

Korszerű IKT-módszerek és eszközök a XXI. századi matematikaoktatásban

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	2
2. Számítógépek a matematikaoktatásban.....	2
3. A Geogebra és a Geomatech Projekt	8
4. Interaktív tábla, interaktív matematika.....	13
5. A mobil eszközök alkalmazásának lehetőségei	18
6. A vizualitás lehetőségei a matematika tanításában	22
7. Összegzés	27
Irodalom:	29
Ábrajegyzék:	31

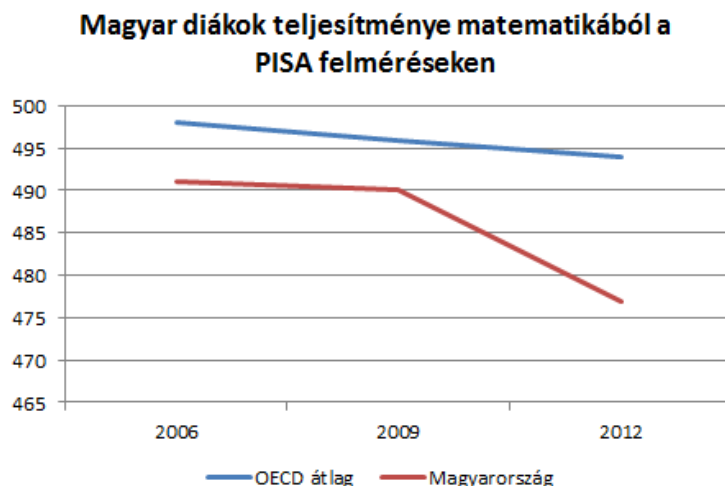
1. Bevezetés

Az előző kötet megjelenése óta (2003) jelentős hangsúly eltolódások történtek a számítógéppel segített tanulás és az IKT iskolai alkalmazásának területén. A multimédiás (és nem-multimédiás) tartalmú oktatási anyagokat tartalmazó CD-ROM-ok szinte teljesen eltűntek (nem feltétlenül elavultak!), és helyettük az internet került előtérbe, akár információ- és tananyagforrásként, akár mint a kommunikáció színtere. A mobil eszközök (okostelefonok, tabletek, elektronikus könyvolvasók, mobil internet) többnyire még nem is léteztek, vagy nagyon gyerekcipőben jártak a 2000-es évek elején, azóta azonban a mindennapok szerves részeivé váltak a tanulók körében, vagy akár iskolai környezetben is.

Ebben a fejezetben áttekintjük, hogy az említett változásokat figyelembe véve hogyan alkalmazhatók a korszerű IKT-eszközök a matematikaoktatásban, és milyen új módszereket használhatnak a matematika tanárok az oktatás érdekesebbé és hatékonyabbá tételében a közoktatás teljes spektrumában.

2. Számítógépek a matematikaoktatásban

A számítógépek az oktatás területén elsőként a matematika órákon jelentek meg az 1980-as évek elején, és sokáig a matematika tanárokkal szembeni elvárás volt a számítógépek használata, mivel ez akkoriban leginkább a matematikai (számítási) célokra írt programok készítését jelentette. A multimédiás eszközök, majd ezt követően az internet megjelenése és elterjedése gyökeresen megváltoztatta ezt a helyzetet, és napjainkra háttérbe szorulni látszik a matematikatanárok efféle szerepvállalása. Ez nem is akkora gond, szemben azzal, hogy a számítógépek (és velük együtt a korszerűnek számító új módszerek) kevésbé vannak jelen a matematika órákon, a matematikaoktatásban. A magyar diákok eredménye látványosan romlik matematikából a nemzetközi méréseken (lásd PISA mérések eredményeiről szóló beszámoló).



1. ábra A magyar diákok eredményei matematikából a 2006-2012 közötti PISA felméréseken

Lannert Judit oktatáskutató véleménye szerint

„Nem arra van szükség, hogy fegyelmezetten bemagolják a 19-20. század tudáskánonját, hanem arra, hogy értsék és 21. századi módon tudják alkalmazni a tanultakat. Az adatok alapján úgy tűnik, hogy nem több kötelező tananyagra van szükség és vasfegyelemre, hanem több időre a kreativitás és gondolkodás fejlesztésére, és motiváltabb, felkészültebb tanárookra.” (Lannert, 2014)

A 2012-es PISA felmérés fókuszában az alkalmazott matematikai képességek vizsgálata állt. Az eredményeket ismertető magyar kötetben (Balázi és munkatársai, 2013) részletesen olvashatunk arról is, milyen alapvető képességeket vizsgálnak, illetve várnak el a mérésben résztvevő 15 éves diákoktól. A felmérésben (PISA 2012) használt 7 alapvető képesség a következő:

- kommunikáció,
- matematizálás (részei: a megfogalmazás és értelmezés),
- ábrázolás,
- indoklás és érvelés,
- a stratégia kidolgozása,
- a szimbolikus, formális és szaknyelv és műveletek alkalmazása
- a matematikai eszközök alkalmazása.

Ha végig gondoljuk a felsorolt képességeket, legalább kettő (az ábrázolás és a matematikai eszközök alkalmazása) szoros összefüggésben van a digitális eszközök használatával (lásd id. mű, 19-20. old.).

A fentiek alapján meggyőződésünk, hogy a korszerű oktatásinformatikai módszerek nem csupán hozzásegíthetnek ahhoz, hogy a pedagógusok megkedveltessék és élvezetesebbé tegyék a matematikát a diákok számára, ezzel megalapozzák a későbbi jobb eredmények elérését, hanem ezek alkalmazása már elvárás napjainkban.

Ezek után vizsgáljuk meg, mi lehet az IKT eszközök szerepe a matematika tantárgy tanításában?

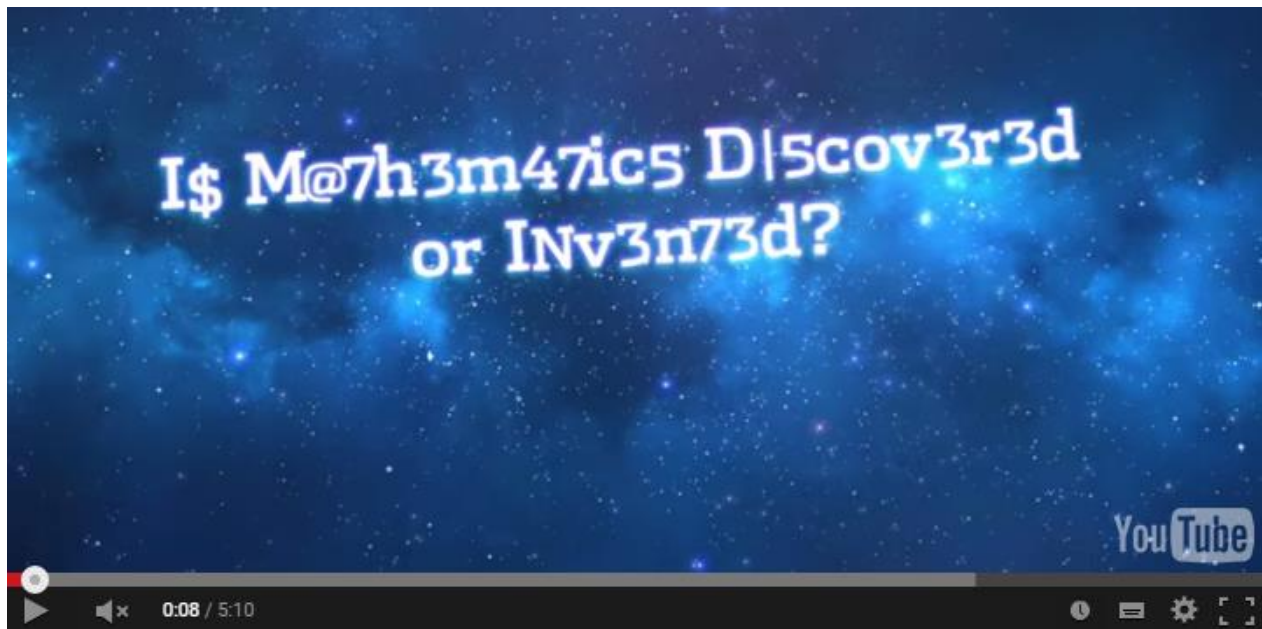
- a tanulók motiválása
- a matematikai iránti érdeklődés felkeltése
- a matematikai tartalmak vizualizációja
- a tanulók közötti kollaboráció támogatása, ehhez felület és eszközök biztosítása.

A *tanulók motiválása* az egész oktatási rendszer egyik legkritikusabb kérdésévé vált napjainkban. A különböző generációs elméletek mítoszait lehántva szembe kell néznünk a diákokkal kapcsolatos néhány fontos tényezővel. A diákok motivációja a matematikatanulással szemben alacsony, kevésbé tartják fontosnak a matematikát. Tartalomfogyasztásukat a képi és mozgóképi információk uralják, valószínűsíthetően kevesebbet olvasnak a korábbiaknál, mindez problémákat okozhat a feladatok szövegének megértésénél, értelmezésénél. Ebből következően nehezebb a szokásos módszerekkel felkelteni az érdeklődésüket, koncentráció képességük rövidebb időtartamra terjed ki. A matematikai feladatok, problémák megoldása olyan absztrakt gondolkodást és elmélyülést igényel, amelynek kifejlesztése csak a kisiskolás kortól végzett folyamatos munka eredményeképpen állhat elő.

A matematika iránti érdeklődés felkeltése elengedhetetlen alapfeltétele az eredményes oktatásnak. Szerencsére napjainkban az online források révén nagy mennyiségű olyan anyagot találhatunk, amely alkalmas lehet erre a célra. Nézzünk néhány példát!

Idősebb és komolyabb érdeklődésű diákoknál felvethető az a kérdés is, hogy vajon a matematikát felfedezik vagy feltalálják? Ezt a témát dolgozza fel Jeff Dekovsky videója. (<http://ed.ted.com/lessons/is-math-discovered-or-invented-jeff-dekofsky>), a mélyebben érdeklődőknek Reuben Hersch művét ajánlhatjuk (Hersch, 2000, 77-80. old).







Jelenleg 37 ilyen és ehhez hasonló matematikai témájú videót találhatunk összegyűjtve a TED-Ed Youtube csatornán¹, a Math in Real Life (Matematika a hétköznapi életben) sorozatban. A videók nyelve angol, de egy részük magyar felirattal is rendelkezik. A videók mindegyike egy hétköznapi problémát és a mögötte rejlő matematikát mutatja be, a diákok számára egyszerű és jól érthető illusztrációkkal és szöveggel. Néhány példa a címekből: A zene és a matematika: Beethoven géniusza; a „Végtelen Hotel” paradoxon; a Pi végtelen élete; Mi az az algoritmus?; az online randizás matematikája; Zénon paradoxonjai és mások).



