányados (kvóciens, azaz q) állandó, a sorozat n-edik eleme $a_n = a_1 q^{n-1}$.

a) Vizsgájuk meg, hogy két szomszédos elem különbsége (differenciája) (n-től függetlenül) állandó-e! $a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - 4 - (5n-4) = 5n + 5 - 4 - 5n + 4 = 5$ valóban állandó, ez tehát valóban számtani sorozat. Egyébként $a_1 = 1$.

b) Legyen a keresett három tag a_{k-1}, a_k, a_{k+1}. Fel fogjuk használni, hogy a számtani sorozat differenciája 5, így $a_{k-1} = a_k - 5$ és $a_{k+1} = a_k + 5$.

A mértani sorozat megfelelő elemei: $a_{k-1}+1$, a_k+14, $a_{k+1}+39$. Az előzőek alapján ezek $a_k - 5 + 1 = a_k - 4$, $a_k + 14$ és $a_k + 5 + 39 = a_k + 44$.

Ismeretes, hogy a mértani sorozat bármelyik tagja mértani közepe a szomszédos tagoknak. Ennek alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(a_k - 4)(a_k + 44) = (a_k + 14)^2$$

A zárójelek felbontása, összevonás és rendezés után azt kapjuk, hogy $a_k = 31$. Mivel $a_1 = 1$, ez a hetedik tagja a sorozatnak ($31 = 1 + 6 \cdot 5$).

A keresett három tag a 6-odik, 7-edik, nyolcadik: 26; 31 és 36, a mértani sorozat megfelelő tagjai: 27; 45; 75. A mértani sorozat kvóciense: $\dfrac{45}{27} = \dfrac{75}{45} = \dfrac{5}{3}$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív egészekből álló végtelen sok tagú számtani sorozat elemei közt van négyzetszám, akkor végtelen sok van.

Megoldás:

Jelöljük a sorozat differenciáját d-vel, a sorozatban előforduló négyzetszámot a^2-tel!

d nem lehet negatív, mert akkor a sorozatban egy idő után lennének negatív tagok is.

Ha viszont d nemnegatív, akkor a sorozat tetszőleges, az a^2-et követő tagja felírható $a^2 + kd$ alakban, ahol k tetszőleges pozitív egész szám. A feladatban bizonyítandó állítás azt jelenti, hogy van a k-nak olyan értéke – mégpedig végtelen sok –, amely mellett az $a^2 + kd$ négyzetszám.

Próbálkozzunk teljes négyzetté alakítással!

$a^2 + kd = (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + x(2a + x)$, ahol x is pozitív egész szám. Ha most úgy választjuk meg x-et, hogy az d-vel legyen egyenlő, akkor k-ra $2a + d$ (pozitív egész szám) adódik. Ezzel $a^2 + kd$ teljes négyzet, hiszen

$$a^2 + kd = a^2 + (2a + d)d = (a + d)^2.$$

Így kaptunk egy újabb négyzetszámot a sorozat elemei között. Ezt az eljárást az újabb négyzetszámon megismételve újabb négyzetszámot kapunk, és ezt akárhányszor megismételve végtelen sok négyzetszámot találhatunk a sorozatban.

Másik megoldás:

Gondolkodhatunk „fordítva” is. Ismét kegyen az a^2 egy négyzetszám eleme a sorozatnak, és legyen a differencia $d \in \mathbf{N}^+$.

Célhoz érhetünk, ha eszünkbe jut az $(a+d)^2$ számot vizsgálni.

$$(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + d(2a + d)$$

A $2a+d$ pozitív egész szám, tehát $(a+d)^2$ eleme a sorozatnak és az a^2-től különböző négyzetszám.

Így kaptunk egy újabb négyzetszámot a sorozat elemei között. Ezt az eljárást akárhányszor megismételve végtelen sok négyzetszámot találhatunk a sorozatban.

Megjegyzés: $(a+md)^2 = a^2 + 2amd + d^2 = a^2 + d(2am+d)$ minden $m \in \mathbf{N}$ esetén a sorozat egy a^2-től (és egymástól is) különböző négyzetszám eleme.

10. Hány oldalú az a sokszög, amelyben az egymás után következő belső szögek fokszámai olyan számtani sorozat tagjai, amelynek első tagja $120°$ és a különbsége $5°$?

Megoldás:

Egy n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.

A számtani sorozat n-edik eleme $a_n = a_1 + (n-1)d$, továbbá az első n elem összege: $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}n$.

Az adatok alapján felírható összefüggés: $(n-2)\cdot 180° = \dfrac{120° + 120° + (n-1)\cdot 5°}{2}n$.

Rendezés után n-re másodfokú egyenletet kapunk: $n^2 - 25n + 144 = 0$, ennek gyökei $n_1 = 16$ és $n_2 = 9$.

A 9 megoldása, a 16 nem megoldása a feladatnak; ha ugyanis a sorozatban az első szög $120°$ és a differencia $5°$, akkor a sorozat 12. tagja $180°$, ami nem lehet sokszög belső szöge.

11. *a)* Egy számtani sorozatban $a_5 = 17$ és $a_{17} = 5$. Határozza meg a sorozat differenciáját és a sorozat n-edik tagját, ha n tetszőleges pozitív egész szám!

b) Egy számtani sorozatban $a_k = l$ és $a_l = k$, ahol k és l adott pozitív egész számok. Határozza meg a sorozat differenciáját és a sorozat n-edik tagját, ha n tetszőleges pozitív egész szám.

Megoldás:

a) $a_{17} - a_5 = (17-5)d$, azaz $5 - 17 = (17-5)d$, tehát $d = -1$.

$a_n = a_5 + (n-5)d = 17 + (n-5)\cdot(-1) = 17 - n + 5$. Tehát $a_n = 22 - n$.

(Felírhattuk volna azt is, hogy $a_1 = 21$, ezzel $a_n = 21 + (n-1)\cdot(-1) = 22 - n$.)

b) $a_k - a_l = (k-l)\cdot d = l - k$, tehát $d = -1$. $a_n = a_k + (n-k)d = l - (n-k) = l + k - n$.

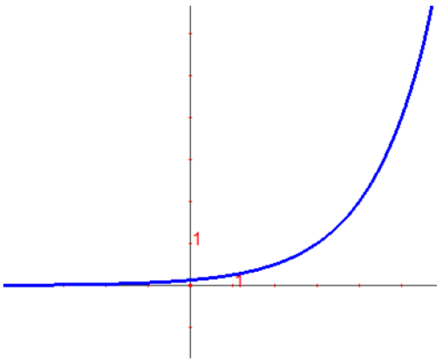
(Most is felírhatjuk, hogy: $a_1 = a_k - (k-1)\cdot d = l+k-1$, amiből $a_n = a_1 - (n-1) = l+k-1-n+1 = l+k-n$.)

2.5. Függvények, elemi függvények ábrázolása, elemi vizsgálata

Lineáris, másodfokú, egyszerű törtfüggvények. Abszolút érték függvény, $\operatorname{sgn} x$, egészrész, törtrész függvény. Törtkitevős hatványok, exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása. Függvénytranszformációk. Függvények elemzése – értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, zérushely, paritás, periodicitás, függvények összetétele.

Mintapéldák

1. Az alábbiak közül melyik függvény grafikonja látható az ábrán?

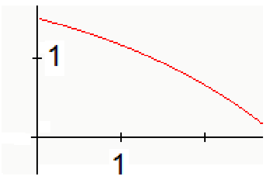


A) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ B) $x \to 2^{x-3}$ C) $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ D) $x \to 2^{3-x}$

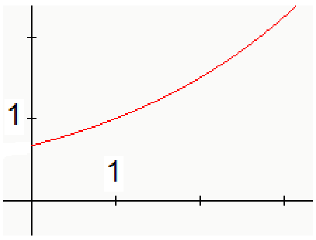
Megoldás: *B)*

2. Egy populációban az egyedek számának időbeli alakulását az $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-t}$ függvény írja le ($t \geq 1$), a k pozitív valós konstans. Az alábbiak közül melyik lehet a függvény grafikonja?

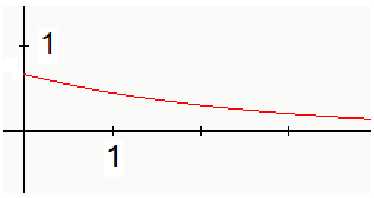
A)



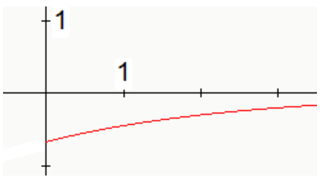
B)



C)



D)



Megoldás: *B)*

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis? Indokoljunk!

a) Van olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya végtelen, az értékkészlete véges halmaz.

b) Van olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya véges, az értékkészlete végtelen halmaz.

c) Van olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya korlátos, az értékkészlete végtelen halmaz.

d) Van olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya végtelen, az értékkészlete véges halmaz és kölcsönösen egyértelmű.

e) Van olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya is és az értékkészlete is a valós számok halmaza, mégsem kölcsönösen egyértelmű.

Megoldás:

a) Igaz, például a $\operatorname{sgn} x$ függvény, amely a negatív valós számokon (-1)-et a pozitív valós számokon $(+1)$-et vesz föl, és 0-ban az értéke 0. Tehát az értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $\{-1; 0; 1\}$ véges halmaz.

b) Hamis. Nem létezik olyan egyértelmű hozzárendelés, amely véges halmazhoz rendel végtelen halmazt. (Az értékkészletnek nem lehet „több” eleme, mint az értelmezési tartománynak.)

c) Igaz. Például az $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény értelmezési tartománya a $]-1; 1[$ intervallum, az értékkészlete az 1-nél nem kisebb valós számok halmaza.

d) Hamis. Végtelen és véges halmaz között nem létezik kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés. (Az értékkészletnek amúgy sem lehet „több” eleme, mint az értelmezési tartománynak.)

e) Igaz. Például az $x \mapsto (x-1)\,x\,(x+1)$ harmadfokú függvény. (A nullát például háromszor is felveszi.)

4. Állapítsuk meg az alábbi függvény értékkészletét a valós számok halmazán, jellemezzük paritás, periodicitás szempontjából, állapítsuk meg, hol metszi a tengelyeket, ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben.

$$x \mapsto \left|x^3 - 1\right|$$

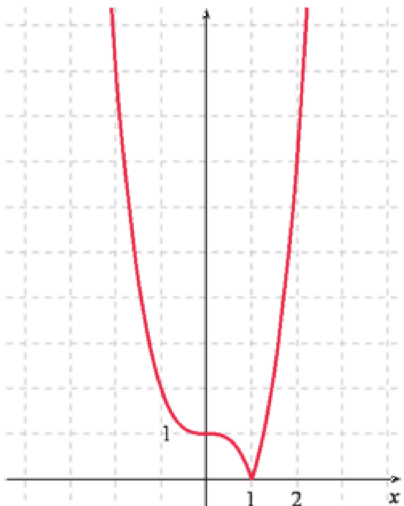
Megoldás:

Az abszolút érték definíciója alapján

$\left|x^3 - 1\right| = x^3 - 1$, ha $x \geq 1$, illetve

$\left|x^3 - 1\right| = -\left(x^3 - 1\right) = -x^3 + 1$, ha $x < 1$.

A függvényábrázolásban segíthet a függvénytranszfomáció, ha az x^3 függvényből indulunk ki. Ábrázoljuk az $\left|x^3 - 1\right|$ függvényt!



Az $\left|x^3 - 1\right|$ függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok.

Nem páros és nem páratlan, nem periodikus.

A metszéspontja az x tengelyen a függvény nullhelye, $x = 1$, az y tengelyt az $y = 1$-ben metszi, mert itt $x = 0$.

5. Egy másodfokú polinom gyökei $x_1 = -1$ és $x_2 = 5$. A függvény grafikonja a -3 ordinátájú pontban metszi az y tengelyt. Határozzuk meg a polinomfüggvény hozzárendelési utasítását és szélsőértékét a valós számok halmazán!

Megoldás:

Egy másodfokú polinom függvény általános alakja: $ax^2 + bx + c$, ahol a, b, c valós konstansok és $a \neq 0$.

Ha x helyére 0-t helyettesítünk, megkapjuk c értékét, itt $c = -3$.

Az együtthatók meghatározására alkalmazhatjuk a Viéte formulákat.

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

A feladat adatai alapján $a = \dfrac{3}{5}$, $b = -\dfrac{12}{5}$. Tehát a polinomfüggvény hozzárendelési utasítása $x \mapsto \dfrac{3}{5}x^2 - \dfrac{12}{5}x - 3$, $x \in \mathbf{R}$.

A szélsőértékét meghatározhatjuk teljes négyzetté alakítás segítségével.

$$\frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}x - 3 = \frac{3}{5}(x-2)^2 - 7$$

Ebből leolvashatjuk, hogy a függvény szélsőértékhelye $x = 2$, a szélsőértéke -7. Tudjuk azt is, hogy ez a szélsőérték minimum, hiszen a másodfokú tag együtthatója pozitív.

Második megoldás:

A kérdéses másodfokú polinom gyöktényezős alakja $a(x - x_1)(x - x_2)$. A feladat adatai alapján a gyöktényezős alak $a(x+1)(x-5)$. A másodfokú függvény képe olyan parabola, amelynek szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel, és a parabola tengelypontja a függvény szélsőérték pontja. A szimmetriatengely a nullhelyek felező merőlegese, ennek alapján a szélsőérték helye $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2$. A többi keresett adat a szorzatból behelyettesítéssel, illetve beszorzással meghatározható.

6. Állapítsuk meg az alábbi függvény értékkészletét a valós számok halmazán, jellemezzük paritás, periodicitás szempontjából, ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben.

$$x \mapsto \{\sin x\}$$

Megoldás:

Az $x \mapsto \{x\}$ törtrész függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete: $[0;1[$, és $\{x\} = x - [x] = x - n$, ha $n \leq x < n+1$, $[x]$ az x egészrésze, x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.

Mivel a szinuszfüggvény periodikus, a törtrésze is periodikus lesz, a periódus 2π. Eszerint a $[0;2\pi[$ intervallumban állapítjuk meg először a $\{\sin x\}$ értékeit.

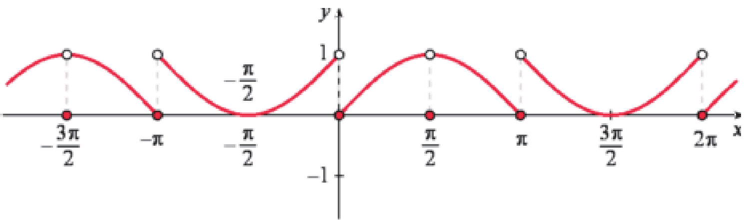
A törtrész függvény értelmezése alapján

– ha a szinuszfüggvény értéke a $[0;1[$ intervallumba esik, vagyis ha $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ és $\dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi$, akkor $\{\sin x\} = \sin x$;

– ha a függvényérték negatív, akkor $-1 \leq \sin x < 0$, ezek a törtrésze 1-gyel nagyobb szám, vagyis $\{\sin x\} = \sin x + 1$;

– ha a függvényérték 1, akkor a törtrész 0, vagyis $\left\{\sin\dfrac{\pi}{2}\right\} = 0$.

Ábrázoljuk a $\{\sin x\}$ függvényt.



A függvény értékkészlete: $0 \leq \sin x < 1$, a függvény periodikus 2π szerint; nem páros és nem páratlan.

7. Az alábbiakban megadott két, illetve három függvényből képezzük az összes lehetséges függvényösszetételt. Vizsgáljuk az így kapott függvények tulajdonságait.

a) $f(x) = 2x + 1$ és $g(x) = x^2$ *b)* $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
c) $f(x) = |x|$ és $g(x) = \lg x$ *d)* $f(x) = |x|$ és $g(x) = \sin x$
e) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Megoldás:

a) Kétféle összetételt képezhetünk: $f\left(g(x)\right) = 2x^2 + 1$ és $g\left(f(x)\right) = (2x+1)^2$

b) Kétféle összetételt képezhetünk: $f\left(g(x)\right) = 2\sqrt{x} + 1$ és $g\left(f(x)\right) = \sqrt{2x+1}$

c) Kétféle összetételt képezhetünk: $f\left(g(x)\right) = |\lg x|$ és $g\left(f(x)\right) = \lg|x|$

d) Kétféle összetételt képezhetünk: $f\left(g(x)\right) = |\sin x|$ és $g\left(f(x)\right) = \sin|x|$

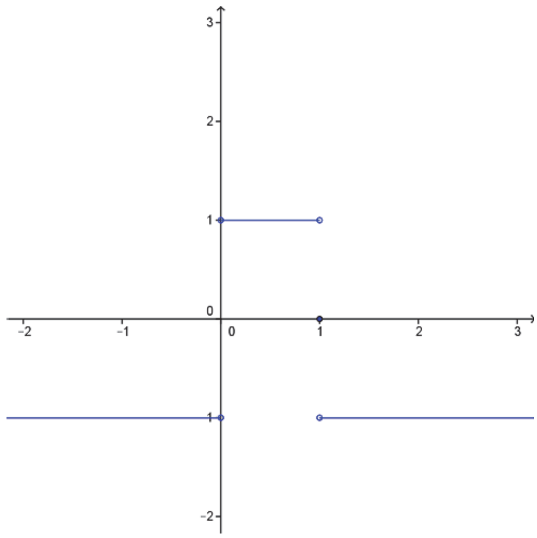
e) A szignum függvény (előjel függvény) értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a $\{-1; 0; 1\}$ halmaz.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

A három függvénnyel 6 féle összetételt képezhetünk.

$$f\left(g\left(h(x)\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x > 1 \text{ vagy } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \\ 1, & \text{ha } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Ennek a függvénynek a grafikonja:



$$f\left(h\left(g(x)\right)\right) = \operatorname{sgn}\frac{1}{x-1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 1 \\ -1, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

$$g\left(h\left(f(x)\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} - 1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } x > 0 \\ -2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$g\left(f\left(h(x)\right)\right) = \operatorname{sgn}\frac{1}{x} - 1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } x > 0 \\ -2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$h\left(g\left(f(x)\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{sgn} x - 1} = \begin{cases} -1, & \text{ha } x = 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$h\left(f\left(g(x)\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{sgn}(x-1)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 1 \\ -1, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

Észrevehetjük, hogy van két-két egyenlő köztük Ez abból következik, hogy az $\frac{1}{x}$ és a $\operatorname{sgn} x$ függvényekből képzett összetételekben a sorrend felcserélhető, azaz $\operatorname{sgn}\frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{sgn} x}$. A többinél a sorrend nem cserélhető fel.

