Szakmódszertan kiegészítő jegyzet

Szerzők: Ambrus Gabriella és Ambrus András

Lektor: Vancsó Ödön

TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007
Országos koordinációval a pedagógusképzés megújításáért

A matematikatanulás pszichológiai alapjai

Tanulás optimalizálható, ha a tanárok a tanulók szemével értelmezik a tanulást, és ha a tanulók a tanárok szemével tekintenek a tanulásra, úgy tekintenek magukra, mint önmaguk tanárára. (Hattie, 2014)

Mielőtt a pszichológiai alapokra térnénk, tekintsük át, idézzük fel a tanítás- tanulás főbb céljait, ezúttal a PISA felmérés alapján.

A TANULÁS-TANÍTÁS FŐBB CÉLJAI

A célok alapvetően megjelennek például nemzetközi PISA felméréshez használt kompetencia-rendszerben.

PISA kulcs-kompetenciák

Logikai következtetések, indoklások

Problémamegoldás

Modellalkotás

Reprezentációk

Szimbolikus és technikai elemek alkalmazása.

Kommunikáció

PISA kompetenciák három osztálya:

I. Reprodukciók, definíciók, számítások

A tanulók ismeretei: tények, reprezentációk, ekvivalenciák észrevétele, matematikai objektumok és tulajdonságok előhívása, rutin eljárások végzése, algoritmusok alkalmazása, technikai készségek fejlesztése.

II. Kapcsolatok és integráció a problémamegoldás fejlesztése céljából

Tanulói képességek: kapcsolatok meglátása, észrevétele különböző problémaállások, és különböző témák között, információk integrálása egyszerű problémák megoldása céljából. Különböző reprezentációk kapcsolatának észrevétele, létrehozása, szimbolikus és formális kifejezések dekódolása, szaknyelv használata kapcsolata az anyanyelvvel.

III. Matematizálás, matematikai gondolkodás, általánosítás, belátás, megértés

Tanulói képességek: felismerni és megalkotni a szituációkban meglevő matematikai lényeget (matematizálni), matematika alkalmazása problémamegoldásokban, saját modellek és stratégiák elemzése, interpretálása, kifejlesztése. Matematikai indoklások, beleértve a bizonyításokat és általánosításokat

TANULÁS ELMÉLETEK

I. Inger-reakció, megerősítésen alapuló tanulás

Ennek az elméletnek az alapját állatkísérletek - Pavlov kutyakísérletei illetve Thorndike éhes macskával végzett kísérletei - eredményei alkotják. Mi utóbbival foglalkozunk mivel Pavlov a feltétlen reflex láncolatokat vizsgálta. Az inger-reakció tanulás lényege, hogy az ingerre adott helyes válasz dicsérettel, jutalommal jár, míg a helytelen válasz, büntetéssel, illetve nehezteléssel. Fontos, hogy egy helyes asszociáció, kapcsolat alakuljon ki az inger és a rá adott válaszok között és ez automatikussá váljon. Matematikában például a szorzótábla megtanulása tekinthető ilyen jellegű tanulásnak, persze jó, ha ez nem csak mechanikus ismereteket jelent, hanem lát a tanuló kapcsolatokat is. Tény, a szorzótábla automatikus ismerete nélkül nincs stabil matematikai tudás. A felsőbb osztályokból említhetjük a nevezetes szögfüggvények értékeit, a négyzetszámok ismeretét 20-ig, az első tíz prímszám ismeretét.

Az elmélet alapelve, hogy a pozitív válaszra kapott dicséret automatikusan megerősíti az asszociációt az inger és a válasz között, a kettő szorosabban kapcsolódik egymáshoz, nagy az esély, hogy a jövőben is a helyes választ fogják adni. A büntetés természetesen diszfunkcionális, azaz az inger és a rá adott rossz válasz közötti kapcsolat gyengül és – remélhetőleg – a jövőben nem fordul elő, emlékezve a neheztelésre. A lényeg tehát a jó válaszok megerősítése és a gyenge válaszok előfordulásának gyengítése.