2. ábra A matematikát felfedezik vagy feltalálják? (Forrás: <http://ed.ted.com/lessons/is-math-discovered-or-invented-jeff-dekofsky>)

Egy másik érdekes videó gyűjteményt találunk www.thirtee.org/get-the-math/ weboldalon. Az oldal szerzői azt szeretnék bemutatni (elsősorban középiskolások számára), hogyan használják a profik a mindennapi munkájukban a matematikát az élet legkülönbözőbb területein (a zenészek, a divattervezők vagy éppen a kosárlabda játékosok). Az egyes videókhoz különböző feladatok is kapcsolódnak, amit a diákoknak a megszerzett információk alapján kell megoldaniuk.

¹ Címe: <http://ed.ted.com/series#math-in-real-life>

<h3>Math in Music</h3> <p>Find out how musicians like the hip-hop duo, DobleFlo, use math in music production.</p>  <p>Play Now</p>	<h3>Math in Fashion</h3> <p>See how designers like Chloe Dao use math to create fashion that's stylish AND affordable.</p>  <p>Play Now</p>	<h3>Math in Videogames</h3> <p>Get an inside look at the math used by videogame designers like Julia Detar of Arkadium.</p>  <p>Play Now</p>
<h3>Math in Restaurants</h3> <p>Learn how chef Sue Torres uses math to set prices at her restaurant, Sueños.</p> 	<h3>Math in Basketball</h3> <p>Check out the math behind the perfect free-throw shot with NBA player Elton Brand.</p> 	<h3>Math in Special Effects</h3> <p>See how Jeremy Chernick uses math to create explosions at J&M Special Effects.</p> 

3. ábra Matematika körülöttünk, avagy hogyan használják a „profik”?

A fenti videó példák közelebb hozhatják a sokak által teljesen elméletinek (és ezáltal feleslegesnek is tartott) matematikát a hétköznapi alkalmazásokhoz, és olyan kapcsolódási pontokra mutathatnak rá, amelyekre nem is gondoltak volna sem a diákok, sem a tanárok. Feladatként adható, hogy gyűjtsenek össze minél több ilyen, esetleg készítsenek róla hasonló, problémafelvetéseket és megoldásokat is tartalmazó videót.

Hasonló hétköznapi matematikához kapcsolódó projekteket gyűjtenek össze a YummyMath (<http://www.yummymath.com>) weboldalon is. Itt jelenleg 350-nél több ötlet és megvalósítási javaslat, példa és segédanyag található (az utóbbiak eléréséhez egy minimális költségű regisztráció szükséges).

Az általános, hétköznapi alkalmazás során felmerülő kérdéseken kívül konkrét szórakoztató formában felvetett problémákat is bemutatunk. Ilyen például a „végtelen csokoládé” [rejtélye](#). Ennél a feladatnál egy csokoládét szeletelünk és rendezünk át úgy, hogy minden

műveletsor végén marad egy kocka, ami nyilván lehetetlen, ám vizuálisan teljesen hihetőnek tűnik.

Hasonlóan érdekesek lehetnek az egyszerűen megfogalmazott, „hétköznapiak tűnő”, de meglepő válaszokat produkáló kérdésfelvetések. Ilyenek például a következők:

Hányszor tudunk összehajtani egy tetszőlegesen nagyméretű és tetszőlegesen vékony papírlapot? (A diákok először kísérletezhetnek A4-es méretű lapon, majd nagyobb méretű csomagoló papírral, aztán keresgélhetnek megoldást az interneten, majd jöhet a matematika... - az összehajtott papír vastagsága exponenciálisan növekedik, a jól ismert sakktáblára rakott búzaszemek számához hasonlóan.)

Át tudsz-e bújni egy névjegykártyán? (A névjegykártya olló segítségével „alakítható”, de a megoldáshoz ötlet kell, hogyan tudjuk úgy bevágni, hogy minél nagyobb méretű rés keletkezzen szétesés nélkül.)

Találja ki, melyik számra gondoltam? A játékban a tanár arra kéri a diákokat, hogy gondoljanak egy számra, végezzenek el vele általa megadott műveleteket, majd a végeredmény közlése után a tanár kitalálja, mi volt a gondolt szám. (Egy lehetséges előírás például a következő: „*Gondoljon egy tetszőleges nagyságú pozitív egész számra. Szorozza meg kettővel! Adjon hozzá 4-et! A kapott eredményt szorozza meg 5-tel! Vonjon ki 7-et! Mondja meg a végeredményt!*” Az eredményt a tanuló által mondott szám utolsó számjegyének elhagyása után, a kapott számból egyet kivonva „kitalálhatjuk”. A módszer tetszőleges nagyságú számra működik, így ha a diákok elég nagy számra gondoltak, igen meglepő lehet, ha rávágjuk az eredményt! Pár játék után természetesen az a cél, hogy találják ki, hogyan tudjuk ezt megtenni (Varga Tamás, 1999).

A természeti jelenségek is számos ilyen és hasonló kérdésekre hívhatják fel a figyelmünket. Például: **Miért éppen hatszögletű a méhsejt?** (Némi gondolkodást követően az internetes keresés eredményeképpen több cikket is találhatnak a diákok a téma matematikához kapcsolódó hátteréről, például Csákány Béla írását (Csákány, 2010), illetve az erről szóló TED-videóhoz is eljuthatnak (forrás: <http://ed.ted.com/lessons/why-do-honeybees-love-hexagons-zack-patterson-and-andy-peterson>).



4. ábra Miért szeretik a méhek a hatszögeket? (TED-Ed-videó)

Számos hasznos és érdekes, motiválónak szánt matematikához kapcsolódó ötlet található a Prievara Tibor és Nádori Gergely által szerkesztett Tanárblog oldalain (<http://www.tanarlog.hu>).

A bemutatott (és ehhez hasonló) példák mindegyike alkalmas lehet arra, hogy felkeltse a diákok érdeklődését és a megoldás keresésére motiválja őket.

A fenti példák szorosan kapcsolódnak a következő tényezőhöz, ami *a matematikai fogalmak, jelenségek és problémák* (netán azok megoldásának) *vizuális megjelenítése*. Ezzel a témával a későbbiekben részletesen foglalkozunk. Itt csupán egy remek magyar kezdeményezést mutatnánk be, ez pedig a **Videotanár** weboldal². Az oldal készítőinek öndefiníciója szerint:

„A Videotanár.hu a legmodernebb közvetítő csatornát, az internetet használja az iskolai tudás megosztására, az iskolai tanulás támogatására. Hasznos az iskolás kamaszok önképzése, korrepetálása során, hiszen bármikor elérhető, ellenőrzött tudásbázist jelent, amely segít az elfelejtett dolgok átismétlésében, az önképzésben.

A kezdeményezés célja, hogy a magyar Nemzeti Alaptanterv általános iskolai felső tagozatos tananyagának egészét digitalizálja oktatóvideók formájában. A videók elkészítésébe önkéntesen jelentkező tanárokat von be, és ezzel közösségi tudássá teszi a legkiválóbb pedagógusok ismereteit, módszereit.”

Az oldalon már most is sok videó megtalálható a felső tagozatos anyagból, és számuk folyamatosan gyarapodik. Mindenképpen figyelemre méltó kezdeményezés és nagyon fontos szempont, hogy magyar nyelven, a NAT követelményeinek megfelelő anyagokkal szolgál.

² Az oldal címe: <http://videotanar.hu>

A szorzást kezdhethetjük a legkisebb helyi értéken álló számmal is, de figyeljünk a részletszorzatok írásánál!
Kezdjük az egyessel!

		1	2	5	6			2	
		7	5	3	6			← 1256 · 6	
	2	5	1	2				← 1256 · 20	
	3	2	6	5	6				

Összesen 32656 Ft-ot fizettek a vonatjegyekért.

3:46 / 10:26

5. ábra Szorzás többjegyű számokkal a videotanar-on.

Nagyon fontos a negyedik szempont is: *a tanulók közötti kollaboráció támogatása, ehhez felület és eszközök biztosítása*. Korunkban rendkívüli módon felértékelődött annak a szerepe, miként tudnak a munkavállalók együttműködni, meghatározott feladatok megoldásán csapatban dolgozni. Ezt a kompetenciát már az iskolai évek alatt meg kell szerezni a diákoknak, és ezt minden tárgyban támogatni kell. A korszerű web2-es eszközök és a mobil IKT-eszközök széles spektrumon támogatják a kollaboratív tevékenységeket, így most a kutatókon a sor, hogy az ehhez illő feladatokat és munkaformákat kimunkálják, valamint a tanárokon, hogy ezeket a gyakorlatban kipróbálják és alkalmazzák.

Számos olyan témakört lehet kitalálni, amit nem csupán tanórai keretben dolgozható fel, hanem kollaboratív, csoportos projektként. Sőt, kutatási tapasztalatok azt igazolják, hogy a konstruktív elveken alapuló valódi kollaboratív együttműködések leginkább a tanórai kötöttségektől mentes, hosszabb távú projektek keretében jól kivitelezhetőek (Turcsányiné, 2005).

Ezen a területen még számos kérdés merül fel (például az optimális csoportméret, a csoportok kialakítása, a megfelelő tanulási célok kiválasztása és mások). Ezzel kapcsolatos kutatásokat számos helyen folytatnak jelenleg is.

3. A Geogebra és a Geomatech Projekt

A Geogebra egy olyan „dinamikus matematika szoftver”, amely a matematika számos területét egyesíti egy tanárok és diákok által egyaránt könnyen kezelhető felületen. Szerzője az osztrák Marcus Hohenwarter. A szoftver jól alkalmazható a geometria, az algebra, az analízis, a statisztika és a táblázatkezelés tanításában egyaránt. A program számos platformon (Windows,

Linux, Mac OSX, Chrome App, Android, iOS) és sok nyelven használható, ingyenesen letölthető a <https://www.geogebra.org/download> weboldalról. A program telepítéséhez Java futtató környezetre van szükségünk Windows operációs rendszer használata esetén.

„A GeoGebra egy dinamikus szerkesztő rendszer, ami azt jelenti, hogy a felhasználó a programmal egy virtuális szerkesztőkészletet kap, amelynek segítségével elkészítheti a középiskolai szerkesztések bármelyikét. A papíron végzett szerkesztésektől eltérően a kiinduló objektumok (pontok, egyenesek...) a szoftverben szabadon mozgathatók, miközben a tőlük függő objektumok a geometriai kapcsolatok alapján velük együtt mozognak.” (Papp-Varga, 2010. 6. old.)

Algebrai szempontból pedig egy olyan rendszer, ahol az egyes objektumokat az őket leíró, jellemző tulajdonságaikkal adhatjuk meg (vagyis például függvényeket a képletükkel, egyeneseket az azokat leíró egyenletekkel stb.).

A Geogebra használatához nagyon sok segédanyagot találhatunk az interneten is, magyar és idegen nyelven egyaránt. Ezek egyik legalapvetőbb gyűjtőhelye a GeogebraTube. Számos diplomamunka dolgozza fel a Geogebra iskolai alkalmazását az oktatás különböző szintjein (általános és középiskolások körében).