Feladatok

1. A következő függvények közül ábrázolás nélkül válogassuk ki azokat, amelyeknek egyenes a grafikonja! A választást indokoljuk!

$f\colon x \mapsto -5x+2$ $\qquad k\colon x \mapsto -x$

$g\colon x \mapsto -4(x+2)+5(x-1)-6(x-2)$ $\qquad l\colon x \mapsto 2x^2-4x-2(x-1)^2+5(x-1)$

$h\colon x \mapsto 3x-4$ $\qquad m\colon x \mapsto \dfrac{x-1}{4}$

$n\colon x \mapsto -2x+1,\ x \in \mathbf{N}^+$ $\qquad r\colon x \mapsto \dfrac{2-x}{|2-x|}$

$q\colon x \mapsto 2x^2+1$ $\qquad s\colon x \mapsto \dfrac{1}{5}x-4$

2. Válogassa ki a következő függvények közül azokat, amelyek grafikonjai

i) párhuzamosak egymással! *ii)* merőlegesek egymásra!

$a\colon x \mapsto -3x+5$ $\quad b\colon x \mapsto 2x+1$ $\quad c\colon x \mapsto -3x+2$

$d\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2}x+3$ $\quad e\colon x \mapsto 3x+2$ $\quad f\colon x \mapsto -2x+3$

$g\colon x \mapsto \dfrac{1}{2}x+2$ $\quad h\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2}x-5$ $\quad i\colon x \mapsto 2x-1$

3. Függvénytranszformációk alkalmazásával ábrázolja a következő függvényeket az $|x|$, x^2, $\dfrac{1}{x}$ alapfüggvények ismeretében.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x}+1$ $\quad$ 2. $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ $\quad$ 3. $x \mapsto (x-1)^2-2$

4. $x \mapsto |x+3|-4$ $\quad$ 5. $x \mapsto -(x+2)^2+3$ $\quad$ 6. $x \mapsto -|x+3|-4$

4. Függvénytranszformációk alkalmazásával ábrázolja a következő függvényeket a $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ alapfüggvények ismeretében, és állapítsa meg elemi tulajdonságaikat!

a) $3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ $\quad$ *b)* $\sin 2x$ $\quad$ *c)* $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x$

d) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-3$ $\quad$ *e)* $-2\sin \pi x$

5. Adja meg annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési utasítását,

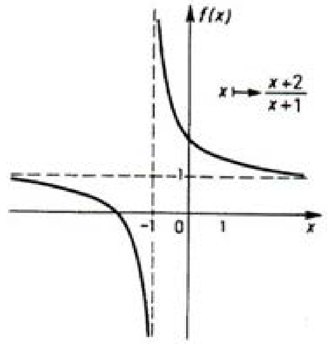
a) amelynek grafikonja 2 meredekségű, és átmegy a $(-2;3)$ ponton!

b) amelynek grafikonja átmegy a $(3;2)$ és az $(1;1)$ ponton!

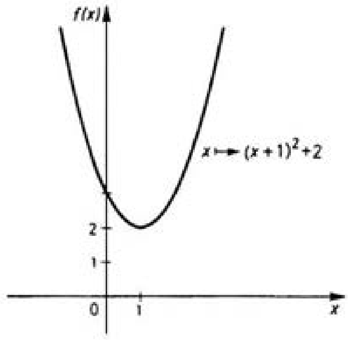
c) amelynek grafikonja -4 meredekségű, és átmegy az $(5;4)$ ponton!

6. Az alábbi függvények grafikonjai mellett ott voltak a megfelelő hozzárendelési utasítások. Ezek között van hibás. Javítsa ki!

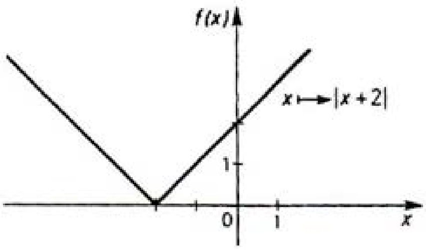
a)



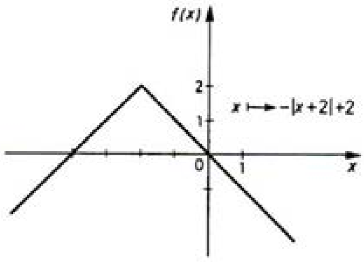
b)



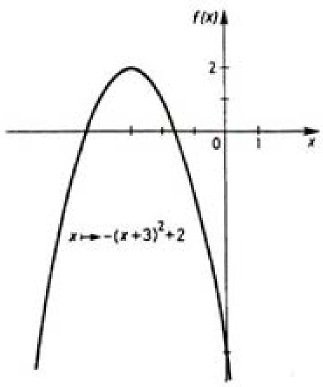
c)



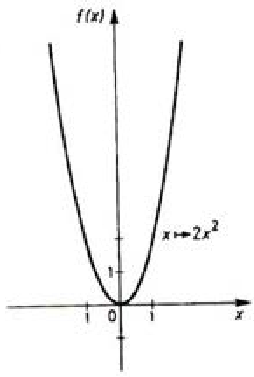
d)



e)



f)



Megoldás. *b)* helyesen $(x-1)^2+2$.

7. *a)* Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 14 hosszúságegység. Egyik oldalát változtatva hogyan változik a másik oldal, ha a kerület állandó? Ábrázoljuk az így megadott függvényt!

b) Egy egyenlő szárú háromszög területe 14 területegység. Az alaphoz tartozó magasságát változtatva hogyan változik az alap, ha közben a terület állandó? Ábrázoljuk az így megadott függvényt!

8. Határozza meg a következő függvények inverz függvényeit, ábrázolja az inverz függyvénypárokat!

$$2x-3, \quad |x-3|, \quad \sqrt{2x-3}, \quad \frac{x+3}{x-1}, \quad \log_2(x-2)$$

9. Igaz vagy hamis?

A) Ha egy függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor van inverze.

B) Ha egy függvény monoton, akkor van inverze.

C) Ha egy függvény invertálható, akkor szigorúan monoton növekvő.

D) Ha egy függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor invertálható.

10. Igaz vagy hamis?

A) Minden függvény páros vagy páratlan.

B) Ha egy függvény görbéje szimmetrikus az y tengelyre, akkor a függvény páratlan.

C) Ha egy függvény páros, akkor középpontosan szimmetrikus az origóra.

D) Van olyan függvény, amelyik páros is és páratlan is.

11. Melyek periodikusak az alábbi függvények közül?

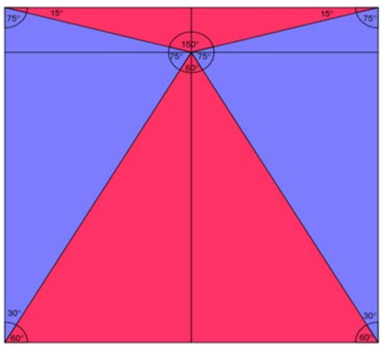
$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad \{x-2\}$ $\quad \cos^2 x$ $\quad \sin x \cos x$ $\quad \sin(x-1)$ $\quad 2\sin x - 1$

2.6. Elemi geometriai bizonyítások, számítások

Kerület, terület, felszín és térfogat számítások, átdarabolások. A Pitagorasz tétel és alkalmazásai. Arányossági tételek alkalmazásai, egyszerű szerkesztések és bizonyítások.

Mintapéldák

1. Egy négyzet belsejében a négyzet egyik oldalára szabályos háromszöget szerkesztettünk. Az ábrán látható módon kétféle színnel színeztük ki a kapott ábrát.



a) Bizonyítsuk be, hogy a két különbözően színezett alakzat területe megegyezik.

b) Határozzuk meg a részháromszögek belső szögeit

Megoldás:

a) A bizonyítás a négyzet és a szabályos háromszög tengelyes szimmetriája alapján az ábráról leolvasható. (A négyzetet két, az oldalaival párhuzamos szakasszal négy téglalapra bontottuk, amelyek színezése fele-fele részben kék, illetve piros.)

b) A konstrukcióból következik, hogy a kék háromszög egyenlő szárú, az alapon fekvő szögei 75°-osak, a kis piros derékszögű háromszög hegyesszögei 15° és 75°-osak.

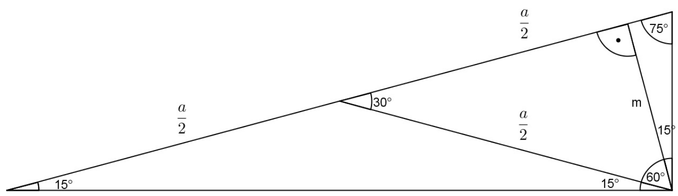
2. Egy négyzet belsejében a négyzet egyik oldalára mint átfogóra szerkesztünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek az egyik hegyesszöge 15°. Hányszorosa a négyzet területe a háromszög területének?

Megoldás:

Segíthet az előző feladat ábrája. A kék egyenlő szárú háromszöget a szimmetria tengelye két olyan háromszögre osztja, amelyek hegyesszögei 15° és 75°-osak, és az átfogója (az egyenlő szárú háromszög szára) hossza egyenlő a négyzet oldalának hosszával. Beláttuk, hogy a két kék háromszög területe fele a négyzet területének, tehát a négyzet területe nyolc ilyen háromszög területével egyenlő.

3. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 15°. Mekkora a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága, ha az átfogó hosszúság mértékszáma a pozitív valós szám?

Megoldás:



Ha az átfogó hossza a, akkor a felezőpontja mindegyik csúcstól $\frac{a}{2}$ távolságra van. A 15°–15°-os egyenlő szárú háromszög szárszögéhez tartozó külső szöge 30°. Így keletkezett egy 30°–60°-os derékszögű háromszög, amelyben a keresett magasság m, a rövidebb befogó és az $\frac{a}{2}$ az átfogó. Ismeretes, hogy a 30°–60°-os derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele, tehát a rövidebb befogója fele akkora, mint az átfogója. Eszerint $m = \frac{a}{4}$.

A feladatot megoldhatjuk az előző két feladat alapján is. Bebizonyítottuk, hogy egy 15°–75°-os derékszögű háromszög területe nyolcada az átfogójára emelt négyzet területének. Azaz $\frac{a \cdot m}{2} = \frac{a^2}{8}$. Ebből $m = \frac{a}{4}$.

4. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen a K pont. Húzzunk a K ponton keresztül párhuzamost az egyik oldallal.

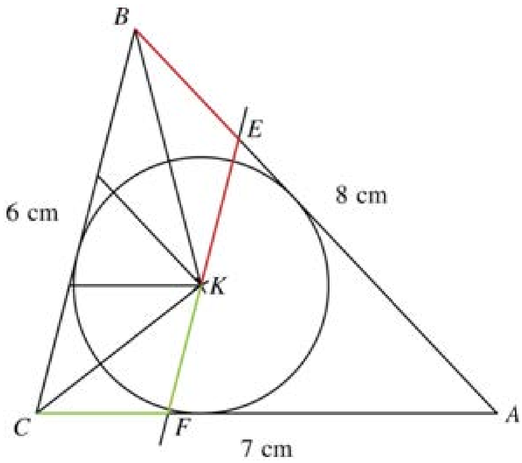
a) Mekkora az így „levágott” kisebb háromszög kerülete, ha háromszög oldalai $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 7$ cm?

b) Oldja meg a feladatot általánosan!

Megoldás:

Az ABC háromszög beírt körének középpontja, a K pont, a szögfelezők metszéspontja. Ezért a B csúcsnál keletkezett két egyenlő szög egyenlő a BKE szöggel is, hiszen EK párhuzamos a BC oldallal. Tehát az EBK háromszög egyenlő szárú, hasonlóképpen egyenlő szárú az FCK háromszög is. Ezzel egyszersmind azt is beláttuk, hogy $EK = EB$ és $KF = FC$, tehát az EK az E körül „ráfordítható” EB-re, KF pedig

F körül FC-re (az ábrán egyforma színes szakaszok), vagyis az AEF háromszög kerülete egyenlő az ABC háromszögben az AB és az AC oldalak összegével. *a)* 15 cm; *b)* $AB + AC$



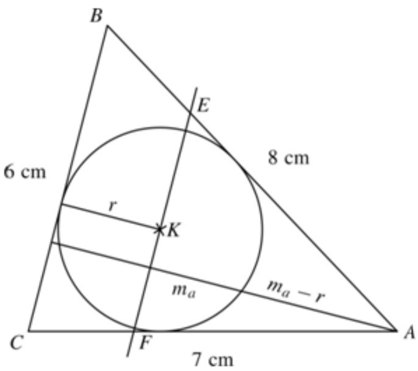
Másik megoldás:

Megoldhatjuk a feladatot hasonlóságon alapuló számolással is. Ismeretes, hogy háromszög beírt körének sugara $r = \dfrac{T}{s}$, ahol T a háromszög területe és s félkerület. Az a oldaloz tartozó magasság m_a, akkor $T = \dfrac{am_a}{2}$. A levágott háromszög és az eredeti háromszög hasonlóak. A beírt kör a-ra merőleges sugara és az m_a párhuzamosak, ezek alapján a hasonlóság aránya:

$$\frac{m_a - r}{m_a} = \frac{2\frac{T}{a} - \frac{T}{s}}{2\frac{T}{a}} = \frac{2s - a}{2s}$$

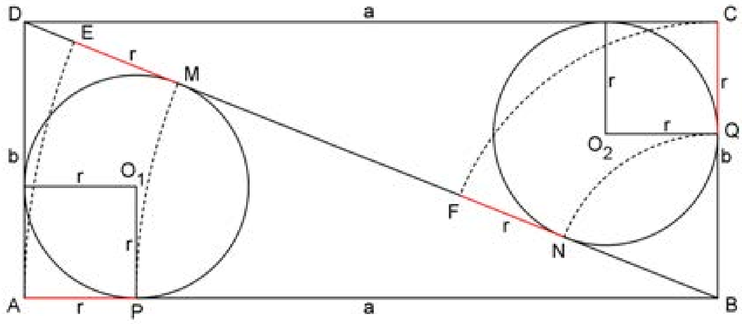
Ez egyben a kerületek aránya is: $\dfrac{k}{K} = \dfrac{2s-a}{2s} = \dfrac{b+c}{a+b+c}$, ahol a k a levágott háromszög kerülete, a K az eredeti háromszög kerülete, a szokásos betűzéssel.

Tehát a feladat kérdéseire a válasz: *a)* 15 cm, *b)* $AC + AB = b + c$.



5. Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 40$ cm és $AD = 16$ cm. Megrajzoljuk az ABD és a BCD háromszögek beírható köreit. Jelöljük M-mel, illetve N-nel e körök és a BD átló érintési pontjait! Számítsuk ki az MN szakasz hosszát!

Megoldás:



Felhasználjuk a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét. Ebből következik, hogy $AP = r$-rel, a beírt körök sugarával. Forgassuk az AB befogót B körül az átlóra, az A elforgatottját jelöljük E-vel. Ekkor az $EM = AP = r$. A BC oldalon az érintési pont legyen Q. Ekkor a szimmetria miatt $CQ = r$.

Forgassuk rá az átlóra B körül a BC-t. C elforgatottja legyen F, így $CB = FB$ és $FN = r$.

Ebből $MN = BM - BN = BM + r - (BN + r) = BE - BF = AB - BC = a - b$

Az elforgatással tulajdonképpen az MN szakasz mindkét végpontját eltoltuk r-rel, de így a keresett különbség nem változott.

A feladat adataival $MN = 40 - 16$ cm. Mivel itt nem használtuk a levezetésben az adatokat, általánosíthatunk: a keresett távolságot megadja a téglalap két különböző oldala hosszának a különbsége.

Megoldás számításokkal

Számításokat végzünk az adatok alapján.

Legyen $AB = CD = a = 40$ cm és $AD = BC = b = 16$ cm.

P és Q érintési pontok, O_1 az ABC és O_2 a BCD háromszög beírt körének középpontja, a kör sugara r.

Az ABD háromszögre felírjuk Pitagorasz tételét: $BD^2 = c^2 = a^2 + b^2$, azaz $c^2 = 40^2 + 16^2$, tehát $c = \sqrt{1856}$ cm.

Használjuk fel, hogy egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.

Ezért

$$\begin{aligned} a &= r + PB = r + BM = 40 \\ b &= r + BQ = r + BN = 16 \\ c &= BN + DN = BN + BM = \sqrt{1856}, \end{aligned}$$

mert a szimmetria miatt $DN = BM$.

Ebből $a + b + c = 2r + 2BN + 2BM = 40 + 16 + \sqrt{1856}$,

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2} &= r + BM + BN = \frac{1}{2}\sqrt{1856} + \frac{40}{2} + \frac{16}{2} \\ BN &= \frac{1}{2}\sqrt{1856} + \frac{40}{2} + \frac{16}{2} - (r + BM) = \frac{1}{2}\sqrt{1856} - \frac{40}{2} + \frac{16}{2} \\ BM &= \frac{1}{2}\sqrt{1856} + \frac{40}{2} + \frac{16}{2} - (r + BN) = \frac{1}{2}\sqrt{1856} - \frac{16}{2} + \frac{40}{2}. \end{aligned}$$

Mindebből a keresett távolság

$$MN = BM - BN = \frac{1}{2}\sqrt{1856} + \frac{40}{2} - \frac{16}{2} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{1856} + \frac{16}{2} - \frac{40}{2}\right) = 40 - 16 = 24 \text{ cm}.$$

Jó volt „ügyesen" számolni, úgy, hogy meghagytuk a gyökös alakot, hiszen így a végén kiesett, és pontos eredményt kaptunk. Az eredmény láttán azonban érdemes elgondolkodni. A számszerinti eredmény megegyezik a két különböző oldal különbségével. Véletlen ez vagy törvényszerű? Az előző megoldásban a geometriai meggondolás választ adott erre a kérdésre, egyben egy rövidebb megoldást mutatott.

6. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a C csúcsnál van a derékszög. Mérjünk fel a C-ből a befogókat tartalmazó félegyenesekre az átfogót (AB).

a) Mekkora az így kapott két új pont és az A és a B csúcsok által meghatározott négyszög területe, ha azABC háromszög területe egységnyi?

b) Folytassa az eljárást tovább a kapott új háromszöggel is és így tovább! Mekkora területű négyszögek keletkeznek?