Tanulási tanács

Tények, képletek tanulásánál célszerű alkalmazni a See – Say – Cover – Write – Check módszert. Nézd meg – Mondd ki – Takard le – Írd le – Ellenőrizd. Ezt többször végre kell hajtani, amíg a hosszú-távú memóriában nem rögződött az ismeret.

Összefoglalás: A válasz megerősítés lényege egy asszociáció (kapcsolat) megerősítése illetve gyengítése. A tanuló végeredményben passzív befogadója a jutalmaknak illetve büntetésnek. A tanár e szerepében a jutalom illetve büntetés osztó. Az elmélet az 1900-as évek elején terjedt el, de ma is van

hatása főként készségek tanításánál. Lényege a sok gyakorlás és számonkérés. (Drill and practice)

II. Alakelmélet

Fő képviselői Max Wertheimer, Wolfgang Köhler, Kurt Koffka német származású pszichológusok. Az irányzat alapelve: a humán tudatosság nem bontható elemeire. Az észlelésnek szerintük csak akkor van értelme, ha az egészként fogható fel, „látható”. Az emberi agy holisztikus, analogikus, párhuzamos, törekszik önszervezésre, az egész nem a részek összege. Érzékszerveink forma-alakító képességét hangsúlyozzák, teljes alakzatokra, formákra törekszünk, nem egyenesek és görbe vonalak különálló együttesére. Az elmélet szerint a tanulás a jó, hatékony észlelés eredménye, amely lehetővé teszi a pontos fogalmak kialakítását.

Az észleletek rendezésének alapelvei

1. A jó forma törvénye.

A pszichológiai forma a feltételek függvényében lesz jó. A forma az észlelés alapegysége, ha észlelünk, akkor egy alakzatot formálunk. Észlelésünk függ a múltbeli tapasztalatainktól.

2. Az alakzat és háttér megkülönböztetésének törvénye

Ismertek olyan képek, melyeken világos háttér – sötét alakzat illetve sötét háttér – világos alakzat alapján különböző alakzatokat látunk.

3. A közelség törvénye

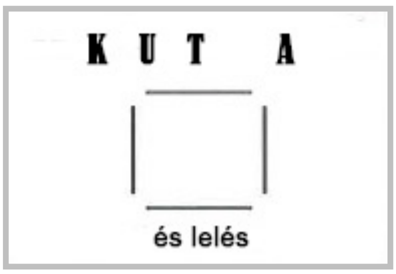
Azon dolgokat melyek térben és időben közel vannak egymáshoz, egy csoportként kezeljük.

4. Hasonlóság törvénye

Több kis és különböző mintákat is tartalmazó mintákban a hasonló kis mintákat együtt látjuk és egy alakzatként észleljük.

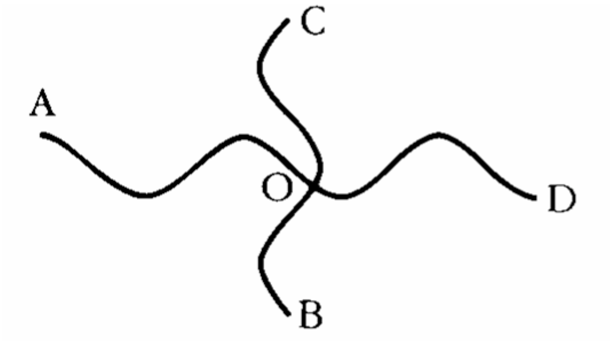
5. A zártság törvénye

Észlelésünk a hiányzó részeket igyekszik „kitölteni”, egységben látni.



6. A folytonosság törvénye

Az elv szerint egyszerű megszakítás nélküli vonalakat, mint egy önálló alakzatokként észleljük. Lásd AOD görbe vonalat!