A Geogebra közösség 2007 végén létrehozta az International GeoGebra Institute-ot (Nemzetközi Geogebra Intézet), amelynek webcíme <http://www.geogebra.org/IGI>. Az intézet három fő célkitűzése: tanár továbbképzések szervezése és folyamatos segítségnyújtás tanárok részére, segédanyagok fejlesztése és szoftverfejlesztés, valamint módszertani kutatások megtervezése és koordinálása. Ennek mintájára alakultak meg hazai intézményekben is a Geogebra Intézetek (<http://community.geogebra.org/hu/a-csapat/>).

A Geomatech Projekt

A Geogebra program használatára épül az elmúlt évek legjelentősebb matematika oktatási fejlesztése, a 2014-ben megkezdett Geomatech Projekt.

A projekt célját az alábbiakban határozták meg az alapítók:

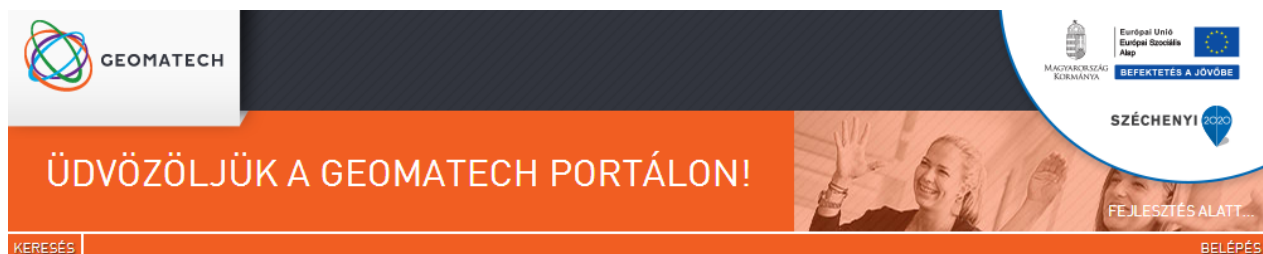
„GEOMATECH névre hallgató kezdeményezés célja, hogy a közoktatásban résztvevő diákok megszeressék a matematikát és a természettudományos tárgyakat, motiváltabbak legyenek e tárgyak tanulása során, és nagyobb arányban tanuljanak tovább matematikai, természettudományos, műszaki és informatikai területeken.

A GEOMATECH projekt keretében, a matematika és természettudományos tárgyak oktatására létrehozott, az oktatás hatékonyságát javító, az órák játékosságát és élményszerűségét növelő digitális tananyagegységek aktívan hozzájárulhatnak majd ahhoz, hogy a hazai diákok a jövőben nemzetközi összehasonlításban is javuló tesztteredményeket mutassanak fel az érintett területeken. A GEOMATECH projekt a tananyagok oktatásban való alkalmazására több ezer általános- és középiskolai pedagógust tervez kiképezni, továbbá az elkészült oktatási anyagokhoz ingyenes online hozzáférést biztosít valamennyi érdeklődő számára.

A programban dolgozó hazai és nemzetközi szakemberek a korszerű, nemzetközi kutatási módszertanokon alapuló, de a Nemzeti alaptanterv elvárásainak megfelelő digitális

tananyagokat a világ egyik legismertebb matematikai-természettudományos szoftvere, a GeoGebra segítségével jelenítik meg.” (Forrás: <http://geomatech.hu/rolunk>)

A Projekt weboldalán a **Tanároknak** fül alatt találják a letölthető tananyagok gyűjteményét, amely matematikából az 1-12. osztályok anyagát öleli át.



ÉVFOLYAM/TANTÁRGY	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Matematika	7	14	23	24	20	14	45	23	48	27	57	13

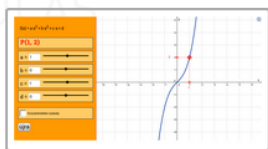
6. ábra A jelenleg rendelkezésre álló Geomatech tananyagok száma évfolyamonként

Az egyes tananyagok lektorálva kerülnek fel a weboldalra, és minden tananyag mellett megtalálhatók a keresést és felhasználást támogató metaadatok is, mint például a tartalmat leíró címkék és az ajánlott célcsoport/korosztály. Láthatók az esetleges felhasználói visszajelzések (jelenleg LIKE formában).

Egy Geomatech tananyag példa

GEOMATECH TANANYAGEGYSÉG: A HARMADFOKÚ FÜGGVÉNY VIZSGÁLATA ELEMI MÓDON

A harmadfokú függvény vizsgálata, elemi módon. A görbéről vizuálisan és egy pont segítségével olvassuk le a tulajdonságokat.



GEOMATECH TANANYAGEGYSÉGEK MEGTEKINTÉSE

👍 0

LETÖLTÉS

MEGOSZTÁS

Készítette Geomatech — 2014. szeptember 13. - 19:52

Tartalom típus: [Geomatech tananyagegység](#)

Címkék: [függvény](#) [transzformáció](#) [függvény elemzés](#)

Megtekintések: 163

[Probléma jelentése](#)

Célcsoport (életkor): 16 – 18

Nyelv: Hungarian

Licenz: [CC-BY-SA](#), [GeoGebra Terms of Use](#)

7. ábra Geomatech tananyagegység (Forrás: <http://tananyag.geomatech.hu/material/show/id/154649>)

A tananyagegységek között olyanok is találhatóak, amelyek játéknak is felfoghatók. Például a diákoknak egy adott körívhez tartozó kerületi szög nagyságát kell megtippelniük, amit aztán a

program

értékel.

GEOMETRIAI TIPPELŐS JÁTÉK 10. OSZTÁLYOSOKNAK ⓘ

< 1.

Tippelj, becsülj!

ALKALMAZÁS

ⓘ

9/1. feladat

Mekkora az AB (vastagított) ívhez tartozó kerületi szög $\phi = 0^\circ$

Kész



8. ábra Tippelj, becsülj ... feladat a Geomatech-ben 10 osztályosoknak

Mivel a Geogebra program a térgeometria tanításához is jól használható, olyan feladatokat is találhatunk, ahol a tanulóknak 3D-szerű környezetben kell különböző műveleteket elvégezni. Ilyen például a következő ábrán látható térbeli vektorok alkalmazása, ahol egy kocka éléből induló vektorok segítségével kell további megadottakat előállítaniuk.

VEKTOROK A TÉRBEN

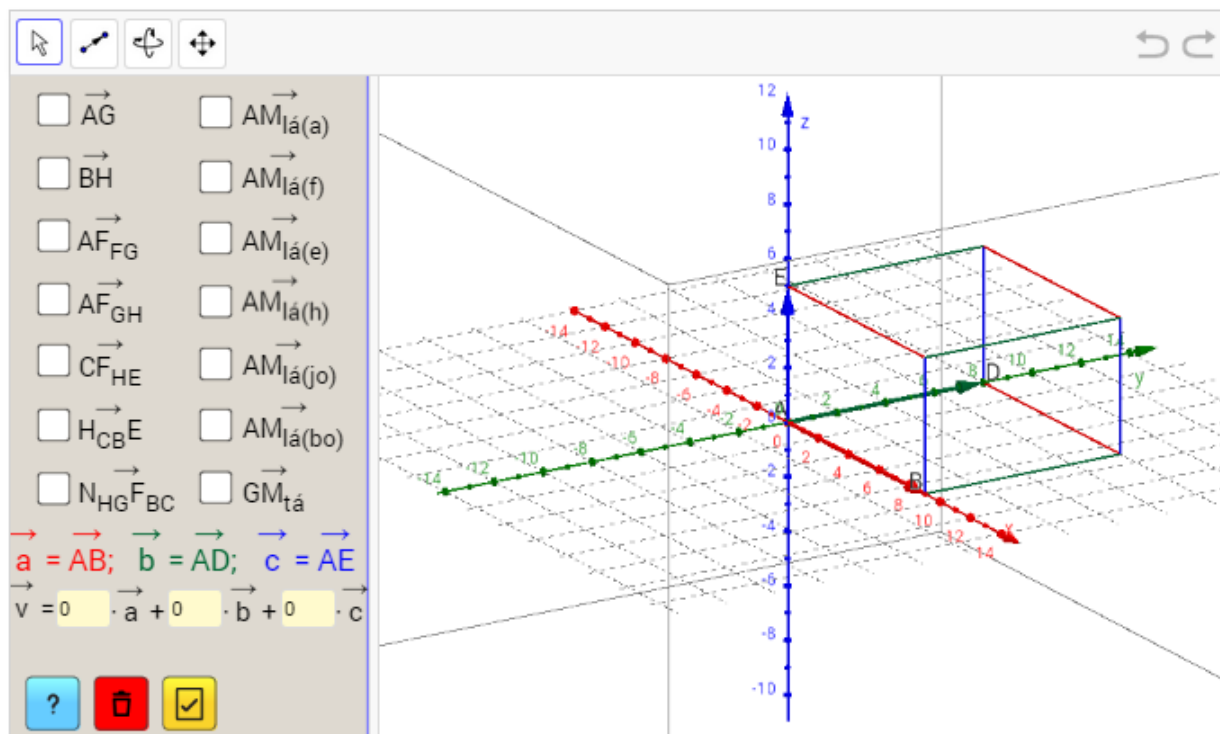
< 1.

FELADAT

Az $ABCDEFGH$ téglaltestben \vec{AB} vektor, $\vec{AD} = \vec{b}$ és $\vec{AE} = \vec{c}$.

Adjuk meg \vec{a} , \vec{b} és \vec{c} segítségével (lineáris kombinációjaként) a következő vektorokat:

- \vec{AG} ;
- az A csúsból alapátlók metszéspontjaiba (lapközéppontokba) mutató vektorok;
- az A csúsból az FG él felezőpontjába mutató vektor;
- az A csúsból a GH él felezőpontjába mutató vektor;
- \vec{BH} ;
- a C csúsból a HE él felezőpontjába mutató vektor;
- a BC oldal C csúszhoz közelebbi harmadoló pontjából az E csúcsba mutató vektor;
- a GH él H csúszhoz közelebbi negyedelő pontjából a BC él felezőpontjába mutató vektor.



SEGÍTSÉG

Ha nem boldogulsz az együtthatókkal, told el a vektorokat az origóba, és próbáld így leolvasni őket.

9. ábra Vektorok a térben a Geogebra-ban. (Forrás: Geomatech.hu)

Ahogy az ábráról is leolvasható, a diákok beírhatják a megfelelő koordinátákat, amennyiben ki tudják számolni, de lehetőség van arra is, hogy a vektorok eltolásával megpróbálják leolvasni azokat.

A projekt keretében számos ingyenes képzés áll a matematikát (és természettudományos tárgyakat oktatók) rendelkezésére, amelyeken az alkalmazás módszertanát sajátíthatják el.

A Geomatech Projekt által előállított, szakértők által minősített anyagok kiválóan alkalmasak arra, hogy a közoktatásban alkalmazzák őket, így az ezekkel való megismerkedés alapvetően fontos a jelenlegi és a jövőbeli matematikatanárok számára.