Megoldás:

a) Felesleges számolni, egy jó ábra és jó ötlet alapján szinte azonnal megkapjuk a választ. A kapott nagyobb háromszög a szimmetriatengelye mentén szétvágható két olyan egyenlő szárú háromszögre, amelyek az eredeti háromszöggel egybevágóak. Tehát a feladatban leírt konstrukció megkétszerezte az eredeti háromszög területét.

Ezért a kérdéses négyszög területe megegyezik az eredeti háromszög területével.

b) Az *a)* kérdésre adott válasz alapján a keresett területek mindig kétszereződnek, tehát 1; 2; 4 és így tovább.

7. Egy derékszögű háromszög átfogója 8 cm, a területe 20 cm^2. Határozzuk meg a hiányzó oldalak hosszát!

Megoldás:

A területet felírhatjuk a befogók szorzatából $20 = \frac{ab}{2}$. A Pitagorasztétel alapján $a^2 + b^2 = 64$. Ha az első egyenletből kifejezzük például b-t, és behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor rendezés után másodfokú egyenletet kapunk a^2-re:

$$a^4 - 64a^2 + 1600 = 0$$

Ennek az a^2-ben másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa negatív, tehát nincs megoldása a valós számok halmazán.

Ez azonban nem véletlen!

Számítsuk ki a területből az átfogóhoz tartozó magasságot: $t = \frac{c \cdot m}{2}$, ebből $m = \frac{2t}{c}$. Itt $m = \frac{40}{8} = 5$ cm. A Thalesz-tételből tudjuk, hogy a derékszögű háromszög köré írt körben az átfogó a kör átmérője, az átfogóhoz tartozó magasság nem lehet nagyobb, mint a kör sugara, ami itt 4 cm. A terület még ebben az esetben is csak $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ lehet. Tehát a feladatban adott adatokkal nem létezik derékszögű háromszög

8. Az ABC háromszögben $AB = 6$, $BC = 8$, $CA = 10$.

A háromszöglap mindazon P pontjait pirosra festjük, amelyekre $PA \leq PC$ és $PA \leq PB$.

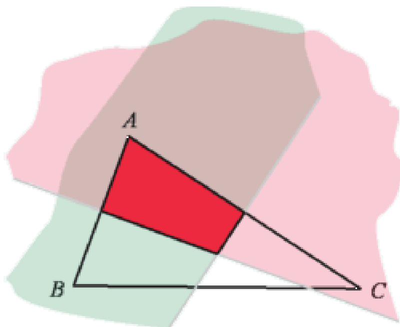
a) Milyen alakzatot alkotnak a pirosra festett pontok?

b) Az ABC háromszög területének hány százaléka lett piros?

Megoldás:

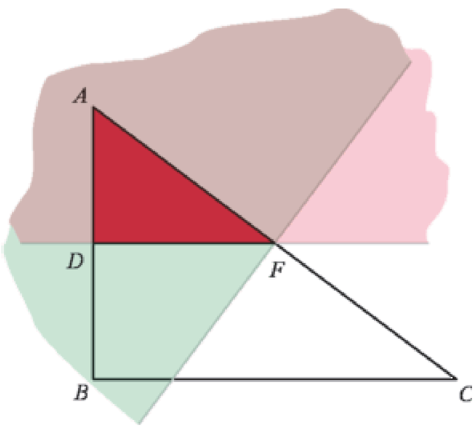
a) Ismeretes, hogy a szakaszfelező merőleges a sík azon pontjainak halmaza, amelyek egyenlő távol vannak a szakasz két végpontjától. A szakaszfelező merőleges által meghatározott két félsík pontjai közül a végpontot tartalmazó félsík pontjai vannak közelebb a kérdéses végponthoz.

A pirosra festett pontok az AC felező merőlegese és az AB felező merőlegese által meghatározott félsíkok közül az A csúcsot tartalmazó félsíkok közös részének a háromszögbe eső része.



Vegyük észre, hogy az adatokat felhasználva a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján megállapíthatjuk, hogy a háromszög derékszögű, az átfogója az $AC = 10$.

Ezért a két felező merőleges metszéspontja éppen az átfogó felezőpontja, jelöljük F-fel. Az AB szakasz felezőpontja legyen D, így a pirosra festett rész az AFD háromszög.

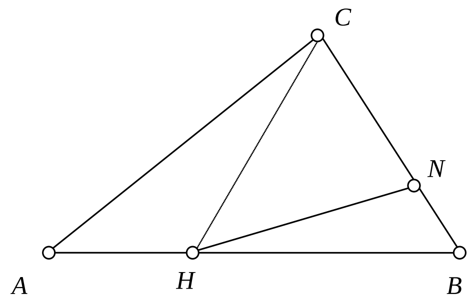


b) Az AFD háromszög oldalai az eredeti háromszög megfelelő oldalainak felével egyenlők, tehát a területének negyedrésze, azaz 25%-a.

9. Az ABC háromszög területe 60 cm^2. Az AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja H, a BC oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja N. Mekkora az $AHNC$ négyszög területe?

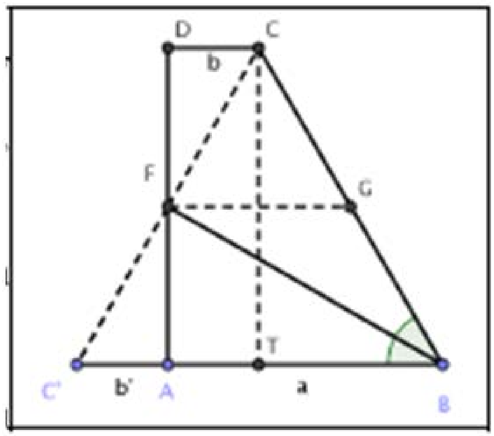
Megoldás:

Az azonos magasságú háromszögek területe arányos a magasságokhoz tartozó oldak hosszával. Ezért $\dfrac{T_{HBC}}{T_{ABC}} = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{2}{3}$ és $\dfrac{T_{BNH}}{T_{BCH}} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{4}$, innen $T_{BNH} = \dfrac{2}{3} \cdot T_{ABC} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6} \cdot T_{ABC} = 10\ (\text{cm}^2)$.



10. Az $ABCD$ trapéz A és D csúcsánál lévő szögek derékszögek; a trapéz párhuzamos oldalai $AB = a$, $CD = b$ $(a > b)$. A B csúcsnál levő szög szögfelezője az AD szárat felezi. Bizonyítsa be, hogy a trapéz magassága $2\sqrt{ab}$.

Megoldás:



1. megoldás:

F az AD szakasz felezőpontja. Tükrözzük C-t F-re, ezzel kapjuk a C' pontot. A középpontos tükrözés miatt $AC' = b$, és természetesen $CF = C'F$. Így a BF szögfelező a BCC' háromszög szimmetriatengelye, tehát a BFC' háromszög derékszögű, az AF az átfogóhoz tartozó magassága. Ekkor a magasságtétel miatt AF hossza $\sqrt{ab}$.

2. megoldás:

Húzzuk meg az FG középvonalat. Ennek hossza $\dfrac{a+b}{2}$. A középvonal oldallal való párhuzamossága miatt $BFG = FBA = FBG$, tehát a BGF háromszög egyenlő szárú. Ezért a BC szakasz hossza $a + b$. A C-ből merőlegest bocsájtva AB-re, kapjuk a T talppontot. $TC = m$, $BT = a - b$.

A CTB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétellel kiszámítható m:

$$m^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 2 \cdot 2\, ab$$
$$m = 2\sqrt{ab}$$

3. megoldás:

Sok egyéb úton is elindulhattunk volna. Kihasználva például, hogy BF szögfelező; erre tükrözve az AFB háromszöget, az A pont A' tükörképe a BC oldalra esik. Könnyen belátható, hogy az AF a CFB derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága, és innen újra a mértani középpel dolgozhatunk.

4. megoldás:

Számítással is bizonyíthatunk. Tudjuk, hogy a kétszeres szög tangense $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Legyen $x = CT = 2FA$! A $CBT\sphericalangle$ tangense $\dfrac{x}{a-b}$. Ezt a szöget felezi a BF szögfelező, a félszög tangense az FAB háromszögben $\dfrac{FA}{AB}$.

Mivel $CBA\sphericalangle = 2FAB\sphericalangle$, alkalmazhatjuk a a kétszeres szög tangensére vonatkozó képletet.

$$\frac{x}{a-b} = \frac{2\frac{x}{2a}}{1 - \frac{x^2}{4a^2}}$$

(Itt $\dfrac{x^2}{4a^2}$ nem lehet egyenlő 1-gyel.) Az egyenlőség mindkét oldalát oszthatjuk (a pozitív) x-szel.

$$\frac{1}{a-b} = \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{x^2}{4a^2}}$$

A jobb oldalon szorozzuk a számlálót és a nevezőt is $4a^2$-tel ($a \neq 0$):

$$\frac{1}{a-b} = \frac{4a}{4a^2 - x^2}.$$

Mindkét oldalt megszorozzuk a nevezőkkel: $4a^2 - x^2 = 4a(a-b)$. Ebből $x^2 = 4ab$.

Tehát a magasság valóban: $x = 2\sqrt{ab}$.

Megjegyzés. A megoldás során felhasználtuk, hogy $\dfrac{x^2}{4a^2} \neq 1$, vagyis – a kapott $x = 2\sqrt{ab}$ érték mellett – $a \neq b$. Ez a feladatban feltételként szerepelt. Ekkor egyébként a B csúcsnál lévő szög derékszög, amelyre valóban nem alkalmazható a kétszeres szög tangensére vonatkozó összefüggés.

11. Milyen távol vannak az egységnyi élű kocka valamelyik testátlójától a kocka csúcsai?

Megoldás:

A testátló végpontjai 0 távolságra vannak a testátlótól. Vegyük észre, hogy a többi csúcsnak az átlótól mért távolsága egyenlő. Megállapíthatjuk, hogy a testátló egy olyan derékszögű háromszög átfogója a kockában, amelynek az egyik befogója egy él, a másik egy lapátló. A keresett távolság ebben a háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság. Mivel az egységnyi élű kocka lapátlóinak hossza $\sqrt{2}$, a testátlója $\sqrt{3}$.

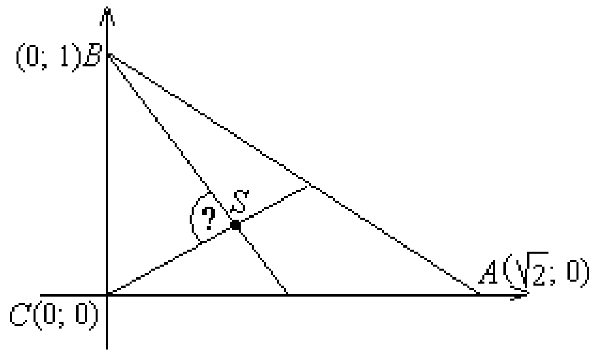
A háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva $m \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{2}$, tehát $m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

12. Igazoljuk, hogy a kocka egy éle, egy lapátlója és a testátlója olyan háromszöget határoznak meg, amelynek van két egymásra merőleges súlyvonala!

Első megoldás:

A kocka egy éle, lapátlója és testátlója olyan derékszögű háromszöget határoz meg, amelyek oldalainak aránya $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Azt kell megmutatni, hogy az ilyen háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala.

Helyezzük el úgy ezt a háromszöget a koordináta-rendszerben, hogy befogói a tengelyekre illeszkedjenek. A két befogóhoz tartozó súlyvonalak nem lehetnek merőlegesek egymásra. Ha méretarányos ábrát készítünk, akkor észrevehetjük, hogy – valószínűleg – az átfogóhoz és a $\sqrt{2}$ oldalhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra.



A háromszög S súlypontjának a koordinátái: $S\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Írjuk fel az $\overrightarrow{SB}$ és $\overrightarrow{SC}$ vektorokat, és számítsuk ki ezek skaláris szorzatát. $\overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3}\right)$, illetve $\overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, így

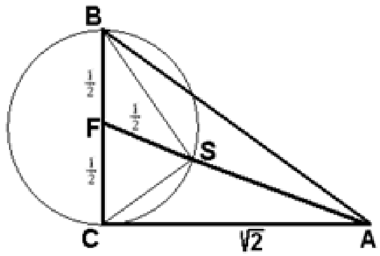
$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0.$$

Tehát a két súlyvonal valóban merőleges egymásra.

Megjegyzés. Más meggondolások alapján kiszámítható a három súlyvonal meredeksége. Ha az $P(x; y)$ pontból a súlypontba húzott szakasz meredekségét akarjuk kifejezni, az $\frac{\frac{1}{3} - y}{\frac{\sqrt{2}}{3} - x} = \frac{1 - 3y}{\sqrt{2} - 3x}$. Így az egyes csúcsokhoz tartozó összekötő szakaszok meredeksége: $\frac{1}{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}$; $\frac{1-3}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ha két szakasz egymásra merőleges, akkor a meredekségük szorzata -1. Ez a BS és CS szakaszok meredekségekre teljesül: $\frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$.

Második megoldás:

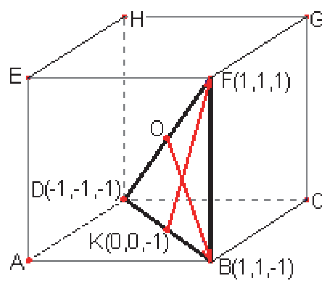
A feladat megoldható koordinátageometriai módszerek nélkül is. Húzzuk meg a harmadik súlyvonalat is, amely BC-t az F felezőpontjában metszi. Ezt a súlyvonalat is harmadolja az S pont. Az FCA derékszögű háromszögben Pitagorasz tételből az $AF = \frac{3}{2}$, így $FS = \frac{1}{2} = BF = CF$. Ebből az következik, hogy az S pont rajta van az SBC háromszög Thálesz körén, tehát S-nél derékszög van. Ez volt a bizonyítandó állítás.



Harmadik megoldás:

Helyezzük a kockát térbeli koordináta-rendszerbe az ábra szerint.

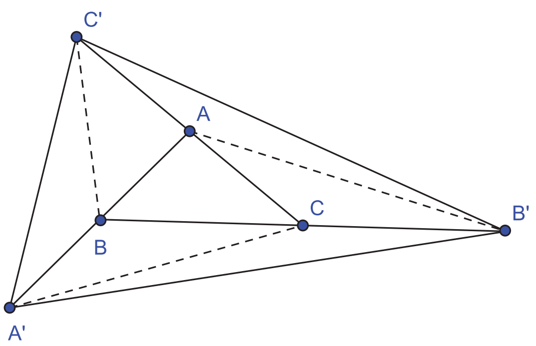
Egy 2 élhosszúságú $ABCDEFGH$ kocka középpontja legyen az origó, élei legyenek párhuzamosak a tengelyekkel. Ebben a kockában például az $F(1;1;1)$, $B(1;1;-1)$ és $D(-1;-1;-1)$ csúcsok egy él–lapátló–testátló háromszöget határoznak meg. A DF testátló felezőpontja az origó. Így az egyik súlyvonal az origóból a B csúcsba mutató $(1;1;-1)$ vektor, a másik a DB lapátló K felezőpontjából az F csúcsba mutató $(1;1;2)$ vektor. Az $(1;1;-1)$ és $(1;1;2)$ vektorok skaláris szorzata $1\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 2=0$, tehát merőlegesek egymásra.



Feladatok

1. Egy háromszög mindegyik oldalát ugyanabban a körüljárási irányban hosszabbítsuk meg saját hosszával! A végpontok összekötésével kapott háromszög területe hányszorosa az eredetinek?

Megoldás:



Az AB oldalt meghosszabbítottuk B-n túl AB-vel, így kaptuk az A' pontot; a BC oldalt meghosszabbítva C-n túl BC-vel, kaptuk a B' pontot, a CA oldalt meghosszabbítva A-n túl CA-val, kaptuk az C' pontot. Húzzuk be a $C'B$, $A'C$, $B'A$ szakaszokat!

Vegyük észre, hogy az így behúzott szakaszok súlyvonalak egy-egy „külső" háromszögben, hiszen a konstrukció miatt egy-egy csúcsot kötöttünk össze a szemközti oldal felezőpontjával. Ismeretes, hogy a súlyvonal felezi a háromszög területét, ezért az így kapott hat „félháromszög" területe páronként egyenlő. Válasszuk ki ezek közül például az ABC' háromszöget. Ennek a területe megegyezik az eredeti ABC háromszög területével, hiszen az AB szakasz a $CC'B$ háromszög súlyvonala. Hasonlóképpen megmutathatjuk, hogy az eredeti háromszög területével egyenlő a többi külső „félháromszög" területe. Tehát az $A'B'C'$ háromszög területe az eredeti ABC háromszög területének 7-szerese.

Megjegyzés. A súlyvonal azért felezi a háromszög területét, mert két olyan háromszögre vágja azt, amelyek egyik oldala ugyanolyan hosszú, a hozzá tartozó magasság pedig ugyanaz.

2. Egy szabályos háromszög területének mérőszáma megegyezik a beírt kör sugara háromszorosának mérőszámával. Ekkor a háromszög oldalának mérőszáma:

A) $\sqrt{2}$ *B)* 2 *C)* 1 *D)* nem meghatározható

Megoldás: *B)*

3. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Ha egy négyszögben két-két szög egyenlő, akkor az paralelogramma.

b) Van olyan paralelogramma, amelynek négy szimmetriatengelye van.

c) Ha egy paralelogramma oldalai egyenlő hosszúak, akkor átlói merőlegesek.

d) Ha egy paralelogramma átlói egyenlő hosszúak, akkor szomszédos oldalai merőlegesek.

A válaszokat indokoljuk!

Megoldás:

a) Hamis. Indoklás: amennyiben az egyenlő szögek nem szemközt helyezkednek el, akkor lehet nem paralelogramma a négyszög. Lehet például nem paralelogramma húrtrapéz. (Egyébként a paralelogramma húrtrapéz téglalap, tehát mondhatjuk, hogy nem téglalap húrtrapéz.)

b) Igaz. Indoklás: a négyzetnek négy szimmetriatengelye van és paralelogramma.

c) Igaz. Indoklás: ha a paralelogramma oldalai egyenlő hosszúak, akkor az rombusz, a rombusz átlói pedig merőlegesek.

d) Igaz. Indoklás: ha a paralelogramma két átlója egyenlő hosszú, akkor az átlók szögfelezőjére tengelyesen szimmetrikus a paralelogramma, vagyis téglalap. A téglalap szögei derékszögek.

4. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszait indokolja!

a) Van olyan deltoid, amely valamelyik átlójának behúzásával felbontható két egybevágó háromszögre.

b) Minden deltoid felbontható valamelyik átlójának behúzásával két egyenlő szárú háromszögre.

c) Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor van két szemközti derékszöge.

d) Ha egy húrnégyszögben két szemközti szög derékszög, akkor a négyszög deltoid.

Megoldás:

a) Igaz. Indoklás: minden deltoid tengelyesen szimmetrikus, a tengely az egyik átló egyenese. Ez az átló tehát két egybevágó háromszögre bontja a deltoidot.

b) Igaz. Indoklás: minden deltoidra igaz, hogy a két egyenlő szomszédos oldalának végpontjait összekötő átlója két egyenlő szárú háromszögre bontja.

c) Igaz. Indoklás: ha a deltoid húrnégyszög, akkor a szemközti szögei összege 180°. Mivel a deltoid tengelyesen szimmetrikus, van két szemközti szöge, amelyek emellett egyenlők is, tehát mindkettő 90°-os.

Másképp gondolkodva alkalmazhatjuk Thálesz tételét is, hiszen a körbe írható deltoid szimmetriaátlója a kör átmérője, az ezen nyugvó szögek derékszögek.

d) Hamis. Indoklás: tudunk olyan húrnégyszöget mutatni, amelynek két szemközti szöge derékszög, mégsem deltoid. Például: egy téglalap, amely nem négyzet, húrnégyszög, a szemközti szögei derékszögek, de mégsem deltoid, hiszen a szomszédos oldalak különböző hosszúságúak.

5. Egy egyenlő szárú háromszög súlyvonalainak a hossza 90, 51, 51 hosszegység.

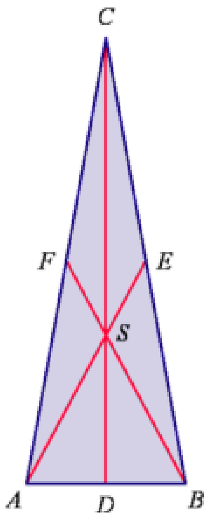
a) Mekkora a háromszög területe?

b) Mekkora a súlyvonalakból alkotott háromszög területe?

c) Általánosítsunk! Mekkora egy háromszög területének és a súlyvonalaiból alkotott háromszög területének az aránya?

Megoldás:

Érdemes ábrát készíteni. ABC egyenlő szárú háromszög, amelyben berajzoltuk a súlyvonalakat.

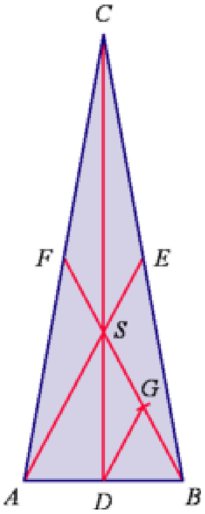


Ismeretes, hogy a súlyvonalak felezik a szemközti oldalakat, és a súlypont harmadolja a súlyvonalakat. Az ábra betűzését használva az adatok ismeretében $SD = 30$, $SB = 34$.

Az SDB derékszögű háromszögre alkalmazhatjuk Pitagorasz tételét. Ebből a harmadik oldal $DB = 16$, ez az egyenlő szárú háromszög alapjának a fele.

a) Az alap és a hozzá tartozó magasság (amely itt egyben a súlyvonal) ismeretében a terület $\dfrac{90 \cdot 32}{2} = 1440$.

b) Kössük össze az SDB derékszögű háromszögben a D csúcsot az SB felezőpontjával, G-vel.



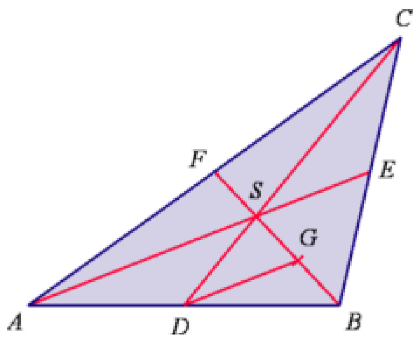
Az SDG háromszög területe feleakkora, mint az SDB háromszög területe: $\frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 30}{2} = 120$.

A DG szakasz az ASB háromszög középvonala, ezért $DG = \frac{AS}{2}$, vagyis az AE súlyvonal harmada. Így az SDG háromszög mind a három oldala a megfelelő súlyvonal harmadrésze. Ha ezt a háromszöget háromszorosára nagyítjuk, akkor olyan háromszöget kapunk, amelynek az oldalai az adott háromszög súlyvonalai.

Tudjuk, hogy hasonló háromszögek területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete.

A súlyvonalakból alkotott háromszög területe 9-szerese az SDG háromszög területének, vagyis $9 \cdot 120 = 1080$.

c) Tetszőleges háromszögre (analóg betűzésekkel) alkalmazzuk a megoldás gondolatmenetét!



Tetszőleges ABC háromszögben a súlyvonalak a háromszög belsejébe esnek. Az előzőekhez hasonlóan elő tudjuk állítani a súlyvonalak harmadából meghatározott háromszöget, az ábra betűzésével az SDG háromszöget. Ennek a területe feleakkora, mint az SDB háromszög területe, amely feleakkora, mint az ABS területe, az ABS háromszög területe pedig az ABC háromszög területének a harmada. Az SDB háromszög területe ezért az egész háromszög területének a tizenketted része.

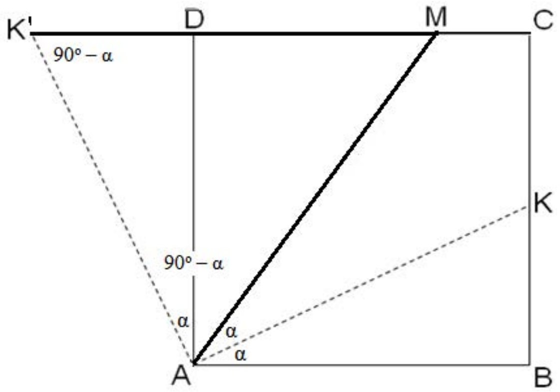
A súlyvonalakból alkotott háromszög területe az SDG háromszög területének 9-szerese (amely a teljes háromszög területének tizenkettede), így a keresett arány: $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ tetszőleges háromszög esetén,

6. Az $ABCD$ négyzet DC oldalán vegyünk fel egy tetszőleges M pontot. Az $MAB\sphericalangle$ szögfelezője a BC oldalt egy K pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AM = BK + DM$!

Megoldás:

Elemi geometriai eszközökkel:

Forgassuk el az ABC háromszöget A körül $+90°$-kal! Az AB szakasz elforgatottja az AD szakasz, a K pont elforgatottja, K', a CD oldal meghosszabbítására esik, ezért $K'D + DM = BK + DM$. Legyen $MAK = KAB = K'AD = \alpha$!



Mivel azonban $DAM\sphericalangle = 90° - 2\alpha$, $K'AM\sphericalangle = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha = MK'A\sphericalangle$.

Tehát az $MK'A$ háromszög egyenlő szárú, így $AM = K'M = BK + DM$.

Trigonometriai számítással:

Legyen $MAB\sphericalangle = 2\alpha$, ekkor $DAM\sphericalangle = 90° - 2\alpha$. Legyen továbbá $DM = x$ és $BK = y$. Ekkor az állítás: $AM = x + y$. Válasszuk továbbá a négyzet oldalát egységnyinek!

A KAB háromszögben $y = \operatorname{tg}\alpha$ és a DAM háromszögben $x = \operatorname{tg}(90° - 2\alpha)$, azaz

$$x + y = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(90° - 2\alpha).$$

Ismeretes, hogy $\operatorname{tg}(90° - 2\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}$, valamint $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, tehát $x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

Ebből $x + y = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

Másrészt a DAM háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján $AM^2 = 1^2 + x^2$, azaz

$$AM^2 = 1 + \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ez viszont éppen $\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$, vagyis $(x+y)^2 = 1 + x^2 = AM^2$, tehát valóban teljesül a feladat állítása: $AM = x + y = DM + BK$.

2.7. Ponthalmazok, vektorok, koordináta geometria

A vektor fogalma, vektorok a koordináta síkon. Vektor abszolút értéke, vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa, vektor felbontása összetevőkre. Skaláris szorzat definíciója; tulajdonságai. Tájékozódás a koordinátasíkon, ponthalmazok megadása a koordinátasíkon. Az egyenes egyenletének felírása különböző adatok alapján, a kör egyenlete.

Mintapéldák

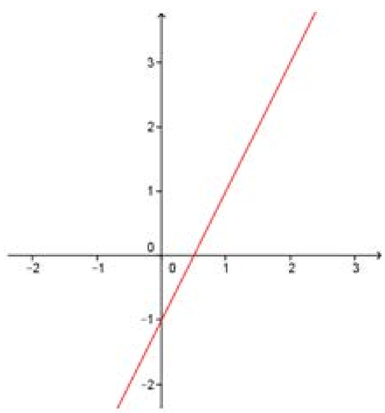
1. Ábrázolja azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát a derékszögű koordináta-rendszer síkján, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenleteket.

Hasonlítsa össze az alábbi öt egyenlet megoldáshalmazát! Keressen magyarázatot az eltérésekre és a megegyezésekre.

a) $y = 2x - 1$ *b)* $y^2 = (2x-1)^2$ *c)* $\sqrt{y} = \sqrt{2x-1}$
d) $\sqrt{2x-y} = 1$ *e)* $\dfrac{1}{2x-1} = 1$

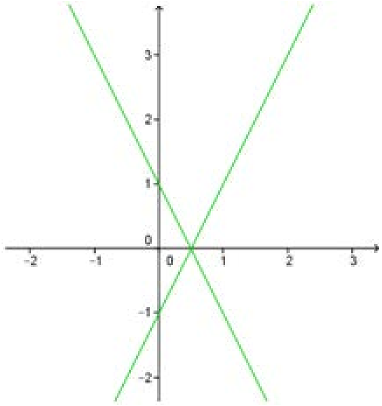
Megoldás:

a)

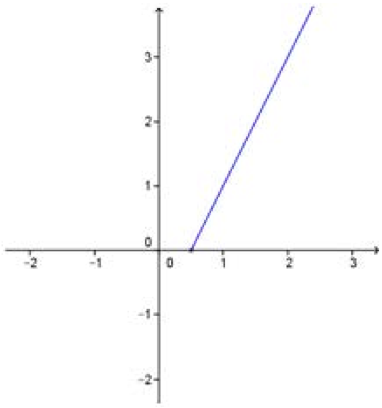


b) Az egyenletet rendezzük, és szorzattá alakítunk $(y - 2x + 1)(y + 2x - 1) = 0$.

A szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Tehát a megoldáshalmaz az $y = 2x - 1$ és az $y = -2x + 1$ egyenleteket kielégítő pontok halmazainak egyesítése, egy egyenespár.



c) Az egyenlet csak akkor értelmes, ha az $y \geq 0$ és $x \geq \dfrac{1}{2}$. Tehát a megoldáshalmaz egy félegyenes, az $y = 2x - 1$ egyenesének az első síknegyedbe eső darabja.



d) Ha $2x - y \geq 0$, akkor az egyenlet ekvivalens a négyzetre emelés után kapott egyenlettel: $2x - y = 1$. Ebből $y = 2x - 1$. A gyök alatti $2x - y \geq 0$, ha $2x \geq y$. Az ezt kielégítő pontok halmaza az $y = 2x$ egyenes és az egyenes alatt lévő félsík pontjai. Mivel az $y = 2x - 1$ egyenes párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel és ebbe a félsíkba esik, ezért a *d)* egyenletnek megfelelő ponthalmaz valóban az $y = 2x - 1$ egyenese, azonos az *a)*-beli feladat ponthalmazával.

e) Az $\dfrac{1}{2x - y} = 1$ ekvivalens az $y = 2x - 1$ egyenlettel, ha $2x - y \neq 0$. Ez teljesül, hiszen az $y = 2x - 1$ egyenes párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel, nincs közös pontjuk. Tehát a *d)* feladat megoldáshalmaza is azonos az *a)* feladatéval.

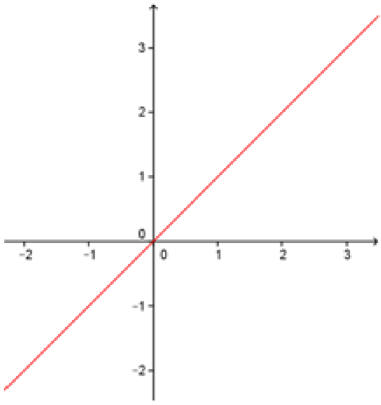
2. Ábrázolja azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát a derékszögű koordináta-rendszer síkján, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenleteket!

Hasonlítsa össze az alábbi négy egyenlet megoldáshalmazát! Keressen magyarázatot az eltérésekre és a megegyezésekre!

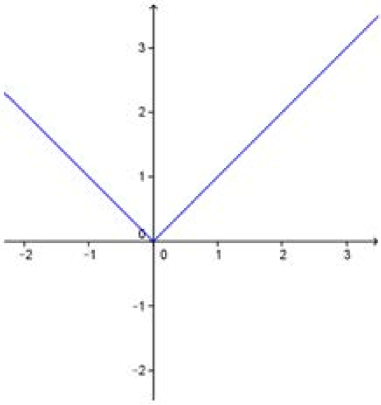
a) $y = x$ *b)* $|x| = y$ *c)* $x = |y|$ *d)* $|x| = |y|$

Megoldás:

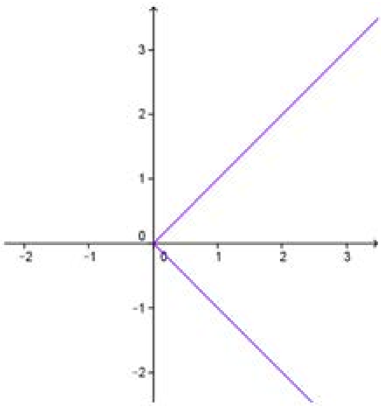
a) $y = x$



b) $|x| = y$, a megoldáshalmaz azonos az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjával.



c) $x = |y|$ teljesül, ha $x \geq 0$ esetén az $x = y$, $y \geq 0$ vagy $x = -y$, $y < 0$



d) $|x| = |y|$ teljesül, ha $y = x$ vagy $y = -x$, tehát a megoldáshalmaz egy egyenespár.

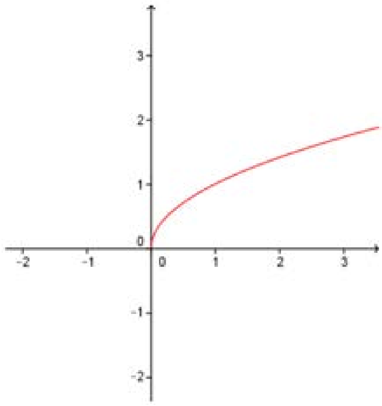
3. Ábrázolja azoknak a $P(x; y)$ pontoknak a halmazát a derékszögű koordináta-rendszer síkján, amelyek koordinátái kielégítik az alábbi egyenleteket!

Hasonlítsa össze az alábbi négy egyenlet megoldáshalmazát! Keressen magyarázatot az eltérésekre és a megegyezésekre!

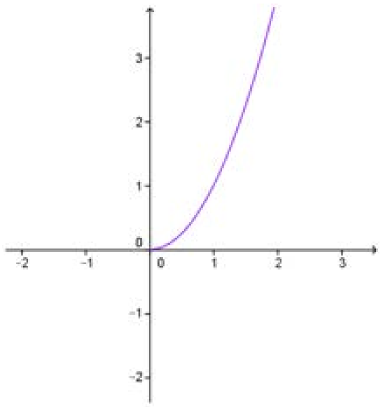
a) $y = \sqrt{x}$ *b)* $\sqrt{y} = x$ *c)* $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ *d)* $\sqrt{x^2} = y$

Megoldás:

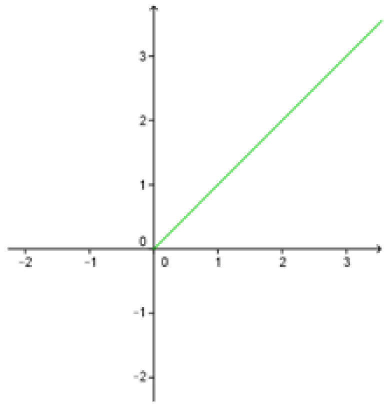
a) A megoldáshalmaz azonos az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonjával, amikor $x \geq 0$.



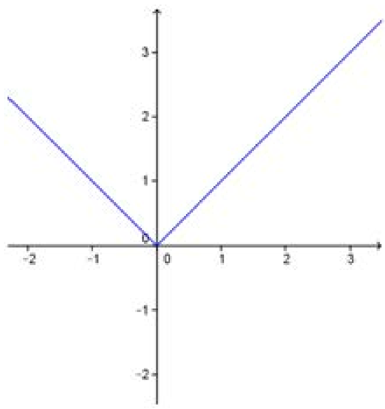
b) Ha $y \geq 0$ és $x \geq 0$, akkor ez az egyenlet ekvivalens a négyzetre emeléssel kapott egyenlettel: $y = x^2$, tehát a megoldáshalmaza a normál parabola első koordináta-negyedbe eső darabja.



c) Az egyenlet értelmezési tartománya $x \geq 0$ és $y \geq 0$. Ekkor ekvivalens a négyzetre emeléssel kapott egyenlettel: $y = x$. A megoldáshalmaz félegyenes az első negyedben.



d) $\sqrt{x^2} = y$, azaz $|x| = y$. A megoldáshalmaz azonos az $x \mapsto |x|$ függvény grafikonjával.



4. A derékszögű koordináta-rendszer síkjában mely $(x; y)$ pontokra teljesül az $x + |x| = y + |y|$?

Ábrázolja a kapott ponthalmazt a koordináta-rendszerben!

Megoldás:

Triviális megoldás: $y = x$, a megfelelő pontok az első és harmadik síknegyed szögfelező egyenesének pontjai.