Pólya György világhírű, magyar származású matematikus, a matematikai problémamegoldás tanításának atyja az alakelmélet híve volt. Szerinte a komplex problémák megoldása során az un. elmélkedés (inkubáció) szakaszában a megoldás ötletét keresve gyakran hirtelen „beugrik” agyunkban a megoldás egésze. („AHA” élmény, HEURÉKA megtaláltam élménye). Itt nem csak geometriai alakzatok tanulmányozásáról, mentális transzformációjáról van szó, hanem bizonyítások holisztikus, teljes egységben való látásáról is. Tanítási tapasztalatok bizonyítják, hogy a bizonyítások egyes lépéseinek végrehajtása, látása nem vezet sok esetben a bizonyítás sémájának, egészének felfogásáról, egységben látásáról.

1. Feladat

Tanulmányozza Pólya György Probléma megoldási fázisait és egy komplex feladat megoldásának elemzésével demonstrálja az egyes lépéseket, kérdéseket!

M. (egyéni)

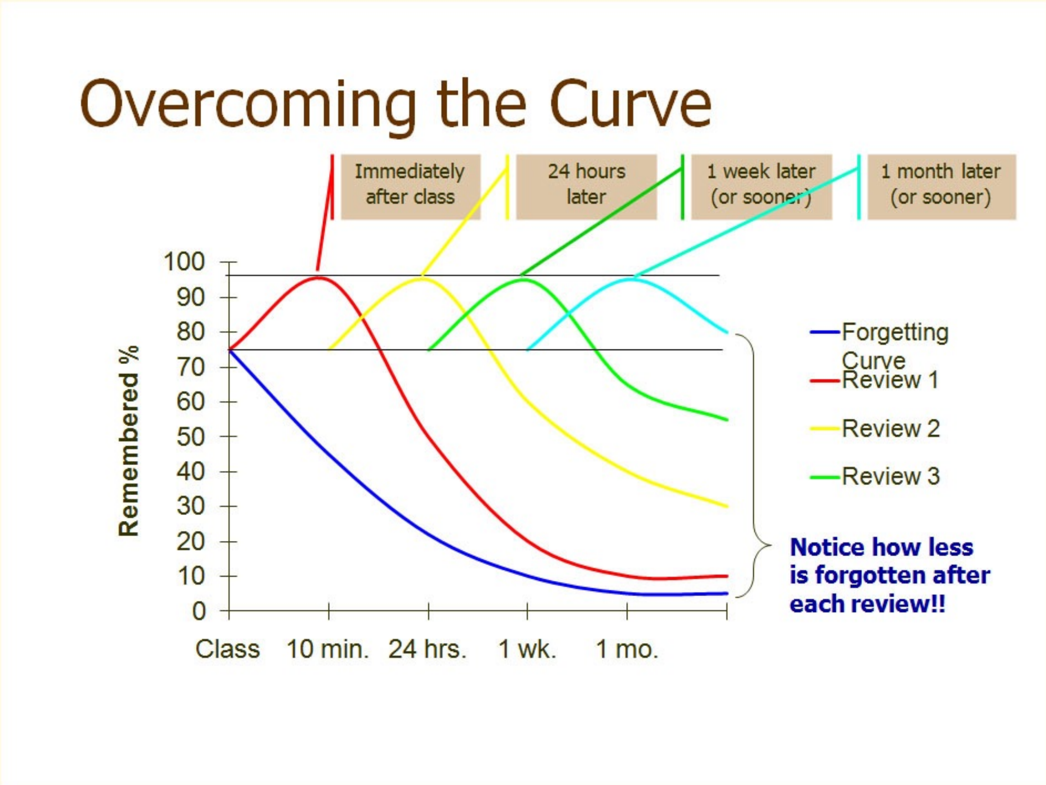
III. Információ elsajátítás

Ennél az elméletnél a tanulás azt jelenti, hogy a bejövő információt hozzáadjuk a memóriánk tartalmához. A diák passzív befogadó, feladata az információ megtartása, emlékezetbe vésése; a tanár prezentálja az információt (előadás, könyvolvasás, online prezentáció). Gyakran közvetítő módszernek is nevezik, mivel a tanár közvetíti az információkat és a tanulók befogadják. Üres edény módszernek is nevezik, a tanuló egy üres edény, amit meg kell tölteni. Az 1950-es években volt népszerű, ma is fontos szerepet játszik alapvető tények elsajátításában. Matematikatörténeti események, tények, érdekességek, matematika a természetben, kódelméleti érdekességek elsajátítása ebbe a kategóriába tartoznak. .