4. Interaktív tábla, interaktív matematika

Az elmúlt néhány évben széles körben megjelentek az interaktív táblák a hazai általános és középiskolákban. Ezekből többféle is megtalálható az osztályterekben, de a funkcionalitásuk közötti különbség nem óriási. Hazánkban leggyakrabban használtak a SmartBoard, Promethean, Mimio, CleverBoard, eBeam típusú eszközök. (A következőkben ezek megkülönböztetésétől eltekintünk, hiszen az ilyen különbségeket úgyis az adott szituációban kell kezelniük.)

Melyek az interaktív táblák használatának előnyei? Az interaktív tábla a számítógép interaktivitását bővíti ki a projektor lehetőségeivel, vagyis egy egész csoport, vagy osztály számára teszi elérhetővé, kezelhetővé, módosíthatóvá a számítógép képernyőjén megjelenített tartalmakat a digitális fehér táblán. Ez új lehetőségeket kínál a matematika oktatásában is (Kent, 2006).

A lehetséges előnyök a következők:

Minden művelet megvalósítható segítségével, amely a számítógépen lehetséges.

Interaktív és multimedialis elemek alkalmazásának lehetősége.

Elmenthető és megosztható, újrafelhasználható tananyagok, órarészletek.

Szemkontaktus folyamatos marad a felhasználókkal az eszköz használata során.

A diákokra gyakorolt motivációs hatás nagy.

Figyelemmel kell lennünk a következő tényezőkre is:

A táblaszoftverek nem kompatibilisek egymással (az egyes táblákhoz készített alkalmazások többnyire nem használhatók más táblákkal, és nem létezik egységes fájlformátum sem).

Az interaktív tábla kezelése és használata előismeretet és valamennyi gyakorlást igényel.

A felkészülés és az adott táblához való tananyagfejlesztés meglehetősen időigényes tevékenység, de a pedagógusok közös munkájával és az elkészített anyagok megosztásával ez az idő csökkenthető lenne.

Az interaktív tábla és fenntartása költséges – ez utóbbi tényező természetesen tantárgyaktól független.

A felsoroltakból láthatjuk, hogy az interaktív tábla hatékony alkalmazásához komolyan meg kell dolgozni az azt alkalmazni kívánó pedagógusnak. Ehhez kaphatnak segítséget például a Műszaki Könyvkiadó által kiadott, a kiadó weboldaláról ingyenesen letölthető Táblatanító magazinból, ahol gyakorló pedagógusok osztják meg tapasztalataikat, óravázlataikat és oktatási ötleteiket, segédanyagaikat. A magazinban több matematika témájú írást is találunk, például a tengelyes tükrözés, az egész számokról, a törtek felbontásáról és más témakörökben.

A neten keresgélve nagyon sok olyan kész programot is találhatunk, amelyek eredményesen használhatók abban az esetben is, ha nem ismerjük töviről hegyre az adott táblaszoftver lehetőségeit.

A Sulinet Tudásbázis oldalain az általános iskola 1-8. osztályához és a középiskola 9-10. osztályához találunk részletesen kidolgozott, lektorált, módszertani megjegyzésekkel ellátott, többségében interaktív anyagokat.

The screenshot displays the Sulinet website interface. At the top, there is a navigation bar with the Sulinet logo, a search bar, and buttons for 'Bejelentkezés' (Login) and 'Regisztráció' (Registration). Below this, there are tabs for 'HÍRMAGAZIN', 'KÖZÖSSÉG', 'TUDÁSBÁZIS', 'Educatio', and 'Súgó'. The main content area is titled 'Tudásbázis > Matematika > Matematika'. On the left, a 'Tananyag választó:' (Subject selector) dropdown menu is set to 'Matematika', with a list of grade levels from 1st to 10th, and an 'Összes elem...' (All items...) option. The main content area shows three mathematics resource cards:

- Matematika - 1. osztály**: 4 téma. Matematika tananyag első osztályos kisdíjak számára. Első lépések a matematika világában, számolás 20-as számkörben, kezdő lépések a geometria területén.
- Matematika - 2. osztály**: 5 téma. Matematika tananyag második osztályos kisdíjak számára. Számolás 100-as számkörben, a szorzótábla, a geometria alapjai.
- Matematika - 3. osztály**: 2 téma. Matematika tananyag harmadik osztályos kisdíjak számára. Számolás 1000-es számkörben, a római számok megismerése, a testek, síkidomok tulajdonságai.

On the right side, there are promotional banners and news sections:

- SULINET Érettségi Kidolgozott tételek**: A banner for exam preparation materials.
- Tananyagok elérése**: A section titled 'Tisztelt Látogatók!' (Dear Visitors!) announcing the launch of the Sulinet Digital Knowledge Base and providing the URL regi.sdt.sulinet.hu.
- Csoportot ajánlunk**: A section titled 'Gegebra' (Geogebra) stating that its use is not only for math lessons but also for general education.

10. ábra Matematika tananyagok a Sulinet Tudásbázisában (<http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika>)

Ezen anyagok interaktív tábla segítségével is használható, különösen hasznosak lehetnek ebből a szempontból az animációk és az interaktív elemek. Ezek használata különösebb hozzáértést sem igényel, és megfelelnek a NAT követelményeinek.

👤 A mérlegelv gyakorlása ($ax + b = cx + d$ típusú egyenletek)

Áttekintő	Fogalmak	Gyűjtemények	Módszertani ajánlás	Jegyzetek
A mérlegelv gyakorlása ($ax + b = cx + d$ típusú egyenletek)				
Mérlegelv szemléltetése				Egész együtthatós $ax + b = cx + d$ típusú egyenletek megoldása
Egyenletek oldalainak változtatása				Tört együtthatós $ax + b = cx + d$ típusú egyenletek megoldása
Az $ax=d$ és $ax=cx$ alakú egyenletek megoldása				Törtös egyenletek
Az egyenletmegoldás szemléltetése				A mérlegelv alkalmazása

Mérlegelv szemléltetése

Eszköztár:

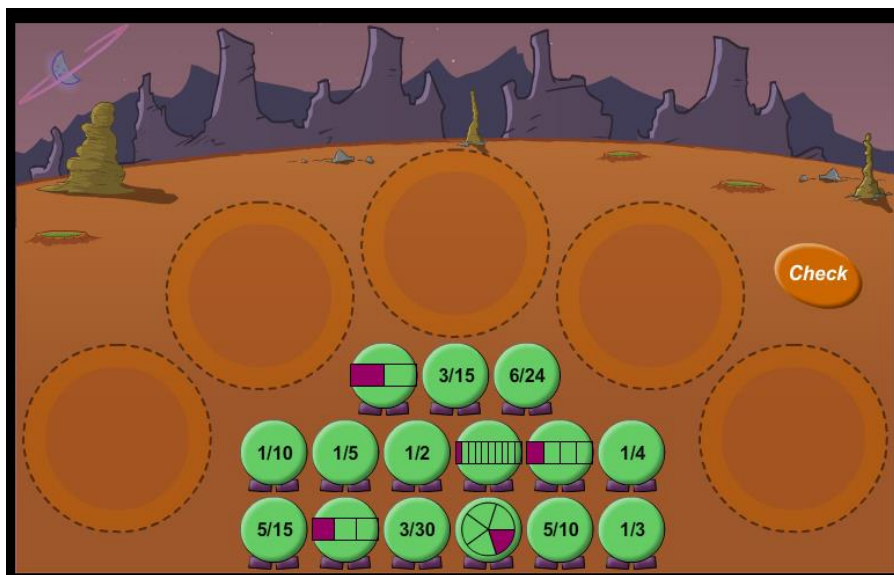
Az egyenleteket egy kétkarú mérleg egyensúlyi helyzetével is szemléltethetjük. Az egyenlet két oldalának változtatását a mérleg két serpenyője tartalmának változtatása szemlélteti, miközben az egyensúlyi helyzet változatlan.

Az egyenletben az egyenlőség nem változik, ha mindkét oldalhoz ugyanazt a számot adjuk, illetve vonjuk ki.

11. ábra A mérlegelv gyakorlása a Sulinet Tudásbázisában

Elsősorban alsóok számára készült gyűjteményt találhatunk a Matematikai Játszótér elnevezésű <http://www.mathplayground.com/games.html> oldalon. Nézzünk pár példát innen:

A Triplets nevű programmal a közöséges törtek bővítését lehet gyakorolni játékosan.

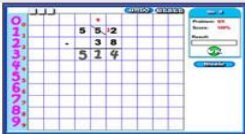

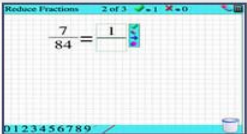


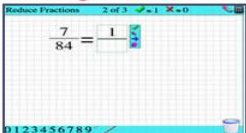
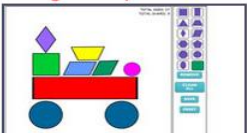
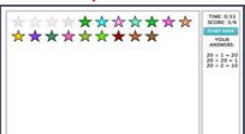
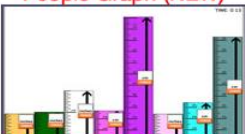
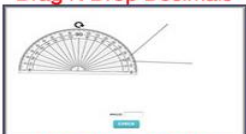




12. ábra Közöséges törtek gyakorlása. (www.mathplaygrounds.com/Triplets/Triplets.html)
















Egy másik hasznos gyűjteményt találunk a mrnussbaum.com oldalon. Az itt található feladatok az egész általános iskolai anyagból származnak, bármelyik osztály számára található megfelelő

nehézségű kihívás. A feladatok nemcsak interaktív táblán, de egyéni gyakorlás céljára is jól használhatók.

Featured Math Workshops

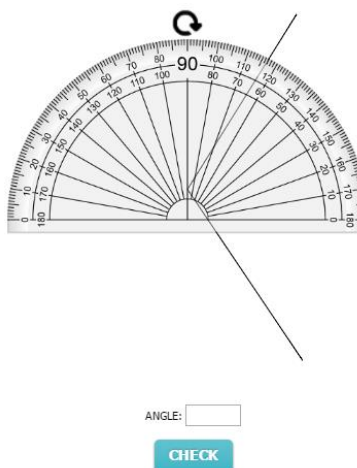
			
Drag n Drop Math	Amazing Numbers Chart	Drag N Drop Fractions	Graph Master
			
People Graph (NEW)	Drag N Drop Decimals	Shape Maker	Envision Division
			
Measurement Workshop	Age of the Angles	Sushi Fractions	Place Value Workshop

Math Categories

 Math Games	 Drill Library	 Math Workshops	 Math Videos	 Math Printables
 Addition	 Subtraction	 Multiplication	 Division	 Fractions
 Decimals	 Money	 Telling Time	 Measurement	 Word Problems

13. ábra Változatos feladatok gyűjteménye a mr.nussbaum.com oldalon.