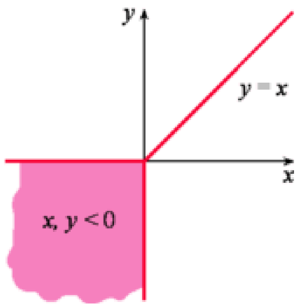
Keressünk további megfelelő pontokat az abszolút érték definíciójának felhasználásával!

$|x| = x$, ha $x \geq 0$ és $|x| = -x$, ha $x < 0$.

Hasonlóképpen y-ra:

$|y| = y$, ha $y \geq 0$ és $|y| = -y$, ha $y < 0$.

Valamennyi lehetőséget behelyettesítve az egyenletbe új megoldást kapunk, ha x vagy y is nem pozitív, ekkor ugyanis $x + |x| = 0$ és $y + |y| = 0$. Ez esetben tehát minden ilyen pont megfelel, beleértve a tengelyek negatív félegyenesét is.



Megjegyzés. Fordítva is gondolkodhatunk. Felhasználva, hogy $r + |r| = 2r$, ha r pozitív, $r + |r| = 0$, ha r negatív, a nullát bármelyik esetbe besorolhatjuk. Ha most az egyenlet bal oldalán pozitív szám áll, akkor a jobb oldalon is pozitív szám áll, tehát $x > 0$, $y > 0$ és $2x = 2y$, azaz $x = y$. Ha mindkét oldalon nulla áll, akkor $x \leq 0$, $y \leq 0$ és itt több megkötés nincs is.

5. A derékszögű koordináta-rendszer síkjában mely $(x; y)$ pontokra teljesül az $x^2 - y^2 = x - y$ egyenlet? Ábrázolja a kapott ponthalmazt a koordináta-rendszerben!

Megoldás:

Triviális megoldás az $y = x$, ennek az egyenesnek minden pontja megfelel.

De van még több megoldás is, ezt is meg kell keresni.

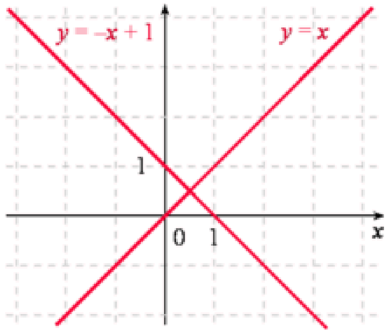
Ötlet: a bal oldali kifejezés szorzattá alakítható.

Az egyenlet a bal oldal szorzattá alakítása után: $(x + y)(x - y) = x - y$.

Azt már tudjuk, hogy az $y = x$ megoldása az egyenletnek. Ezért vizsgáljuk azt az esetet, amikor $y \neq x$, ekkor $x - y \neq 0$, tehát eloszthatjuk ezzel mindkét oldalt, így ezt kapjuk: $x + y = 1$ vagy y-ra rendezve $y = -x + 1$. Ennek a képe egy egyenes, amelynek meredeksége -1, és az y tengelyt 1-nél metszi.

Összegezve a megállapításainkat a keresett ponthalmaz két egyenes, amelyek egyenlete $y = x$, illetve $y = -x + 1$.

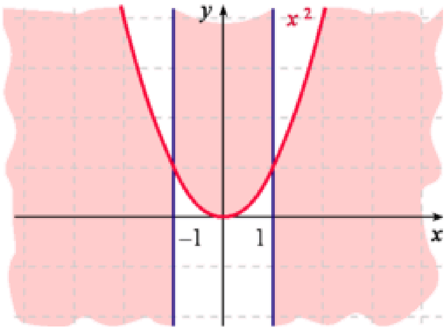
Megjegyzés. Az eredeti összefüggésben szorzattá alakítás és rendezés után az az $(x + y - 1)(x - y) = 0$ alakkal ekvivalens. Erről is leolvasható a megoldás.



6. A derékszögű koordináta-rendszer síkjában mely $(x; y)$ pontokra teljesül az $\dfrac{x^2 - y}{|x| - 1} \geq 0$ egyenlőtlenség? Ábrázolja a kapott ponthalmazt a koordináta-rendszerben!

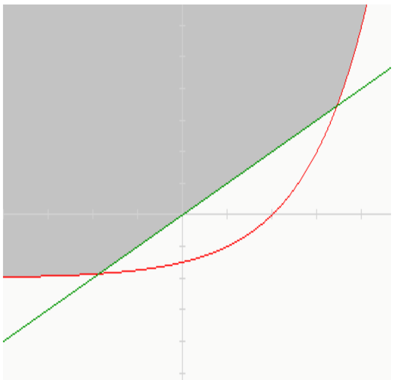
Megoldás:

Egyrészt $x^2 - y \geq 0$ és $|x| - 1 > 0$, tehát a pontok a parabola alatt és az $x = 1$ egyenestől jobbra, illetve az $x = -1$ egyenestől balra eső síkrészek közös része, másrészt ha $x^2 - y \leq 0$ és $|x| - 1 < 0$, tehát a pontok a parabola fölött és az $x = 1$ és $x = -1$ egyenesek közti sáv közös része.

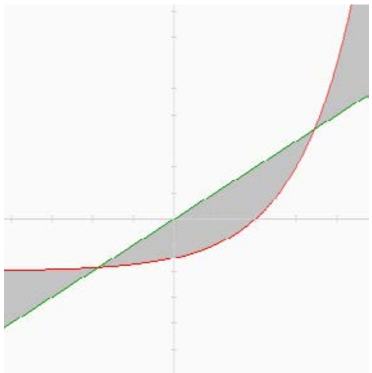


7. Válassza ki az alábbi ábrák közül azt, amelyik ábrázolja a következő egyenlőtlenség megoldáshalmazát $\left(y - 2^{x-1} + 1\right)(y - x) \leq 0$

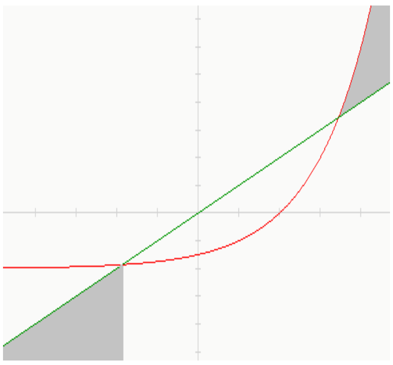
A)



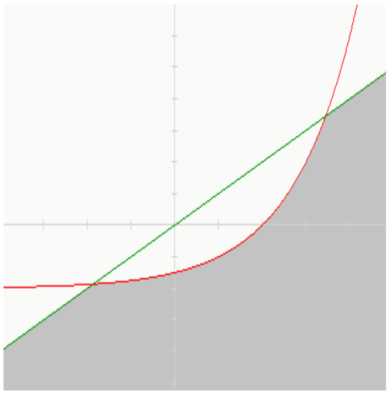
B)



C)



D)



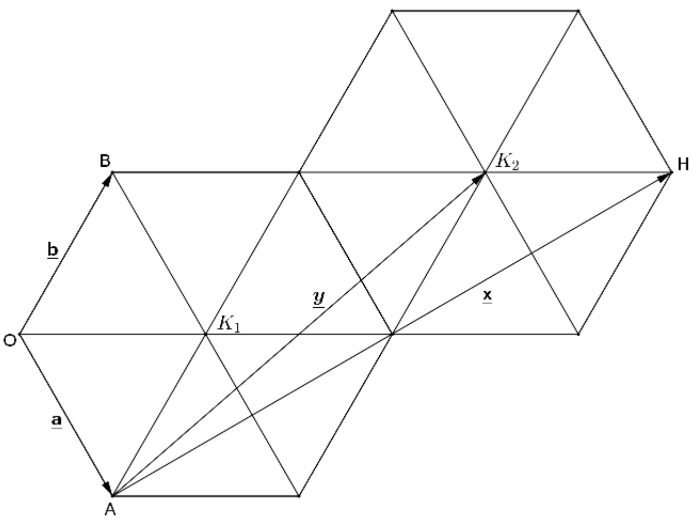
Megoldás: *B)*

8. Hol helyezkednek el a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer síkjában azok az egész koordinátájú pontok, amelyek koordinátáira igaz, hogy $|x| + |y| \leq 5$?

Megoldás:

A megoldáshalmaz a derékszögű koordináta-rendszer síkjában egy olyan négyzet határvonalán és a belsejében levő egész koordinátájú pontok halmaza, amelynek a csúcsai a tengelyeken vannak az origótól 5 egységnyi távolságra.

9. Szerkesztettünk két, egy-egy oldalával egymáshoz csatlakozó egységnyi oldalú szabályos hatszöget az ábrán látható betűzéssel. A két hatszög középpontja K_1 és K_2. Az O-ból az A-ba mutató vektor az $\mathbf{a}$, az O-ból a B-be mutató vektor a $\mathbf{b}$, az A-ból a H-ba mutató vektor az $\mathbf{x}$, továbbá az A-ból a K_2-be mutató vektor az $\mathbf{y}$ vektor.



a) Határozzuk meg az $\mathbf{x}$ vektort, ha adott az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, és számítsuk ki a hosszát és az $\mathbf{a}$-val bezárt szögét!

b) Határozzuk meg az $\mathbf{y}$ vektort, ha adott az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, és számítsuk ki a hosszát és az $\mathbf{x}$ vektorral bezárt szögét!

Megoldás:

$\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$, merőleges $\mathbf{a}$-ra (a fele egy olyan rombusz egyik átlója, amelynek másik átlója $\mathbf{a}$-val egyezik meg), a hossza $2\sqrt{3}$.

$\mathbf{y} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, a szög sokféleképpen kiszámítható (skalárszorzat, koszinusz- vagy szinusztétel), a hossza $\sqrt{7}$.

A számítások részletesen: helyezzük az O pontot a koordináta-rendszer középpontjába, és legyen $K_1(1;0)$. Ekkor $\mathbf{a}$ hossza 1, $\mathbf{y}\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hossza $\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{7}$.

A skalárszorzat kétféleképpen kiszámítva: $\mathbf{ay} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$, illetve $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{y}|\cos\gamma$, ahol γ a közbezárt szög. Mivel $|\mathbf{a}| = 1$ és $|\mathbf{y}| = \sqrt{7}$, $\cos\gamma = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, amiből a szög 79,1°.

Vagy a szög másképp: abban a háromszögben, amelyben $\mathbf{a}$ az egyik, $\mathbf{y}$ a másik oldal, OK_2 a harmadik oldal, amelynek szintén $\sqrt{7}$ a hossza, lévén ez egy egyenlő szárú háromszög. A $\delta = OK_2A$ szöggel szemközti oldalra felírva a koszinusztételt: $1 = \sqrt{7}^2 + \sqrt{7}^2 - 2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\cos\delta$, amiből $\cos\delta = \frac{13}{14}$. A kérdéses szögre ezzel is a 79,1° eredmény adódik.

10. A derékszögű koordináta-rendszer síkjában adottak az $A(-1;3)$ és a $B(7;3)$ pontok. Az x tengely mely pontjából látszik az AB szakasz derékszög alatt?

Megoldás:

A sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy adott szakasz derékszögben látszik, a szakaszra mint átmérőre emelt Thálesz kör (a végpontokat kivéve).

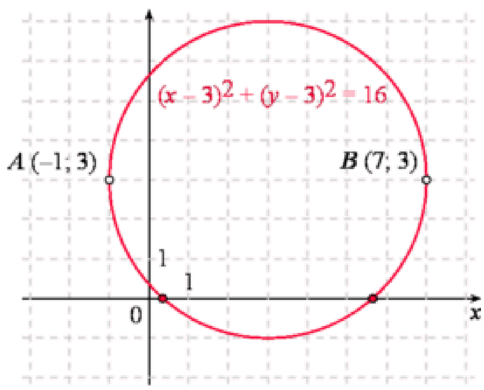
Keressük tehát az AB szakasz Thálesz köre és az x tengely metszéspontját.

A kör középpontja az AB szakasz felezőpontja, a $K(3;3)$ pont, sugara a felezőpont és valamelyik végpont távolsága: $\sqrt{(3-(-1))^2+(3-3)^2}=4$.

A kör egyenlete $(x-3)^2+(y-3)^2=16$.

Az x tengellyel vett metszéspontjában $y=0$.

Erre az egyenlet: $(x-3)^2+(-3)^2=16$, vagyis $x^2-6x+2=0$, ebből $x=3+\sqrt{7}$ vagy $x=3-\sqrt{7}$ a keresett pontok x koordinátája.



11. Számítsuk ki az $y-10^{-9}x=10^{-6}$, az $y=10^{-6}$ és a $2y=10^{-9}x+10^{-6}$ egyenesek által közrezárt háromszög területét!

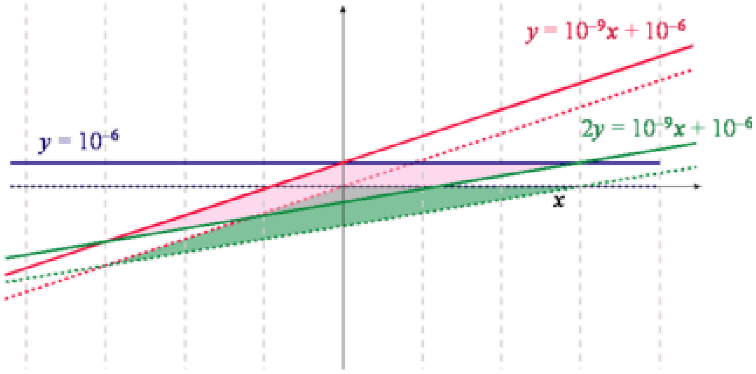
Megoldás:

Érdemes az egyenesek egyenletét y-ra rendezni: $y=10^{-9}x+10^{-6}$, $y=10^{-6}$, $y=\frac{10^{-9}}{2}x+\frac{10^{-6}}{2}$.

Észrevehetjük, hogy ha a három egyenest eltoljuk az y tengely mentén 10^{-6}-nal, akkor az első két egyenes az origón megy át, a harmadik az y tengelyt a $-\frac{10^{-6}}{2}$-ben metszi. Az első egyenes meredeksége 10^{-9}, a második egyenes maga az x tengely, a harmadik egyenes meredeksége feleakkora, mint az elsőé.

Az eltolással a három egyenes által közbezárt terület nem változik.

Segít a megoldásban, ha ábrát készítünk.



Határozzuk meg az egyenesek metszéspontjait!

Az egyik metszéspont az origó, a másik kettő $(1000; 0)$, illetve $(-1000; -10^{-6})$.

A háromszög egyik oldala az x tengelyre illeszkedik, a metszéspont alapján a hossza 1000, a hozzá tartozó magasság 10^{-6}.

Tehát a háromszög területe $\dfrac{1000 \cdot 10^{-6}}{2} = \dfrac{10^{-3}}{2}$.

Megjegyzés. Amennyiben a feladatban adott konstansokat általánosan pozitív paramétereknek tekintjük, $10^{-9} = a > 0$, illetve $10^{-6} = b > 0$, a három egyenes egyenlete $y = ax + b$, $y = b$, $y = \dfrac{a}{2}x + \dfrac{b}{2}$.

Metszéspontjaik $(0; b)$, $\left(\dfrac{b}{a}; b\right)$, $\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$.

Az általuk meghatározott háromszög egyik oldala az $y = b$ egyenesre esik, ezért a hossza egyszerűen megkapható, ez az első koordináták különbsége, $\dfrac{b}{a}$.

Mivel a harmadik csúcs az x tengelyre esik, az ebből induló magasság hossza éppen a pont $y = b$ egyenestől mért távolsága, b.

Eszerint a háromszög területe $\dfrac{\frac{b}{a} \cdot b}{2} = \dfrac{b^2}{2a}$. Esetünkben ez $\dfrac{10^{-12}}{2 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{10^{-3}}{2}$.

12. Tekintsük a Descartes-féle koordináta-rendszer $A(20; 6)$, $B(24; -6)$ pontjait! Adjuk meg a sík összes olyan

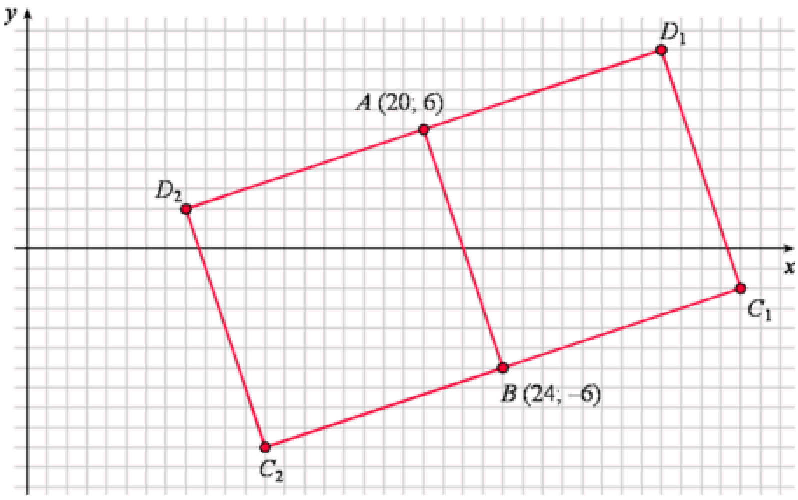
a) négyzete;

b) szabályos háromszöge

további csúcsainak koordinátáit, amelyben A és B is csúcsok, mégpedig szomszédosak.

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát! Az ábráról is leolvashatjuk, hogy két megoldást kapunk.



Az ábra betűzését használva dolgozzunk vektorokkal! $\overrightarrow{BA} = (-4; 12)$.

A BA-val szomszédos oldalak vektorait megkaphatjuk A, illetve B körüli $90°$-os elforgatással mindkét irányba. Tudjuk, hogy ha egy vektor $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$, akkor a két elforgatott vektor koordinátái: $(v_2; -v_1)$, illetve $(-v_2; v_1)$.

Az adott oldalra merőleges oldalakra illeszkedő vektorok $\mathbf{v}_1(12; 4)$ és $\mathbf{v}_2(-12; -4)$.

A D_1 pontot megkaphatjuk, ha a $\mathbf{v}_1(12; 4)$ vektort az $A(20; 6)$ pontból indítjuk: $(20; 6) + (12; 4) = (32; 10)$. A C_1 ponthoz pedig a B-ből kell indítani a $\mathbf{v}_1$ vektort: $(24; -6) + (12; 4) = (36; -2)$.

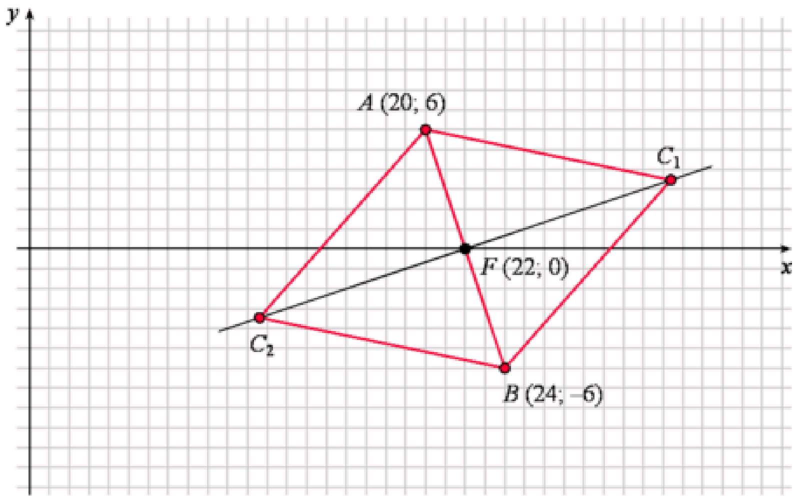
A D_2 pontot megkaphatjuk, ha a $\mathbf{v}_2(-12; -4)$ vektort az $A(20; 6)$ pontból indítjuk: $(20; 6) + (-12; -4) = (8; 2)$. A C_2 ponthoz a B-ből kell indítani a $\mathbf{v}_2$ vektort: $(24; -6) + (-12; -4) = (12; -10)$.

A feladat megoldható vektorok nélkül is. Képzeljük el, hogy az adott szakasz ismeretében meg kellene szerkeszteni a két négyzetet. A szerkesztés menetét tudjuk számítással követni.

Az AB szakasz mindkét végpontjára merőlegest állítunk. A merőlegesek egyenletét fel tudjuk írni, hiszen az AB szakasz meredekségéből (irányvektorából, normálvektorából) meg tudjuk állapítani a rá merőleges egyenesek meredekségét (irányvektorát, normálvektorát), és az ismert A, valamint B pont segítségével fel tudjuk írni a rajta átmenő egyenes megfelelő egyenletét. A csúcsokat ezeken az egyeneseken keressük, az A-tól, illetve a B-től AB távolságra. Ehhez felírjuk az A, illetve a B középpontú AB sugarú körök egyenletét, és ezzel és a megfelelő egyenes egyenletivel megoldjuk az egyenletrendszereket, a közös pontok megadják a hiányzó csúcsokat. (Az AB egyenesének egyenlete $3x + y = 66$, a rá merőleges egyenesek egyenlete $-x + 3y = -2$, illetve $-x + 3y = -42$. A körök egyenlete $(x - 20)^2 + (y - 6)^2 = 160$, illetve $(x - 24)^2 + (y + 6)^2 = 160$.)

Vektorok alkalmazásával ennél rövidebb és egyszerűbb megoldást kaptunk.

b) Készítsünk ábrát!



Ebben az esetben is két megoldást kapunk, ahogy az az ábráról is leolvasható.

Állapítsuk meg az AB szakasz F felezőpontját.

$$F = \frac{A+B}{2} = \frac{(20;6)+(24;-6)}{2} = (22;0).$$

A keresett háromszögcsúcsok a szabályos háromszög szimmetriatengelyén vannak. Az a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Az A és az F koordinátáiból megkapjuk az $\overrightarrow{FA} = (-2;6)$ vektort. Ha ennek a 90°-os elforgatottjainak a $\sqrt{3}$-szorosait indítjuk az F pontból, megkapjuk a hiányzó csúcsok koordinátáit.

$FC_1 = \sqrt{3}(6;2)$ és $FC_2 = \sqrt{3}(-6;-2)$.

Ebből $C_1\left(22+6\sqrt{3};2\right)$ és $C_2\left(22-6\sqrt{3};2\right)$.

A négyzetes feladathoz hasonlóan itt is dolgozhatunk vektorok nélkül, hasonló lépéseket alkalmazva számítással kísérjük a lehetséges szerkesztést!

Feladatok

1. Hol helyezkednek el a derékszögű koordináta-rendszer síkjában azok a pontok, amelyek koordinátáira igaz, hogy $2(x+y) = |x|+|y|$.

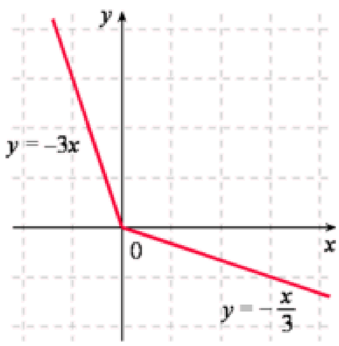
Megoldás:

Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor $y = -x$, csak az origó megoldás.

Ha $x \leq 0$ és $y \geq 0$, akkor az $y = -3x$ félegyenes.

Ha $x \leq 0$ és $y \leq 0$, akkor $y = -x$, csak az origó.

Ha $x \geq 0$ és $y \leq 0$, akkor az $y = -\frac{x}{3}$ félegyenes.



2. A derékszögű koordináta rendszer síkjában adott egy négyszög négy csúcsával: $A(-2;-3)$, $B(4;-3)$, $C(4;11)$, $D(-2;11)$, továbbá egy kör, amelynek az egyenlete $x^2+y^2-20x-12y+100=0$.

Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi a négyszögnek és a körnek is a területét.

Megoldás:

Az adatokról leolvasható, hogy a négyszög téglalap. A keresett egyenes csak akkor felezheti mindkét alakzat területét, ha átmegy a téglalap és a kör középpontján is. A téglalap középpontja $(1;4)$, a köré $(10;6)$. Az ezeken a pontokon átmenő egyenes egyenlete $y=\frac{2}{9}x+\frac{34}{9}$.

3. Hol helyezkednek el a derékszögű koordináta-rendszer síkjában azok a pontok, amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek:

a) $|x|\geq|y|$

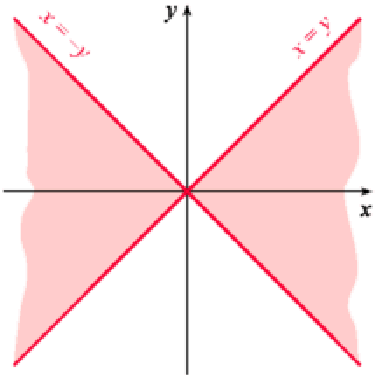
b) $|x+y|\geq 1$

Megoldás:

a) Az abszolút érték jelentése alapján többféleképpen járhatunk el. Például megvizsgálhatjuk az összes esetet aszerint, hogy x-et és y-t pozitívnak vagy negatívnak választjuk.

Másik gondolkodásmód: az egyenlőtlenség nem változik, ha x helyett $(-x)$-et vagy az y helyett $(-y)$-t írunk be. Ez azt jelenti, hogy az alakzat szimmetrikus az x tengelyre és az y tengelyre is. Tehát elég megállapítani a ponthalmaznak például az első síknegyedbe eső részét, azaz ha x-et és y-t is nemnegatívnak választjuk, és a kapott alakzatot a koordináta tengelyekre vonatkozó tükrözéssel kiterjesztjük mind a négy síknegyedre.

Ha $x\geq 0$ és $y\geq 0$, akkor az egyenlőtlenség $y\leq x$. A megfelelő ponthalmaz az első síknegyedben az $y=x$ egyenes és az alatta lévő pontok összessége. Ezt az egyik tengelyre, majd az együttes alakzatot a másik tengelyre is tükrözve megkapjuk a keresett teljes ponthalmazt.



Harmadik út: az $|x| \geq |y|$ az y-ra nézve azt jelenti, hogy $-|x| \leq y \leq |x|$.

Két egyenlőtlenségnek egyszerre kell teljesülnie: $y \leq |x|$ és $-|x| \leq y$.

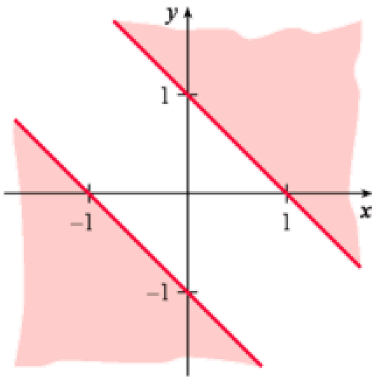
Az abszolút érték függvény és annak az ellentettje grafikonjai határolják a keresett ponthalmazt.

b) Az $|x + y| \geq 1$ egyenlőtlenség teljesül, ha $x + y \geq 1$ vagy $x + y \leq -1$.

Az első esetben $y \geq -x + 1$, ez az $y = -x + 1$ egyenes pontjait, illetve az afölötti pontokat jelenti.

A második esetben $y \leq -x - 1$, ami az $y = -x - 1$ egyenes és az alatta lévő pontok halmazára teljesül.

A teljes megoldás a két ponthalmaz uniója, azaz a koordinátasík pontjai, kivéve két párhuzamos egyenes ($y = -x + 1$, $y = -x - 1$) közötti sávot.



4. Hol helyezkednek el a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer síkjában azok a pontok, amelyek koordinátáira igaz, hogy

a) $(x - y)(2x - 3) \leq 0$

b) $\dfrac{x^2 - y}{x - 1} = 0$

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik áthalad a $P(1; -1)$ ponton és párhuzamos a $3x - 2y = 11$ egyenletű egyenessel.

6. Hogy helyezkedik el az $A(2004; 2005)$ pont az $5x - 3y - 4003 = 0$ egyeneshez képest?

A) rajta van *B)* fölötte van *C)* alatta van

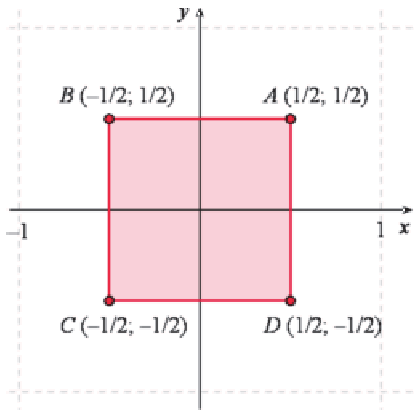
7. Legyen P az egységnyi oldalhosszúságú négyzet belsejében vagy határán fekvő pont. Milyen határok között változhat a P-től a négyzet négy csúcsáig terjedő távolságok négyzetének összege?

Hol kell P-t kijelölni, hogy ez a négyzetösszeg minimális legyen?

Megoldás:

Érdemes a koordináta-rendszerben elhelyezni a négyzetet, és algebrai módszereket alkalmazni.

A feladat megoldását nem befolyásolja, hol és hogyan helyezzük el a négyzetet, ezért érdemes olyan helyzetet választani, amely a számításainkat megkönnyítheti. Legyen a négyzet középpontja az origó, ekkor mind a négy csúcsnak a tengelyektől mért távolsága $\frac{1}{2}$, tehát a csúcsok koordinátái: $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.



A P pont koordinátái $(x;y)$, ahol $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$.

Ismeretes, hogy két pont, $P(p_1;p_2)$ és $Q(q_1;q_2)$ távolsága:

$$\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}.$$

Ennek alapján írjuk fel a négy csúcsnak a P-től való távolságai négyzetének összegét.

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]^2+\left[y-\frac{1}{2}\right]^2+\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\left[y-\frac{1}{2}\right]^2+\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\left[y+\frac{1}{2}\right]^2+\left[x-\frac{1}{2}\right]^2+\left[y+\frac{1}{2}\right]^2$$

A négyzetre emelések és összevonások után a távolságok négyzeteinek összege: $4x^2+4y^2+2$.

Ennek a kifejezésnek a minimumát és maximumát keressük, ha tudjuk, hogy $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Ebből $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$ és $0 \leq y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Ez a kifejezés a minimumot nyilván az $x=0$ és $y=0$ esetben, a maximumot pedig az $x=\pm\frac{1}{2}$ és $y=\pm\frac{1}{2}$ esetben veszi fel, ezért $2 \leq 4x^2+4y^2+2 \leq 4$.

Tehát a kérdéses összeg 2 és 4 között változhat.

A P-től a négyzet négy csúcsáig terjedő távolságok négyzetének összege akkor lesz minimális, ha a P pont a középpontban van, és akkor lesz maximális, ha a P pont valamelyik csúcsban van.

8. Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta rendszerben $A(2;0)$, $B(-4;0)$ és $C(0;8)$.

a) Határozzuk meg a koordináta-rendszerben a háromszög magasságpontját, súlypontját és a háromszög köré írt kör középpontját.

b) Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok egy egyenesre esnek.

Megoldás:

a) A magasságpont $M(0;1)$, a súlypont $S\left(-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$, a körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja $O\left(-1;\frac{7}{2}\right)$.

b) Ez a három pont egy egyenesen van, az egyenes egyenlete $y=-\frac{5}{2}x+1$.

Észrevehetjük azt is, hogy az S pont az MO szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja.

Belátható, hogy tetszőleges háromszögben a magasságpont, a súlypont és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van, ezt az egyenest nevezik a háromszög Euler-egyenesének. Igaz az is, hogy a súlypont a körülírt kör középpontja és a magasságpont által meghatározott szakasznak a körülírt kör középpontjához közelebbi harmadolópontja.

9. Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi összefüggésekkel megadott alakzatokat, ha az a valós paraméter.

$x^2+y^2+2x\leq 1 \quad x-y+a=0$

Az a valós paraméter mely értékeire lesz a két alakzatnak egy közös pontja?

Megoldás:

Az első egyenlőtlenségben érdemes teljes négyzetté alakítással próbálkozni, hiszen ismeretes, hogy a kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$, ahol $(u;v)$ a kör középpontja és r a kör sugara. A teljes négyzetté alakítás után az egyenlőtlenség $(x+1)^2+y^2\leq 2$. Az egyenlőség a $(-1;0)$ középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körvonal pontjaira áll fenn, a kör belső pontjaira érvényes a „kisebb” reláció.

A második egyenlet, $y=x+a$, olyan egyenesek egyenlete, amelyek meredeksége 1, és az y tengelyt a-ban metszik, ahol a tetszőleges valós szám lehet.

A körnek és az egyenesnek akkor van egyetlen közös pontja, ha az egyenes érinti a kört. A két egyenletből álló egyenletrendszernek keressük a megoldását.

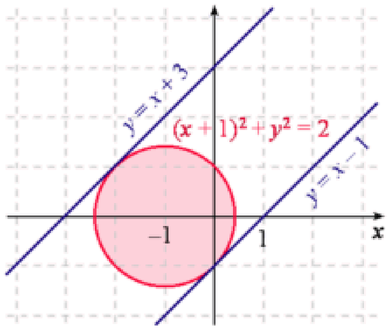
$$(x+1)^2+y^2=2$$
$$y=x+a$$

A második egyenletből az y-t behelyettesítve az elsőbe, x-ben másodfokú egyenletet kapunk, amelyben az a valós paraméter:

$$(x+1)^2+(x+a)^2=2$$
$$2x^2+2x(1+a)+a^2-1=0$$

Ismeretes, hogy a diszkrimináns előjelétől függ, hogy az egyenletnek hány valós megoldása van. Jelen esetben egyetlen valós gyököt keresünk, tehát a diszkriminánsnak 0-nak kell lennie. $4(1+a)^2-8(a^2-1)=0$. A zárójelek felbontása és összevonás, egyszerűsítés után a-ra másodfokú egyenletet kapunk: $a^2-2a-3=0$, amelynek gyökei $a_1=3$ és $a_2=-1$.

Tehát az a valós paraméternek két értéke is van, amely mellett az egyenesnek és a körnek egyetlen közös pontja van. Az $y = x + 3$ és az $y = x - 1$ egyenesek érintik az $(x + 1)^2 + y^2 = 2$ egyenletű kört. Az érintési pontok: $(-2; 1)$ és $(0; -1)$.



2.8. Szögfüggvények, trigonometria

A szög mérése fokban és radiánban. A szögfüggvények általános definíciója, a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggések: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye, pitagoraszi összefüggés; szögfüggvények kifejezése egymásból, nevezetes szögek ($0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $180°$ stb.) szögfüggvényei. Addíciós összefüggések. A szinusz- és a koszinusztétel.

Mintapéldák

1. Szerkesszünk olyan szöget, amelyre igaz, hogy a

a) szinusza pontosan 0,4;

b) tangense pontosan 3.

Megoldás:

a) Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 4 egységnyi, az átfogója 10 egységnyi hosszú. Ebben a derékszögű háromszögben a 4 egységnyi befogóval szemben lévő hegyesszög szinusza éppen 0,4. Az így kapott szög mellékszögének a szinusza is 0,4, sőt végtelen sok ilyen szög van, ha a forgásszögeket is figyelembe vesszük.

b) Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelyben az egyik befogó háromszorosa a másik befogónak. Ekkor a nagyobb befogóval szemközti szög tangense éppen 3. Ha ehhez a szöghöz hozzáadjuk a $180°$ egész számú többszörösét, mindig olyan szöget kapunk, amelynek a tangense 3.

2. Tudjuk, hogy $\sin\alpha = \sin 100°$. Határozzuk meg az α szög lehetséges értékeit.

Megoldás:

$\alpha = 100° + k \cdot 360°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ vagy $\alpha = 80° + k \cdot 360°$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

3. Tudjuk, hogy $\sin\alpha = \sin 120°$. Mennyi lehet $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$?

Megoldás:

A négyzetes összefüggés szerint $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Ebből $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. A feladatban $\sin\alpha = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3}$$

4. Rendezze növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\sin 90°, \quad \sin 60°, \quad \sin 1, \quad \sin 120°, \quad \sin 5$$

Megoldás:

Gondoljuk meg, melyik nagyobb, a 60°-os szög vagy az 1 ívmértékű szög!

Az egységsugarú körben az egységnyi hosszú ívhez tartozó középponti szög nagysága 1 ívmértékű, szokásos elnevezéssel 1 radián. Az egységsugarú körben a 60°-os középponti szöghöz tartozó ív hossza $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} > 1$

Vizsgáljuk a $\sin 5$ értékét! $\pi < 5 < 2\pi$, és a szinuszfüggvény ezen az intervallumon negatív, a többi megadott szám pozitív, ezért $\sin 5$ a legkisebb szám a felsoroltak közül Tehát a növekvő sorrend:

$$\sin 5 < \sin 1 < \sin 60° = \sin 120° < \sin 90° = 1$$

5. Számítsa ki a $\sin\frac{3\cdot 2^{1000}+1}{3}\pi$ kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

$$\sin\frac{3\cdot 2^{1000}+1}{3}\pi = \sin\left(2^{1000}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Felhasználtuk, hogy a szinuszfüggvény periodikus 2π – így annak tetszőleges egész számú többszöröse – szerint.