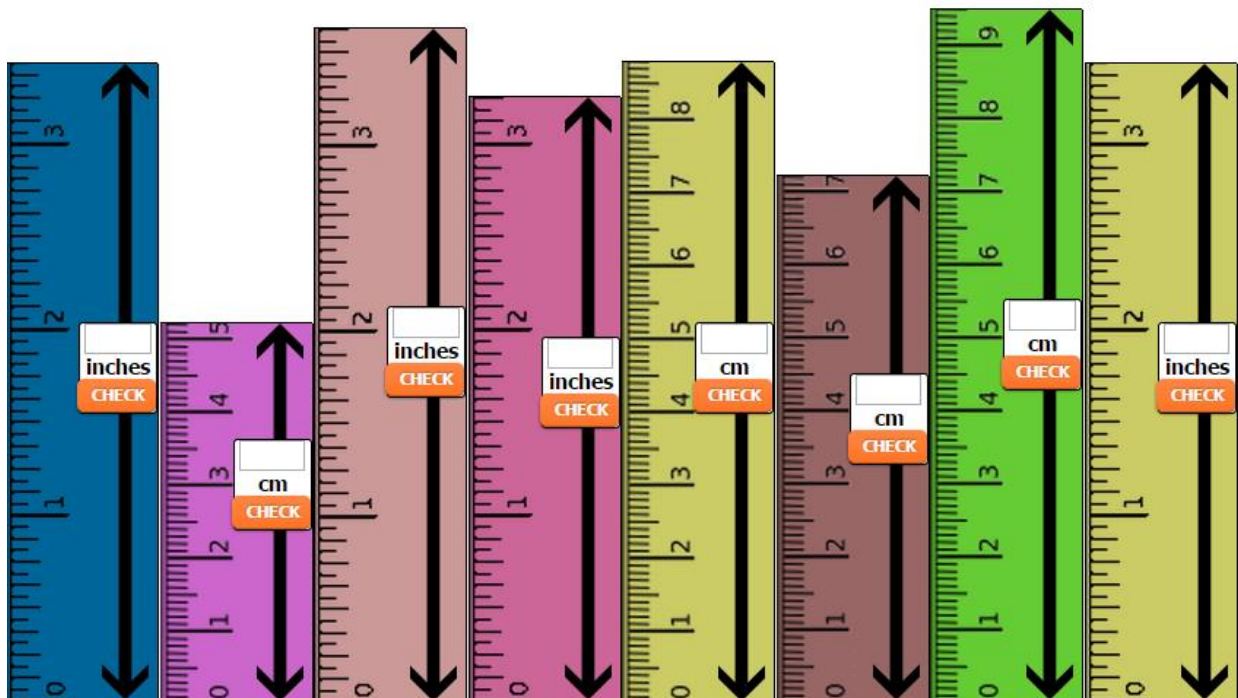
Érdekesként a szögmérést, a szögek nagyságának becslését tanító játékot választottuk. A programban először néhány szöget kell a mozgatható és forgatható szögmérővel megmérni, majd ezután egyéni vagy csoportos játék keretében kell megbecsülni a program által adott szög nagyságát. A cél természetesen minél több pont megszerzése úgy, hogy közben a hibázások pontlevonással járnak.



14. ábra Szögmérés és szögek becslése a mrunussbaum.com oldalon.

Szintén az említett weboldalon találtuk a vonalzóról való távolságok leolvasását gyakoroltató alkalmazást. A programban beállíthatjuk, hogy csak egészeket vagy törteknek megfelelő távolságokat használjon a kérdéseknél. A válaszokat a diákoknak megadott idő alatt kell a megfelelő vonalzóra ráírni.

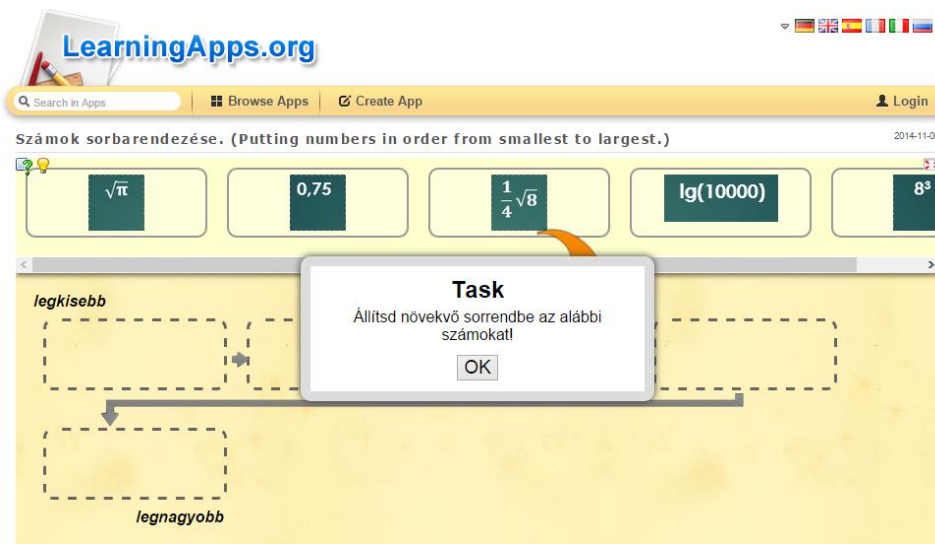
TIME: 0:53



15. ábra Mennyit mutat a vonalzó? Játék a mrnussbaum.com oldalon.

A bemutatott példák jól illusztrálják a digitális táblákhoz létező különböző játékos oktató programok interaktív lehetőségeit, de akiknek ez kevés lenne, számos olyan alkalmazás is létezik, amelyekkel a pedagógusok saját maguk is előállíthatnak interaktív feladatokat.

A legismertebbek ezek közül az offline (ingyenesen letölthető) HotPotatoes, valamint az online formában használhatók közül a LearningApps (<http://www.learningapps.org>), EducaPlay (<http://www.educaplay.com>) és a Classtools (<http://classtools.net>). Ezeken a weboldalakon a szokásos feleletválasztós, igaz-hamis, és cloze teszteken kívül sok változatos feladat típus elkészítésére nyílik lehetőség. Az egyetlen nehézség az lehet, hogy a pedagógusok által elkészített feladatok nem letölthetők, használatukhoz online kapcsolat szükséges.



16. ábra A számok sorba rendezése LearningApps feladattal. (Készítette: Fehér Péter)

5. A mobil eszközök alkalmazásának lehetőségei

A mobileszközök (okostelefonok, tabletek, notebook-ok, e-könyvolvasók) napjainkra nemcsak a felnőttek, hanem a diákok többségének is mindennapi használati eszközeivé váltak (lásd például Fehér-Hornyák, 2011). Nem dughatjuk tehát homokba a fejünket azzal, hogy figyelmen kívül hagyjuk azt a tényt, hogy a diákok idejük jelentős részét töltik például az „okostelefonjuk társaságában”, elsősorban kommunikáció, illetve szórakozás céljából. Próbáljunk meg tehát értelmet, tartalmat adni ezek használatához, akár tanórai, akár egyéni tanulás céljára.

Az okostelefonokra egyre több olyan applikáció jelenik meg, amely a matematikaoktatás számára is hasznos lehet. Ezek egy része a matematikai-logikai játék kategóriába tartozik, és mint ilyen, az algoritmikus gondolkodást (esetleg tervezést), a logikus gondolkodást, és a koncentrációképességet is fejleszti.

Ilyenek például a következők:

Sudoku

A Sudoku egy 9×9 cellából álló rács. A rács kilenc kisebb, 3×3 -as blokkra oszlik, amelyben elszórva néhány 1-től 9-ig terjedő szám állhat. Az üres cellákat a játékosnak kell kitölteni úgy, hogy minden vízszintes sorban és függőleges oszlopban, és az egyes 3×3 -as blokkban az 1-től 9-ig terjedő számok pontosan egyszer szerepelhetnek.

A Sudoku matematikájáról olvashatunk Makay Géza cikkében (Makay, év nélkül).

Az alap és a különböző kibővített verziókat játszhattunk a <http://www.websudoku.com> oldalon.

Sokoban

Ebben a játékban különböző dobozokat kell az előre megadott helyre mozgatni. Mivel visszalépés nincs, illetve a dobozokat csak tolni lehet, húzni nem, az egyre nehezedő szintek komoly kihívást jelentenek.

Unblock Car

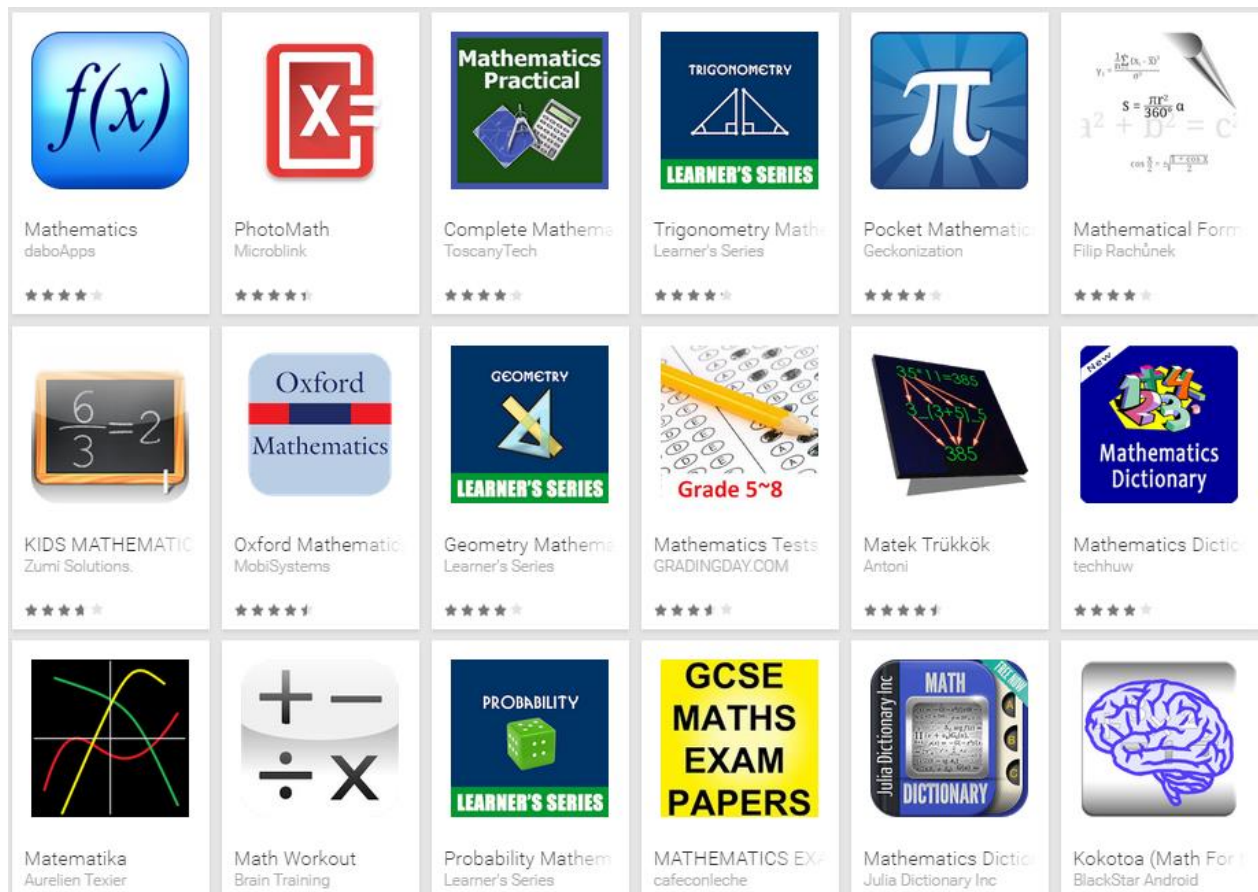
Az előzőhöz hasonló karakterű játékokban autókat kell egy négyzet alakú területen belül úgy elrendezni, hogy a megjelölt autó ki tudjon menni a pályáról. Szintén egyre nehezedő szinteken kell túljutni.