6. Bizonyítsuk be, hogy az x minden valós értéke mellett:

$$\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Megoldás:

Emeljünk ki az első két tagból $\cos^2 x$-et!

$$\cos^2 x(\cos^2 + \sin^2 x) + \sin^2 x = 1$$

A szögfüggvények definíciójából következik, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Tehát a zárójeles kifejezés 1, az egyenlőség új alakja $\cos^2 + \sin^2 x = 1$.

Erről viszont tudjuk, hogy x minden valós értéke mellett igaz.

7. Hány megoldása van a $\sin 2x = \sin x$ egyenletnek a $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon?

Megoldás:

Ismeretes, hogy $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, ezt alkalmazva az egyenletre azt kapjuk, hogy $2\sin x\cos x = \sin x$.

Feltéve, hogy nem nulla, osztunk $(\sin x)$-szel: $2\cos x = 1$, azaz $\cos x = \frac{1}{2}$, tehát $x = \frac{\pi}{3}$, a megadott intervallumban nincs más ilyen gyök.

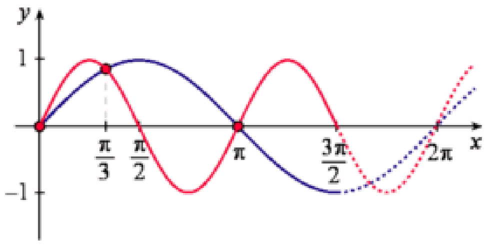
Ha azonban $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Ez csak $k = 0$ és 1 esetén esik a vizsgált intervallumba.

Az esetszétválasztást elkerülhetjük, ha osztás helyett 0-ra rendezzük az egyenletet, és szorzattá alakítunk: $\sin x(2\cos x - 1) = 0$. Innen mind a két esetet azonnal megkapjuk, ha felhasználjuk, hogy egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Tehát az összes megoldás az adott intervallumon: $\sin x = 0$, azaz $x = k\pi$, ahol $k = 0$ vagy 1, továbbá $x = \frac{\pi}{3}$.

Második megoldás:

Ábrázoljuk grafikonon a két oldalon álló függvényeket egy koordináta-rendszerben!



A megoldások száma egy jó ábráról is leolvasható: 3 megoldás van. Behelyettesítéssel ellenőrizzük a leolvasott értékeket.

Harmadik megoldás:

Képzeljük el az x forgásszöget, illetve annak kétszeresét az egységkörben. Azt kell megvizsgálnunk, hogy mely esetben lesz a két szögnek az y koordinátája egyenlő. Az első három síknegyedet kell megnéznünk.

Az $x = 0$ esetben nyilvánvalóan teljesül.

Ha x az első síknegyedbe esik, akkor a szinusza nemnegatív, így a kétszeresének a szinusza is nemnegatív, de csak akkor lehet ugyanannyi, mint az x szinusza, ha $\frac{\pi}{2} - x = 2x - \frac{\pi}{2}$, vagyis ha $x = \frac{\pi}{3}$.

Ha x a második síknegyed belsejébe esik, akkor a szinusza pozitív, míg a kétszeresének a szinusza negatív, itt tehát nem kapunk megoldást.

Ha $x = \pi$, akkor $\sin \pi = 0$ és $\sin 2\pi = 0$, ez tehát megoldás.

Ha x a harmadik síknegyed belsejébe esik, akkor a szinusza negatív, míg a kétszeresének a szinusza pozitív, ezért itt nincs megoldás.

Végül ha $x = \frac{3\pi}{2}$, akkor a szinusza -1, míg a kétszeresének a szinusza 0, ez tehát nem megoldás.

8. Melyik összefüggés igaz az alábbiak közül?

A) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 3 < \operatorname{tg} 2$ *B)* $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3 < \operatorname{tg} 1$ *C)* $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3$
D) $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 3$ *E)* $\operatorname{tg} 3 < \operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 1$

Megoldás: *B)*

9. Van valós gyöke az alábbi egyenleteknek?

A) $\operatorname{tg} 2x = \frac{7}{2}$ *B)* $\sin^2 x = \frac{7}{2} + \cos^2 x$ *C)* $\sin x = \frac{7}{2}$ *D)* $\frac{7}{2\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$

Megoldás:

B)-nek és *C)*-nek nincs megoldása, mert $-1 \leq \sin x \leq 1$ és $\cos^2 x \leq 1$.

A)-nak van megoldása, mert a tangensfüggvény minden valós értéket felvesz. $x \approx 0{,}64 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

D) Ebben az egyenletben sem a $\operatorname{tg} x$, sem a $\operatorname{ctg} x$ nem lehet 0. Az egyenlet másképp: $\frac{7}{2}\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$, azaz $\frac{7}{2} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$. Tudjuk azonban, hogy $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, ezért az nem lehet $\frac{7}{2}$. Ennek az egyenletnek tehát nincs megoldása.

10. Ugyanabban a koordináta-rendszerben ábrázoltuk a valós számok halmazán értelmezett következő függvényeket. Észrevettük, hogy két függvény grafikonja egybeesett. Melyik kettő volt az?

$f\colon x \mapsto \frac{1}{2}\sin 2x \quad g\colon x \mapsto \sin x \quad h\colon x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Megoldás:

Mivel $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ minden valós x-re, tehát a g és a h grafikonja azonos.

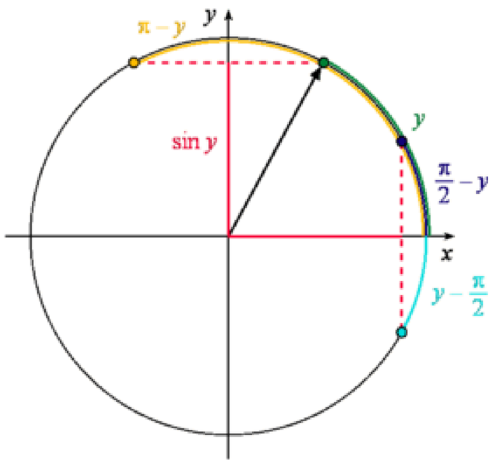
Megjegyzés. Azt azonnal ki tudjuk szúrni, hogy az f értékkészlete nem egyezik meg sem g-ével, sem h-éval, ám ez még nem jelenti azt, hogy g és h grafikonja megegyezik, ezt ellenőriznünk kell.

11. Az x mely valós értékeire teljesül a $\sin 3x = \cos 2x$ egyenlet?

Megoldás:

Ismeretes, hogy $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y + 2k\pi\right) = \cos\left(y - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

Ezt alkalmazhatjuk az egyenletre $y = 3x$ választással.



Ha tehát $y = 3x$, akkor az egyenlet: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi\right) = \cos 2x$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ebből

$\frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi = 2x$, azaz $5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, tehát $x = \frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10}(1 + 4k)$

vagy

$3x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 2x$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 4k)$ ($k \in \mathbf{Z}$).

12. Bizonyítsa be, hogy az x tetszőleges valós értéke mellett igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$-\frac{9}{4} \le \sin x - \cos^2 x - 1 \le 0!$$

Az x mely értékei mellett áll fent valamelyik egyenlőség?

Megoldás:

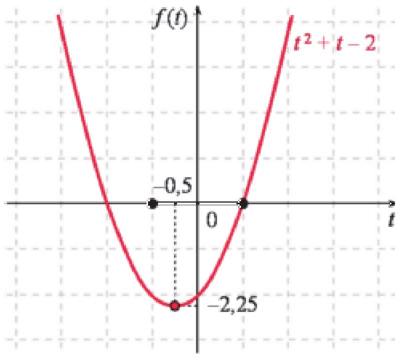
Keressük az $f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1$ függvény értékkészletét. Az értelmezési tartománya $x \in \mathbf{R}$.

Használjuk fel az ismert négyzetes összefüggést, amiből $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ezzel

$$f(x) = \sin x - 2 + \sin^2 x$$

vagy másképp $f(x) = \sin^2 x + \sin x - 2$. Vezessük be a $t = \sin x \in [-1; 1]$ helyettesítést. Ezzel a $g(t) = t^2 + t - 2$ függvény értékkészletét vizsgáljuk. A $g(t)$ függvény nullhelyeit a megoldóképletből határozhatjuk meg. $t_1 = -2$ és $t_2 = 1$, tehát $g(t) \le 0$, ha $-2 \le t \le 1$. Mivel a vizsgált intervallum, vagyis a $-1 \le t \le 1$ ebbe beleesik, így a $\sin^2 x + \sin x - 2 \le 0$ egyenlőtlenség minden valós x-re fennáll.

A függvény akkor veszi fel felveszi a 0-t, ha $t = 1$, vagyis $\sin x = 1$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



Ugyanezzel a helyettesítéssel vizsgáljuk most a $-\frac{9}{4} \le \sin^2 x + \sin x - 2$ egyenlőtlenséget, vagyis a $t = \sin x \in [-1; 1]$ helyettesítéssel kapott $g(t)$ függvényre a $-\frac{9}{4} \le t^2 + t - 2$ egyenlőtlenség teljesülését. A másodfokú kifejezést teljes négyzetté alakítva: $t^2 + t - 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \ge -\frac{9}{4}$

Tehát a $g(t)$ függvény minimuma $-\frac{9}{4}$, a minimum helye $t = -\frac{1}{2}$, ami azt jelenti, hogy $f(x)$ minimumértéke $-\frac{9}{4}$, minimumhelye $\sin x = -\frac{1}{2}$, azaz $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, illetve $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Beláttuk, hogy az $f(x) = \sin^2 x + \sin x - 2$ függvény maximum értéke a 0, minimum értéke $-\frac{9}{4}$ a valós számok halmazán, tehát az egyenlőtlenség igaz x minden valós értékére.

Feladatok

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - \sin|x|$$

Megoldás:

A szögfüggvények értelmezése alapján tudjuk, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ezt felhasználva az egyenlet bal oldala: $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$.

Tehát az egyenlet: $|\sin x| = 1 - \sin|x|$

Keressük a megoldást először a $[0; 2\pi]$ intervallumban. Itt a jobb oldal $1 - \sin x$, hiszen $x \geq 0$.

Ha $0 \leq x \leq \pi$, akkor a bal oldalon $|\sin x| = \sin x$, mert itt $\sin x \geq 0$.

Ha azonban $0 \leq x \leq \pi$, akkor $|\sin x| = -\sin x$, mert itt $\sin x \leq 0$.

Az első esetben az egyenlet $2\sin x = 1$, tehát $\sin x = \dfrac{1}{2}$, azaz $x = \dfrac{\pi}{6}$ vagy $\dfrac{5\pi}{6}$; a második esetben az egyenlet $-\sin x = 1 - \sin x$, ami nem ad megoldást.

Meg még kell keresnünk az összes megoldást a valós számok halmazán!

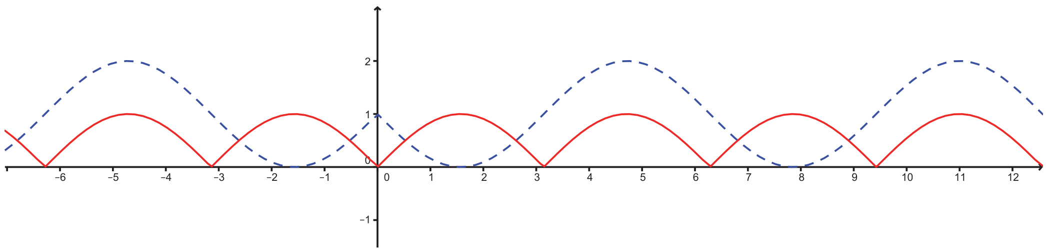
Ehhez érdemes felhasználni az egyenlet két oldalán szereplő függvények tulajdonságait, amelyeket a szinuszfüggvény alapján kikövetkeztethetünk.

Az abszolút érték miatt mind a két függvény páros. A $|\sin x|$ függvény periodikus π szerint, és bár a $\sin|x|$ függvény pozitív és negatív „ága" egyaránt mutat egy fajta periodicitást, azonban nem nevezhető periodikusnak.

A pozitív valós számok halmazán a $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ és a $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ alakú számokra teljesül az egyenlet, ahol k szigorúan nemnegatív, azaz $k \in \mathbf{N}$.

Ennek a megoldáshalmaznak a negatív értékeken vett tükörképe is megfelelő, hiszen mindkét függvény páros. Mindezek alapján a valós számok halmazán az összes megoldás: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{N}$.

Megjegyzés. A $|\sin x|$ függvény legkisebb pozitív periódusa egyébként π, de $1 - \sin|x|$ periódusa a pozitív és a negatív valós számokon 2π azzal az apró hibával, hogy nem periodikus. (Az y tengelyre szimmetrikus, hiszen páros, a periodicitás „megtörik" az y tengelyen.)



2. Oldja meg a $3 + 4\cos x + \cos 2x = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Tudjuk azt is, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Ezeket alkalmazva $\cos x$-re másodfokú egyenletet kapunk.

Az egyenlet rendezve: $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$.

Észrevehetjük, hogy a bal oldalon teljes négyzet áll, tehát $(\cos x + 1)^2 = 0$.

Ez akkor teljesül, ha $\cos x = -1$, azaz $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Tudjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Mennyi lehet $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$?

4. Rendezze növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\sin 3\pi; \quad \cos\frac{3\pi}{4}; \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right); \quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket:

a) $\sin x = \sin 2$ *b)* $\cos x < \sin x$ *c)* $\sin 2x = \sqrt{3}$
d) $\sin x + \cos x > 1$ *e)* $|\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x| \geq 2$

Megoldás:

a) $x = 2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ vagy $x = \pi - 2 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Egy perióduson belül $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

c) $\sin 2x \leq 1 < \sqrt{3}$ miatt nincs megoldása.

d) Egy perióduson belül keressük a megoldásokat.

Mivel a bal oldalon mindkét tag értéke legfeljebb 1, ezért elegendő azon az intervallumon keresni a megoldást, ahol mindkettő nemnegatív, azaz $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$-ben. Ezen az intervallumon négyzetre emeléssel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk: $(\sin x + \cos x)^2 > 1$. Felbontjuk a zárójelet, alkalmazzuk a négyzetes összefüggést: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x > 1$, azaz $2\sin x \cos x > 0$. Ez a vizsgált intervallum minden pontjában teljesül, tehát ez egyben az egyenlőtlenség megoldása.

e) Felhasználjuk, hogy $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Vezessük be a $t = |\operatorname{tg} x| > 0$ helyettesítést.

Így az egyenlőtlenség $t + \frac{1}{t} \geq 2$ alakú. Beszorzás és rendezés után kapjuk a következő másodfokú egyenlőtlenséget t-re: $t^2 - 2t + 1 \geq 0$. A bal oldalon teljes négyzet áll, $(t-1)^2 \geq 0$, ez pedig igaz t minden valós értékére. Az egyenlőség akkor áll fenn, amikor $t = 1$. Tehát az eredeti egyenlőtlenség az x minden olyan értékére fennáll, ahol értelmezve van. Mivel $|\operatorname{tg} x| = t > 0$ és $\frac{1}{t} = |\operatorname{ctg} x|$, ezért ki kell zárni a valós számok halmazából azokat a helyeket, ahol a $\operatorname{tg} x$ vagy a $\operatorname{ctg} x$ nincs értelmezve (egyszerre zárhatjuk ki a kettőt): $x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

6. Oldja meg grafikusan a $\lg x = \sin x$ egyenletet! Az n mely pozitív egész értékeire van gyöke az egyenletnek az $[n; n+1]$ intervallumon?

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza. Mivel $-1 \leq \sin x \leq 1$ és $\lg x \leq 1$, ha $0 < x \leq 10$, csak ezen az intervallumon találhatunk megoldást. A $\lg x$ függvény szigorúan monoton növekvő.

Az ábra segíthet megtalálni az n megfelelő értékeit. A $]0; 1[$ intervallumban biztosan nincs megoldás, hiszen itt $\lg x < 0$, míg $\sin x > 0$.

$n = 1$ esetén az $[1; 2]$ intervallumban: $\sin x > \lg x$, hiszen $\sin 2 \approx 0{,}9 > \lg 2 \approx 0{,}3$, tehát nincs megoldás.

$n = 2$ esetén a $[2; 3]$ intervallumban a szinuszfüggvény csökken, egy metszéspont van. (hiszen az intervallumban mindkét függvény monoton, az egyik nő, a másik csökken).

Mivel a $[3; 6]$ intervallumban a szinuszfüggvény negatív, a logaritmusfüggvény pozitív, az $n = 3$, 4 vagy 5 eseteket nem érdemes vizsgálni.

További metszéspontot a $[2\pi; 3\pi]$ intervallumban találhatunk, itt $\sin x \geq 0$ és $\lg x$ még nem éri el az 1-et. Keressük meg, hogy melyik intervallumba esik a két metszéspont. (Arra, hogy két metszéspont van, nemcsak a rajzból következtethetünk, hanem onnan is, hogy lesz olyan hely, ahol a szinuszfüggvény éppen 1, a logaritmusfüggvény pedig 1-nél kisebb lesz, vagyis a két görbének még két metszéspontja van.)

$n = 6$ esetén a $[6; 7]$ intervallumban a szinuszfüggvény növekedő. $\sin 6 < 0$, azonban $\sin 7 \approx 0{,}65 < \lg 7 \approx 0{,}84$ miatt itt sincs megoldás.