Mindkét játék alkalmas az algoritmikus gondolkodás és a vizualitás fejlesztésére.

2048

Ebben a kirakós játékban a számok segítségével a 2048-as értéket kell elérnünk.

A használható mobil alkalmazások másik csoportja a konkrét matematikai alkalmazásokhoz kötődik. Itt nagyon széles körű a kínálat az alsósok számára használható, alpműveleteket gyakoroltató programoktól kezdve az érettségizőknek, vagy akár a felsőoktatásban tanulók számára segítséget nyújtó programokig.



17. ábra Mobil matematikai alkalmazások Androidra

Az alkalmazások többnyire angol nyelvűek, de ez az alsó tagozatosok esetében szinte teljesen elhanyagolható, hiszen az elvégzendő műveletek a képernyőről is leolvashatók. Idősebbeknél valamilyen szintű angol szövegérték szükséges lehet egyes programok esetében, ezt figyelembe kell vennünk!

Ilyenek például a következők:

Complete Mathematics

18. ábra A Complete Mathematics a Google Play áruházban.

A program elsősorban a középiskolásoknak ajánlott témaköröket dolgozza fel, oktatási segédanyag és gyakorló feladatok segítségével. A következő témaköröket tartalmazza többek közt: függvények, geometria, trigonometria, statisztika, valószínűségszámítás, egyenletek, kérdések és válaszok, matematikai szótár, kvízek, továbbá tartalmaz egy egyszerűbb függvények ábrázolására, megjelenítésére alkalmas modult is.

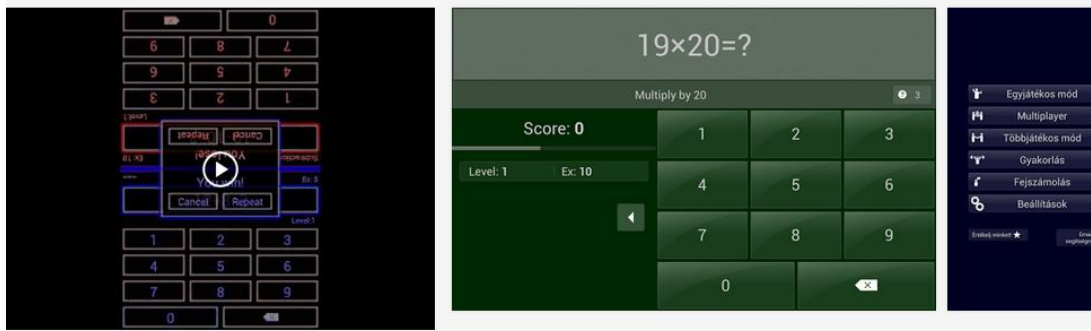
Egy a gyors számolás begyakorlását segítő, akár két játékos által is játszható program a magyar nyelven használható **Matek Trükkök**, amellyel például a szorzótáblát, és a fejszámolást segítő apró trükköket sajátíthatnak el a diákok játékos formában.

Matek Trükkök
 Antoni - 2015. június 5. - PEGI 3
 Oktatás

[Telepítés](#) [Felvétel a kívánságlistára](#)

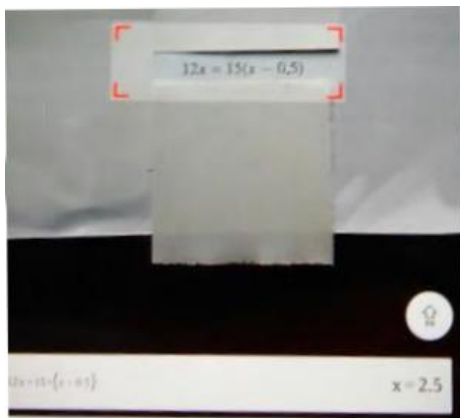
Ez az alkalmazás kompatibilis az eszközével.

★★★★☆ (113 945) +9994 Ajánlás a Google-on



19. ábra Alap számolások gyakorlása játékos formában.

Még egy érdekes alkalmazást mutatunk a Play áruházból, ennek neve PhotoMath. A program azt tudja, hogy ha ráfókuszálunk vele indítás után egy egyenletre, kiírja az egyenlet megoldását, sőt a megoldás levezetését is!



20. ábra Egyszerű egyenlet megoldása a programmal.



21. ábra PhotoMath által megoldott feladatok

Ez a program bizonyára el fogja nyerni a diákok tetszését. Jelenleg a kézírást még nem ismeri fel, de ebben az irányban való fejlesztése folyamatban van.

A rendelkezésre álló alkalmazásokról (applikációról) egy kategorizált és annotált gyűjteményt találunk a <http://www.educatorstechnology.com> weboldalon, ahol korosztályonként és témakörönként is keresgélhetünk, Android és iPad platformokra egyaránt.

Az itt felsorolt alkalmazásokon kívül folyamatosan jelennek meg újabbak is, érdemes tehát időnként benézni a Google Play Áruházba, vagy az Apple hasonló weboldalára (iStore).

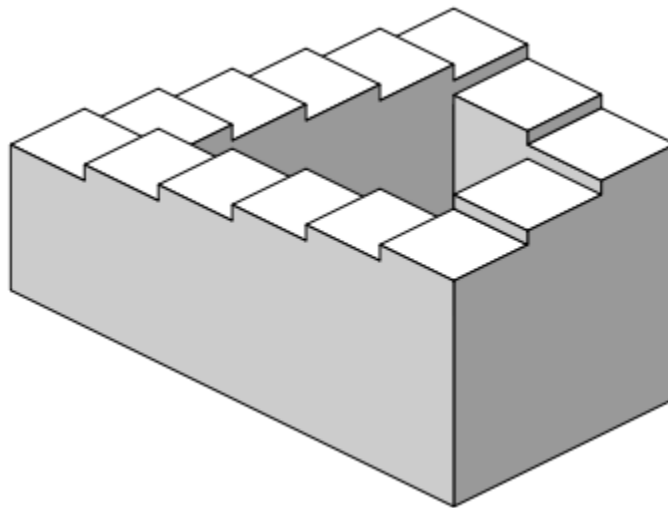
6. A vizualitás lehetőségei a matematika tanításában

"Rajzolj ábrát! Vezess be alkalmas jelölést!" - tanácsolja Pólya György a méltán világhírű könyvében ("A gondolkodás iskolája"), mint a feladat megértésének egyik legfontosabb lépését.

A feladatok vizualizálása valóban nagyon gyakran segít a problémák megoldásában. Hogyan taníthatjuk meg ezt a diákjainknak, miben segít(het) a számítógép? Ezt a témát fogjuk ebben a részben körüljárni.

Az észlelés szempontjából legfontosabb érzékszervünk a szem, a legtöbb bejövő információnk a látásból származik. Melyek azok a területek, amelyek esetében a vizuális megjelenítés segítheti a jobb megértést és elsajátítást? Válaszunk az, hogy gyakorlatilag az egész iskolai matematika ilyen. Nem szabad azonban megfélekednünk arról, hogy a szemünk könnyen becsaphat bennünket, ha csak arra támaszkodnánk, könnyen hamis eredményeket kaphatunk.

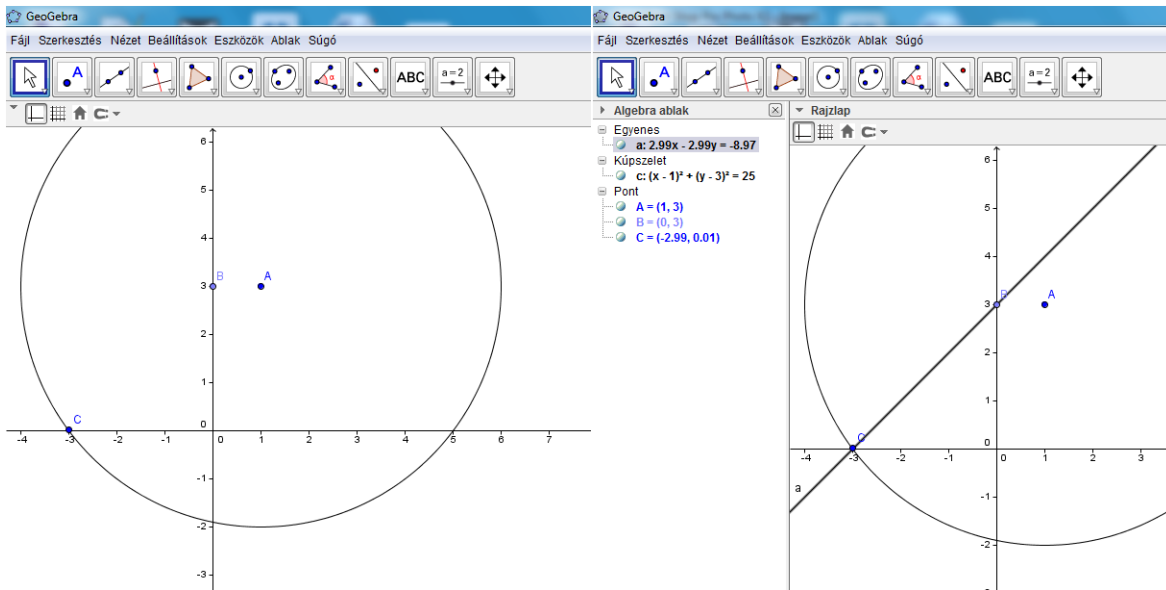
Ennek illusztrálására érdemes bemutatnunk a diákoknak egy Wikipedia-ban is szereplő gyűjteményt az optikai illúziókról (http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_optical_illusions). Ezek közül több is kapcsolatba hozható a matematikával, például a „hiányzó négyzet” rejtvényt (a már korábban bemutatott „végtelen csokoládé”-t), vagy a nem létező alakzatokat ábrázoló Penrose-lépcső.



22. ábra A Penrose-lépcső (public domain, Wikipedia)

Az ilyen rejtvények bemutatásával felkelthetjük a gyanút, hogy az nem elégséges bizonyítása egy matematikai állításnak, hogy az „ábrán úgy látszik” – lásd egyes koordináta-geometriai feladatok esetében egy pont rajta van-e egy körön, vagy egy egyenes érint-e egy megadott kört stb. Ilyen esetekben egzakt számolással tudnak csak bizonyosságot szerezni az adott állításról.

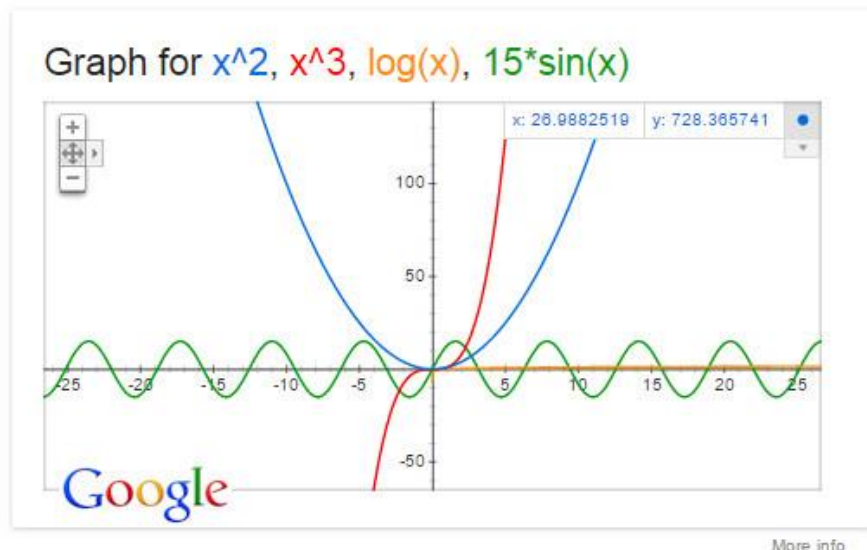
Ugyanakkor viszont a Geogebra alkalmazásával könnyen bizonyosságot szerezhethetünk arról, vajon két alakzat érinti egymást, vagy egy adott ponton átmegy-e egy egyenes, netán egy pont rajta van-e egy körön.



23. ábra BC egyenes egyenlete

Az ábra baloldalán a C pont úgy tűnik, a $(-3;0)$ pontban van. Azonban ha a B ponttal összekötjük, a kapott egyenes egyenlete nem a várt $x-y = -3$, hanem valami ettől eltérő. Ebből már gyanús, hogy a C pont nem a $(-3;0)$ pontban van. Bekapcsolva az egyenlet megjelenítését, látható a „csalás”. Ezzel azt szeretnénk volna illusztrálni, hogy nem elégséges érv, hogy „úgy látszik”.

Egy pillanat alatt képet kaphatunk egy függvény menetéről egy olyan alkalmazással, amelyről a diákok nem is tud. A Google keresőjének a függvényábrázolási képességéről van szó. Sokaknak gondot okoz egy függvény képének fejben való elképzelése, sőt gyakran még a papíron, koordináta-rendszerben történő ábrázolása is. Egy egyenlet grafikus megoldásának keresése esetén is rendelkezésünkre áll ez az eszköz. Használatához csupán a függvény nevét kell begépelnünk a kereső ablakba, és máris az alábbihoz hasonló ábrát kapunk.



24. ábra Függvények a Google keresőjében

A térbeli, 3D-s alakzatok szemléltetésére is nagyon alkalmas a számítógép. A korábban látott Geogebra mellett a SketchUp program segítségével a diákok is könnyen hozhatnak létre 3 dimenziós modelleket. A program SketchUp Make verziója szabadon és ingyenesen letölthető és használható.



Elementary Student Work

Teachers in the Isle of Man are seeing SketchUp as one of the most important pieces of educational software for creativity and motivation. They are using it to support work right across the curriculum and not just in the area of design technology. We are already seeing SketchUp creations being imported into Photoshop and animations being brought into iMovie where soundtracks can be added - there's literally no end to the educational value of SketchUp!



Above is a model of the Laxey Wheel created by a 10yr old pupil of Laxey School in the Isle of Man. It illustrates the way young students (some as young as 5yrs old) take to SU. Further information on the Laxey Wheel can be found [here](http://www.sketchup.com/case-study/elementary-student-work)

25. ábra 5 éves tanuló SketchUp-al készített ábrája

(Forrás: <http://www.sketchup.com/case-study/elementary-student-work>)

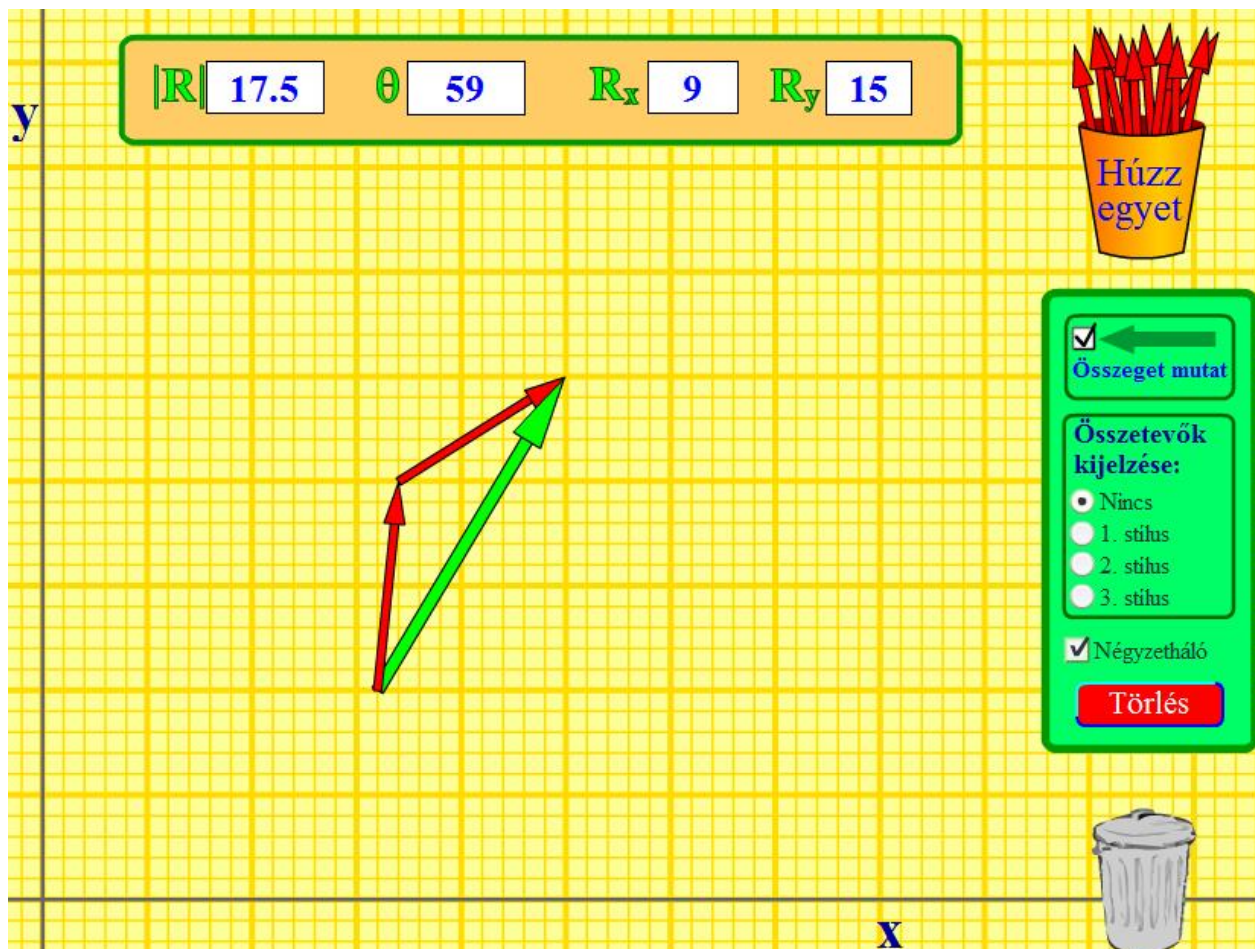
A Sketch-Up használatáról a Táblatanító Magazinban olvashatunk részletesebben (Nagy György, 2009).

Ebben a témakörben térünk ki a számítógéppel (is) végezhető matematikai szimulációkra.

A matematikai szimulációk szinte a kezdetektől fogva a számítógépek felhasználásának egyik kulcsfontosságú területe. Milyen célokra használnak matematikai módszereken szimulációkat? A lehető legszélesebb körben: időjárás- és földrengés előrejelzés, molekulamodellzés, járművek mozgásának szimulálása, robbantások hatásainak vizsgálata, tőzsdei folyamatok előrejelzése és sorolhatnánk vég nélkül. A gépek teljesítményének óriási mértékű növekedése otthon körülmények között is lehetővé teszi nagy számítású igényű szimulációk elvégzését akár a diákok részére is.

Óriási szimulációs program gyűjteményt találhatunk a University of Colorado (Boulder) weboldalán. A Phet Interactive Simulations (<http://phet.colorado.edu>) talán a létező legnagyobb matematikai és természettudományos gyűjtemény. Nagyon örvendetes, hogy a szimulációk

számos nyelvre, köztük magyarra is le vannak fordítva, így nyelvi nehézségek sem hátráltatják a használatukat. A HTML5 formátumú szimulációk Windows, Linux, OSX operációs rendszereken egyaránt használhatók, csakúgy, mint iPad-en és némely Android alapú készüléken is. A JAVA és Flash alapú szimulációk is futtathatók a Windows, Linux és OSX rendszereken.