$n = 7$ esetén a $[7; 8]$ intervallumban a $\sin x$ eléri a maximumát, az 1-et $x = \dfrac{5\pi}{2} \approx 7{,}8$-nél, de a $\lg x$ még nem éri el az 1-et, tehát ebben az intervallumban van metszéspont. Mivel azonban $\sin 8(\approx 0{,}99) < \lg 8(\approx 0{,}90)$, a másik metszéspont nem lehet ebben az intervallumban, hanem:

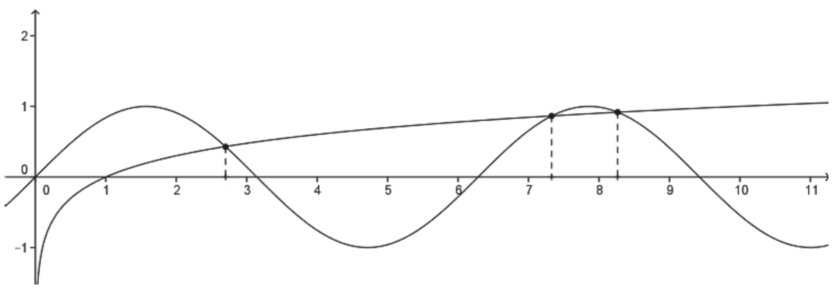
$n = 8$ esetén a $[8; 9]$ intervallumban a szinuszfüggvény csökken, és a határokon felvett függvényértékekre $\lg 8 \approx 0{,}9 < \sin 8 \approx 0{,}99$ és $\sin 9 \approx 0{,}41 < \lg 9 \approx 0{,}95$.

Tehát közben van metszéspont.

Tovább nem érdemes keresni, mert a $[9; 10]$ intervallumban a $\sin x$ csökken, a $\lg x$ növekszik.

Tehát a három metszéspont az $n = 2;\ 7;\ 8$ értékekre esnek az $[n; n + 1]$ intervallumokba.

Egy jó ábra megerősíti megfontolásainkat.



7. Az x mely valós értékeire igaz a $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ egyenlet?

Megoldás:

Vegyük észre, hogy mivel a jobb oldalon pozitív szám áll, ezért csak olyan megoldást keresünk, ahol $\sin x + \cos x > 0$.

Érdemes négyzetre emeléssel próbálkozni. Emeljük négyzetre a bal oldalt, és használjuk fel az ismert négyzetes összefüggést:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

Tehát az egyenlet a négyzetre emelés után $1 + \sin 2x = 2$, azaz $\sin 2x = 1$, $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tehát $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Mivel azonban páratlan k (tehát $k = 2l + 1$) esetén

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi + 2l\pi\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2l\pi\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

tehát nem megoldás, páros k esetén (vagyis ha $k = 2l$)

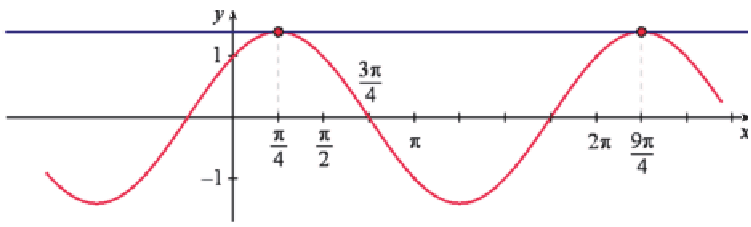
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

megoldás, így tehát a gyökök: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Másik megoldás.

Készítsünk ábrát!

Ábrázoltuk a $\sin x + \cos x$ függvényt és az $y = \sqrt{2}$ egyenest.



Behelyettesítéssel ellenőrizzük a leolvasott értékeket!

8. Melyek azok a valós x számok, amelyekre $\sin x$; $\sqrt{\cos x}$; $\operatorname{tg} x$ egy mértani sorozat egymás utáni tagjai?

Megoldás:

A mértani sorozat három egymást követő tagjára igaz, hogy a középső mértani közepe a szomszédos tagoknak. Írjuk fel ezt az összefüggést a feladatban szereplő értékekre. A $\sqrt{\sin x \cdot \operatorname{tg} x} = \sqrt{\cos x}$ egyenletet kapjuk.

A $\operatorname{tg} x$ értelmezési tartománya miatt kizárjuk a $\frac{\pi}{2}$ páratlan számú többszöröseit.

Vizsgáljuk meg, hogy a gyök alatti mennyiségek mikor nemnegatívak!

$\cos x \geq 0$, ha $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Ezen az intervallumon a bal oldali gyök alatti mennyiség is pozitív. Mindkét oldalt négyztere emeljük.

$$\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$$

Alkalmazzuk a $\operatorname{tg} x$ definicióját, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, ezért az egyenlet $\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x$.

Osztunk $\cos x$-szel (ami nem 0), és ezt kapjuk: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x = 1$, azaz $|\operatorname{tg} x| = 1$.

Ebből $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Mivel $\cos x > 0$, így a π-nek csak a páros többszöröseinél van megoldás.

Másik meggondolás:

$\sqrt{\cos x}$ miatt $\cos x \geq 0$, $\operatorname{tg} x$ értelmezése miatt $\cos x \neq 0$, tehát $\cos x > 0$.

Ha $\sin x = 0$, akkor – a feladat szerint – $\cos x$-nek is nullának kellene lennie, de ez kizárt, vagyis $\sin x \neq 0$.

Az első két tagból a kvóciens $\frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x}$, így $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x} \cdot \sqrt{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}$. Mivel azonban $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ minden valós x-re, ahol értelmezve van, ez csak úgy lehet, ha $\operatorname{tg} x = \pm 1$, azaz $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ a $\cos x > 0$ kikötés miatt.

2.9. Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

Mintapéldák

1. Hány olyan, legfeljebb 5-jegyű pozitív egész szám van, amely „tükörszám”, azaz visszafelé olvasva ugyanaz, mint az eredeti?

Megoldás:

9 darab egyjegyű, 9 kétjegyű, 90 háromjegyű, 90 négyjegyű, 900 ötjegyű van.

Összesen 1098.

2. *a)* Hány olyan háromjegyű szám van, amelyikben van 5-ös számjegy?

b) Hány olyan háromjegyű szám van, amelyikben pontosan egy ötös számjegy van?

Megoldás:

a) Érdemes először kiszámítani, hogy hány olyan háromjegyű szám van, amelyben nincs 5-ös számjegy. Ezek száma $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Mivel 900 háromjegyű szám van, ezért $900 - 648 = 252$ olyan háromjegyű szám van, amelyben van 5-ös számjegy.

b) Pontosan egy 5-ös számjegyet tartalmaz 225 háromjegyű szám.

2. 20 különböző magasságú embert véletlenszerűen 2 egyenlő csoportba osztunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két legmagasabb ember ugyanabba a csoportba kerül?

Első megoldás:

A legmagasabb embernek 9 társa van, ezeket $\binom{19}{9}$-féleképpen választhatjuk ki a többiek közül. Ha vele van a második legmagasabb is, akkor már csak $\binom{18}{8}$-féleképpen választhatjuk ki a többieket. Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{18}{8}}{\binom{19}{9}} = \frac{\frac{18!}{8! \cdot 10!}}{\frac{19!}{9! \cdot 10!}} = \frac{9}{19}.$$

Második megoldás:

Rakjuk sorba az embereket! Első helyre kerüljön a legmagasabb, utána legyenek véletlenszerűen! Az első 10 fogja alkotni az egyik csoportot, a második 10 a másikat. A második legmagasabb ember 19 helyre kerülhet, ebből az első 9 a megfelelő, ezért $\frac{9}{19}$ a keresett valószínűség.

Harmadik megoldás:

20 embert $\dfrac{\binom{20}{10}}{2}$-féleképpen oszthatunk két csoportba, hiszen $\binom{20}{10}$-féleképpen választható ki egy csoport, de mindegy, hogy ezt a 10-et vagy a maradék 10-et választjuk ki, ugyanahhoz a beosztáshoz jutunk. Ha a két legmagasabb egy csoportban van, akkor a másik csoportot $\binom{18}{10}$-féleképpen választhatjuk ki, tehát a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{18}{10}}{\frac{\binom{20}{10}}{2}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{19}.$$

3. Két dobókockát egyszer feldobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott számok átlaga egész szám?

Megoldás:

A dobott számok átlaga akkor egész, ha a számok összege páros. Pozitív egész számok összege akkor páros, ha a számok azonos paritásúak. Akármit is dobunk az első kockán, mivel a másik kockán ugyannyi a páros szám, mint a páratlan szám, ezért $\frac{1}{2}$ eséllyel lesz a második kockán ugyanolyan paritású szám. Tehát a keresett valószínűség: $\frac{1}{2}$.

4. Péter és Tamás kézilabdások, szorgalmasan gyakorolják a góllövést. Hogy ne legyen unalmas a gyakorlás, versenyeznek egymással. Péter általában a jobb góllövő, az eddigi tapasztalatok alapján 0,6 valószínűséggel talál be a hálóba, míg Tamás 50% valószínűséggel. Egy játszmában mindegyikük egyszer dob. Megállapodnak a dobások sorrendjében: először Péter, aztán Tamás dob. Péter nyer, ha ő talál be és Tamás nem, illetve Tamás nyer, ha ő talál és Péter nem. Minden más esetben döntetlen az eredmény. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két egymást követő játszma egyikében Péter nyer és a másikban az eredmény döntetlen?

Megoldás:

Döntetlen kétféleképpen lehet: vagy mindketten gólt lőnek, vagy egyikük sem talál be.

Ennek a valószínűsége: $0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}5$.

Péter nyer, ha az egyik dobásnál gólt lő és ugyanakkor Tamás nem, ennek $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$ a valószínűsége.

A feladatban vizsgált esemény kétféleképpen következhet be: vagy először nyer Péter és a második döntetlen, vagy fordítva. Ennek a valószínűsége:

$$0{,}30 \cdot 0{,}50 + 0{,}50 \cdot 0{,}30 = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3.$$

Szóba jöhető egyéb események és valószínűségeik:

két döntetlen: 0,25

az egyik döntetlen, a másikban Tamás nyer: 0,2

kétszer nyer Péter: 0,09

kétszer nyer Tamás: 0,04

egyikben nyer Péter, a másikban nyer Tamás: 0,12

Ellenőrzésképpen a valószínűségek összege:

$$0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}12 = 1.$$

5. Öt cédulára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, majd az összekevert cédulákat véletlenszerűen egymás mögé téve egy ötjegyű számot kaptunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható 6-tal?

Megoldás:

Az 5 különböző szám összes lehetséges sorrendje, vagyis az 5 szám összes permutációinak száma 5!.

A 6-tal akkor és csak akkor osztható egy szám, ha 2-vel és 3-mal is osztható.

A 3-mal akkor osztható egy szám, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.

A megadott öt szám összege független a számok sorrendjétől, mindig 15, tehát 3-mal mindegyik szám osztható. Ezért a kapott számok közül a párosokat kell összeszámolnunk.

Akkor kapunk páros számot, ha 2-re vagy 4-re végződik, a többi számjegy sorrendjétől függetlenül.

Bármelyik számot is választjuk utolsó számjegynek, ilyen szám mindig ugyanannyi lesz, mint amennyi a többi 4 számjegy összes lehetséges sorrendje (4!). Az 5 különböző lehetséges végződés közül 2 felel meg a feltételeknek.

Tehát a keresett valószínűség $\frac{2}{5}$.

Ugyanezt kapjuk, ha felírjuk, hogy az összes előállított szám közül mennyi a párosok aránya:

$$\frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes esetek}} = \frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2 \cdot 4!}{5 \cdot 4!} = \frac{2}{5}$$

6. Egy dobozban 5 piros és 8 kék golyó van. Három golyót véletlenszerűen kiveszünk a dobozból. Legalább és legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a negyedik húzásra piros golyót húzunk?

Megoldás:

Gondolkozhatunk úgy, hogy annál nagyobb az esély arra, hogy a negyedik dobásra pirosat húzunk, minél kevesebb pirosat húztunk ki az első három húzásban. Hasonlóképpen annál kisebb az esélye annak, hogy a negyedikre pirosat húzunk, minél több pirosat húztunk ki az első három esetben.

A legkisebb a valószínűsége annak, hogy a negyedikre pirosat húzunk, ha az első három húzás mindegyike piros volt, illetve a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy a negyedikre pirosat húzunk, ha az első három húzás egyike sem volt piros.

Annak a valószínűsége, hogy három piros húzása után a negyedik is piros $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, mert a három piros húzása után összesen 10 golyó marad, 2 piros és 8 kék.

Annak valószínűsége, hogy három kék húzása után a negyedik piros $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, mert a három kék húzása után összesen 10 golyó marad, 5 piros és 5 kék.

Tehát annak a valószínűsége, hogy negyedikre piros golyót húzunk, legalább $\frac{1}{5}$ és legfeljebb $\frac{1}{2}$,

7. Egy kockát kétszer feldobunk. Melyik valószínűbb: az, hogy a dobott számok összege páros, vagy pedig az, hogy ez az összeg páratlan?

Megoldás:

A két dobás összege páros, ha a dobott számok paritása megegyezik és páratlan, ha a dobott számok paritása különböző.

Bármit is dobtunk először, a második dobás az elsőhöz képest egyforma eséllyel lehet azonos vagy különböző paritású szám, hiszen 1-től 6-ig egyformán három-három páros, illetve páratlan szám van. (Szabályos dobókockán bármelyik dobásnak egyenlő esélye van.) Tehát a két eset egyforma valószínűségű.

Másik megoldás:

Természetesen gondolkozhatunk úgy is, hogy felsoroljuk az összes lehetséges dobást. Használhatunk például táblázatot:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Összesen 36 egyenlően valószínű kimenetele lehet a kocka kétszeri dobásának. Ezek között éppen 18 esetben lesz páros és 18 esetben páratlan az összeg.

Tehát a páros és páratlan összegek valószínűsége egyformán $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy bár a kocka kétszeri dobásával kapott összeg 11-féle szám lehet (2-től 12-ig), mégis 36 az összes lehetőségek száma. A 11 összeg nem egyformán valószínű, például ezek valószínűsége is leolvasható a táblázatból.

8. Két iskola sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli mérkőzéseket bonyolították le, ez összesen 66 mérkőzés volt. Az egész körmérkőzés 136 játszmából állt. Hány versenyző indult az egyik és hány a másik iskolából?

Megoldás:

Az egyik iskola versenyzőinek száma a, a másiké b. Az egy iskolán belüli mérkőzések száma annyi, ahányféleképpen a versenyzők közül párokat tudunk kiválasztani. Az összes játszma száma az összes versenyző közül kiválasztható párok számával egyenlő.

Ismeretes, hogy n különböző elem közül kiválasztható párok száma $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Az adatok alapján két egyenletet írhatunk fel.

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = 66$$
$$\binom{a+b}{2} = 136$$

A binomiális együtthatók képletét behelyettesítve és rendezés után a két egyenlet a következő:

$$a^2 - a + b^2 - b = 132$$
$$(a+b)^2 - (a+b) = 272$$

A második egyenletben vezessünk be új ismeretlent, legyen $x = a + b > 0$, így az egyenlet: $x^2 - x - 272 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei $x_1 = 17$, a másik gyök negatív szám, nem felel meg a szövegnek.

Az $a + b = 17$ egyenletből kifejezve például a-t, és behelyettesítve az első egyenletbe, a $b^2 - 17b + 70 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek gyökei: 7 és 10, egyik az a, másik a b értéke. Felcserélve is megfelelő, mert ezek szerepe szimmetrikus, tehát az egyik iskola versenyzőinek száma 7, a másiké 10, és ezek megfelelnek a szöveg feltételeinek.

Másik megoldás:

Az összes játszmát két csoportra oszthatjuk, az egyik az egy iskolán belüli játszmák száma, a másik a két iskola egymás elleni játszmáinak száma. Ez utóbbi $136 - 66 = 70$.

Ha az egyik iskolai versenyzőinek száma x, a másiké y, akkor az egymással lejátszott mérkőzések száma $xy = 70$. Felhasználva, hogy x és y pozitív egész számok, a következő számpárok jöhetnek szóba:

$$(1; 70), \quad (2; 35), \quad (5; 14), \quad (7; 10).$$

Ezekre a másik feltételt kipróbálva csak a $(7; 10)$ felel meg.

Feladatok

1. Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után, a dobott számokat leírva így egy háromjegyű számot kapunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám 250-nél nagyobb és 260-nál kisebb?

Megoldás:

Összesen 6^3-féle szám keletkezhet (egyenlő eséllyel), ezek közül 6 a kedvező esetek száma, tehát a valószínűség $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

2. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyeket véletlenszerűen sorba állítjuk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy néggyel osztható, hétjegyű számot kapunk? (A szám nem kezdődhet nullával.)

Megoldás:

A hét számjegyből összesen $6 \cdot 6!$ hétjegyű szám készíthető. Azokat a számokat, amelyek 4-gyel oszthatóak – az oszthatósági szabály szerint – meghatározza az utolsó két számjegyük, amely a következő lehet: 04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52, 56, 60, 64. Ezeket két csoportba osztjuk. Ha az utolsó két számjegy valamelyike 0, akkor ilyen végű hétjegyű szám $5!$ darab van. Ha nincs az utolsó két számjegy között 0, akkor az adott végződésű hétjegyű számok száma $4 \cdot 4!$. Ezek szerint az adott számjegyekből $4 \cdot 5! + 8 \cdot 4 \cdot 4! = 52 \cdot 4!$ darab 4-gyel osztható szám készülhet. Így a valószínűség $\frac{52 \cdot 4!}{7!} = \frac{26}{105} \approx 0{,}247$.

3. *a)* Egy szabályos háromszög mindegyik csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. A hangyák egyenlő valószínűséggel választják az oldalakat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén?

b) Egy tetraéder minden csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott élen, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. A hangyák egyenlő valószínűséggel választják az éleket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén.

Megoldás:

a) Egyszerűbb azt kiszámítani, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy nem találkoznak sem útközben, sem a csúcsokban. Jelölje a háromszög csúcsait A, B, C. Az A csúcsból induló hangya kétfelé mehet. Ha a B csúcsba megy, akkor az onnan induló hangya a C csúcsba mehet, és a harmadik hangya útiránya már egyértelmű. Tehát 2 lehetőség van arra, hogy a hangyák ne találkozzanak egymással. Az összes útvonal-lehetőség $2^3 = 8$, így a keresett valószínűség $1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

b) Egyszerűbb azt kiszámítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy nem találkoznak sem útközben, sem a csúcsokban. Jelölje a tetraéder csúcsait A, B, C, és D. Az A csúcsból induló hangya háromfelé mehet. Ha a B csúcsba megy, akkor az onnan induló hangya a C vagy a D csúcsba mehet, és a többi hangya útiránya már egyértelmű. Tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van arra, hogy a hangyák ne találkozzanak egymással. Az összes útvonal-lehetőség $3^4 = 81$, így a keresett valószínűség $1 - \frac{6}{81} = \frac{75}{81} \approx 0{,}9259$.