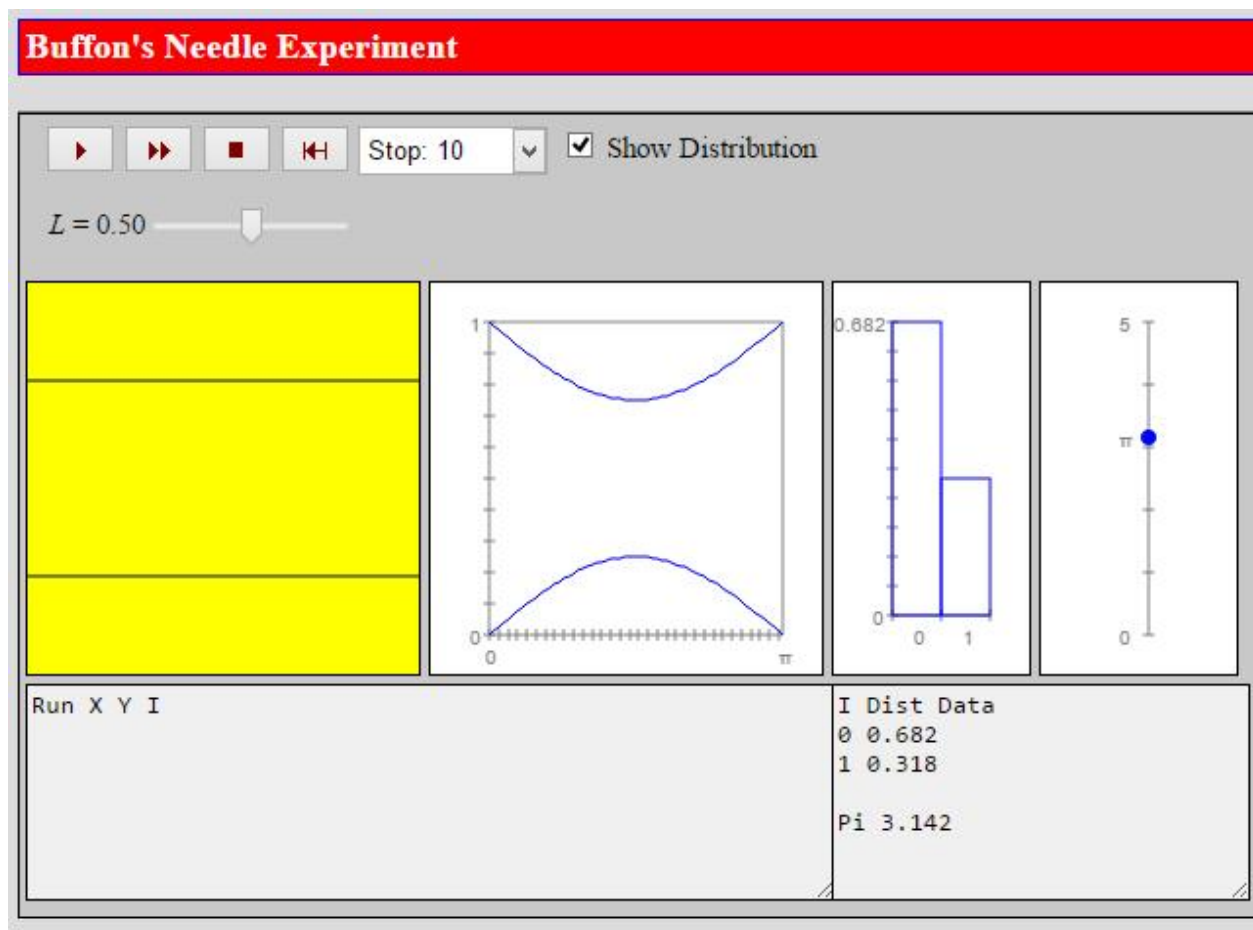
26. ábra Vektorok összeadásának gyakorlás a Phet-ről.

Egy másik szimulációt tartalmazó gyűjtemény, amely elsősorban a statisztika és a valószínűségi számítás témaköréből válogatott a huntsville-i University of Alabama weblapján található. A gyűjtemény a *Valószínűségi számítás és Statisztika Virtuális Laboratórium* nevet viseli. Jóllehet az itt található anyagok inkább a felsőoktatásban tanulók számára készültek, azért találhatunk benne olyanokat is, amelyek középiskolások számára is felhasználható.

Ilyen például a Buffon-féle tű probléma. George Louis Leclerc, Buffon grófja 1777-ben vetette fel a következő kérdést: Egy rövid tűt egy vonalas lapra leejtve, mi a valószínűsége annak, hogy az keresztezni fog egy vonalat? - amely azontúl, hogy módszert adott a pí közelítő értékének meghatározására, egyszersmint megalapozta a geometriai valószínűség fogalmát is.

A kísérlet online szimulációja kipróbálható a következő oldalon:

<http://www.math.uah.edu/stat/applets/BufonNeedleExperiment.html>



27. ábra A Buffon-féle tű probléma szimulációja.

A kérdés elméleti hátterének tárgyalását megtaláljuk például Balka Richárd, Egri-Nagy Attila, Juhász Tibor: Matematikatörténet problémákon keresztül című munkájában.

A bemutatott példákkal a szemléltetés fontosságára és újszerű lehetőségeire szeretnénk volna felhívni a figyelmet. A különböző szimulációk, grafikonok, animációk nem helyettesíthetik a problémákban való elmélyülést, de segíthetnek a könnyebb megértésben. Az osztálytermekben különféle tanulási stílust preferáló diákokkal van dolga a matematikát oktató pedagógusoknak, és nem könnyű megoldani a differenciálást sem, de ebben is segíthetnek az IKT-eszközök. Nem a gondolkodás helyett, hanem a gondolkodás segítségének és a problémák több irányból történő körüljárásának fontosságát kívántuk ezzel hangsúlyozni.

7. Összegzés

Ebben a fejezetben egy széleskörű körű áttekintést próbáltunk adni a matematika tanításában alkalmazható korszerű IKT-alapú eszközökről és módszerekről. A bemutatott eszközökkel való megismerkedés során a pedagógusok gyakorlatot szerezhettek az IKT-eszközök használatában, és képesek lesznek arra, hogy más modern eszközökkel ismerkedjenek meg. Természetesen új eszközök és ötletek naponta jelennek meg a világhálón, amelyek között számos olyat találhatunk, amelyeket gyakran azonnal érdemes kipróbálnunk és beemelnünk a napi tanítási

gyakorlatunkba. Egy ilyen módszertani jegyzet feladata nem lehet több, mint a legfrissebb információkat közreadni, és további önálló kutatásra, új eszközök és módszerek keresésére inspirálni az Olvasókat!

Irodalom:

Balázi Ildikó–Ostorics László–Szalay Balázs–Szepesi Ildikó–Vadász Csaba (2013): PISA 2012 Összefoglaló jelentés. Oktatás Hivatal, Budapest. p 80.

Online:

http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_merese/pisa/pisa2012_osszefoglalo_jelentes.pdf

Balka Richárd, Egri-Nagy Attila, Juhász Tibor (év nélkül): Matematikatörténet problémákon keresztül. Online: http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_matematika_Balka_Richard_Egri-Nagy_Attila_Juhasz_Tibor-Matematikatortenet_problemakon_keresztul/0038_matematika_Balka_Richard_Egri-Nagy_Attila_Juhasz_Tibor-Matematikatortenet_problemakon_keresztul.pdf

Barsy Anna–Námesztovszki Zsolt (2014): Hogyan alkalmazzuk az interaktív táblákat az oktatásban? Tippek, trükkök, tapasztalatok. In: *Modern Iskola*, Online:

<http://moderniskola.hu/cikk/hogyan-alkalmazzuk-interaktiv-tablakat-oktatasban-tippek-trukkok-tapasztalatok>

Csákány Béla (2010): Móra, méhek, matematika. *Ponticulus Hungaricus*, XIV. évfolyam 7–8. szám 2010. július–augusztus.

Online: http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/errata/csakany_mmm.html

Fehér Péter–Hornyák Judit (2011): 8 óra pihenés, 8 óra szórakozás, avagy a Netgeneráció 2010 kutatás tapasztalatai. In: Ollé János (szerk.): *III. Oktatás Informatikai Konferencia Tanulmánykötet*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 101–110.

Gardner, Martin (1981): *Mathematical Circus*. Pelican Books, UK.

Hersch, Reuben (2000): A matematika természete. Typotex Kiadó, Budapest. 358. p.

Kent, P. (2006): Using Interactive Whiteboards to Enhance Maths Teaching. *Australian Primary Mathematics Classroom* – Journal of the Australian Association of Mathematics Teachers, Volume 11 Number 2.

Koren Balázs (2014): Okostelefonok az oktatásban.

Online: <http://www.slideshare.net/kobak/okostelefonok-az-oktatsban>

Lannert Judit (2014): Gondolkodás nélkül – Miért nem megy a magyarnak a matek? *Magyar Narancs*, 2014. 24. sz. Online: <http://magyarnarancs.hu/publicisztika/miert-nem-megy-a-magyarnak-a-matek-90531>

Makay Géza (év nélkül): A sudoku szabályai, története. Online: <http://www.math.u-szeged.hu/Sudoku/sudoku.pdf>

Nagy György (2009): 3D a táblán a Google SketchUp programjával. *Táblatanító*, 5. szám. 16-18. old.

Papp-Varga Zsuzsanna (2010): Geogebra – interaktív matematika mindenkinek. *Inspiráció*, 17. évf. 1. szám. p. 6-8.

Pluhár Zsuzsanna – Viniczai Zsófia (201x): QR-kód az oktatásban, Online: <http://matchsz.inf.elte.hu/VVprojekt/QRoktatas.pdf>

Szalay Sándor (szerk. 2003): *Informatikai eszközök a matematika oktatásában*. Tanári kézikönyv a 12-18 évesek oktatásához. (Sorozatszerkesztő: Kárpáti Andrea) Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. p. 152

Táblatanító Magazin, Online: <http://www.muszakikiado.hu/tablatanito>

Turcsányiné Szabó Márta (2005): Kollaboratóriumok – a Colabs-projekt eredményei. Új Pedagógiai Szemle, 55. évf. 7.8. sz. 132-147. p.

Varga Tamás (1999): Találja ki, melyik számra gondoltam? In: Hódi Endre (szerk.): *Matematikai mozaik*. Typotext Kiadó, Budapest

Ábrajegyzék:

1. ábra A magyar diákok eredményei matematikából a 2006-2012 közötti PISA felméréseken	2
2. ábra A matematikát felfedezik vagy feltalálják? (Forrás: http://ed.ted.com/lessons/is-math-discovered-or-invented-jeff-dekofsky)	4
3. ábra Matematika körülöttünk, avagy hogyan használják a „profik”?.....	5
4. ábra Miért szeretik a méhek a hatszögeket? (TED-Ed-vidéó)	7
5. ábra Szorzás többjegyű számokkal a videotanar-on.....	8
6. ábra A jelenleg rendelkezésre álló Geomatech tananyagok száma évfolyamonként	10
7. ábra Geomatech tananyagegység (Forrás: http://tananyag.geomatech.hu/material/show/id/154649).....	10
8. ábra Tippelj, becsülj ... feladat a Geomatech-ben 10 osztályosoknak.....	11
9. ábra Vektorok a térben a Geogebra-ban. (Forrás: Geomatech.hu)	12
10. ábra Matematika tananyagok a Sulinet Tudásbázisában (http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika)	14
11. ábra A mérlegelv gyakorlása a Sulinet Tudásbázisában.....	15
12. ábra Közönséges törtek gyakorlása. (www.mathplaygrounds.com/Triplets/Triplets.html) ...	15
13. ábra Változatos feladatok gyűjteménye a mr.nussbaum.com oldalon.	16
14. ábra Szögmérés és szögek becslése a mrnussbaum.com oldalon.	16
15. ábra Mennyit mutat a vonalzó? Játék a mrnussbaum.com oldalon.....	17
16. ábra A számok sorba rendezése LearningApps feladattal. (Készítette: Fehér Péter).....	18
17. ábra Mobil matematikai alkalmazások Androidra	19
18. ábra A Complete Mathematics a Google Play áruházban.	20
19. ábra Alap számolások gyakorlása játékos formában.	21
20. ábra Egyszerű egyenlet megoldása a programmal.	21
21. ábra PhotoMath által megoldott feladatok	22
22. ábra A Penrose-lépcső (public domain, Wikipedia)	23
23. ábra BC egyenes egyenlete	24
24. ábra Függvények a Google keresőjében	24
25. ábra 5 éves tanuló SketchUp-al készített ábrája..... (Forrás: http://www.sketchup.com/case-study/elementary-student-work).....	25
26. ábra Vektorok összeadásának gyakorlása a Phet-ről.....	26
27. ábra A Buffon-féle tű probléma szimulációja.....	27