Az irányzat jeles képviselője Ebbinghaus, aki először állapított meg mennyiségi kapcsolatot a gyakorlás mennyisége és a megtanult anyag mennyisége között. Egy adat: 64 gyakorlás után körülbelül a tanult anyag 60%-a marad meg. A másik jelentős eredménye az un. felejtési görbe. 6 nap után a tanultak 25%-a, 31 nap után csak 20% marad meg. Összefoglalva a tanult anyag mennyisége a gyakorlások számától és az eltelt időtől függ.

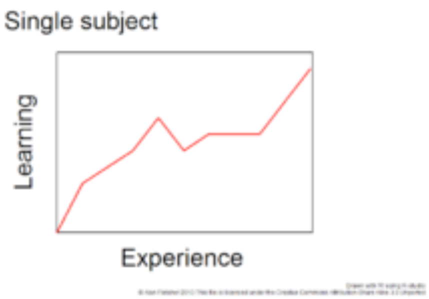
Felejtési görbék

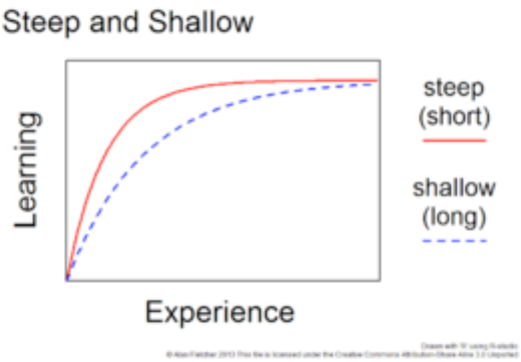
A következő ábrán felejtési görbéket látunk a tanulás utáni ismétlések függvényében. Jól látható az un. elosztott gyakorlások, ismétlések hatékonysága a tömegesített gyakorlásokkal szemben. A tudatos tanári tervezésnek még egy hónap múlva is célszerű gyakoroltatni a készségeket, eljárásokat, ahogy ezt az alábbi ábrán is látni lehet. (Trotsenko, 2014)

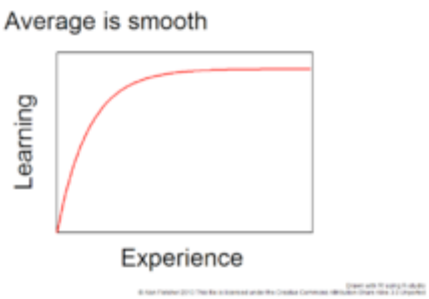


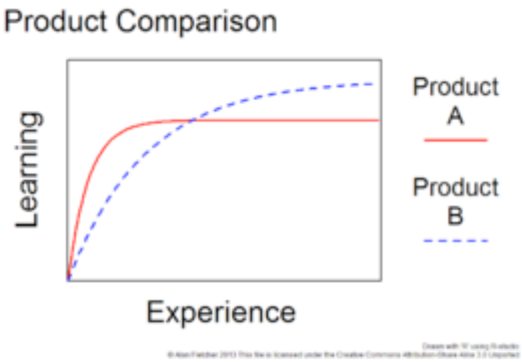
Tanulási görbék

A következő ábrákon néhány tanulási görbét láthatunk. Az ábrán az exponenciális-tanulási görbék (folyamatos) „határértékhez közelítenek.









(Learning curve, Wikipedia)

Készségek tanulása

A készségek elsajátításának három fázisa van: kognitív, asszociatív és autonóm tanulás. Az első rész formális tanítás, melynek során a tanuló a tanár általi magyarázat és a példák alapján kialakít egy pontos képzetet az eljárásról. A második rész az asszociatív szakasz, a tanuló összegyűjti és rendezi az információkat a tanár vagy társak segítségével, ezért van a szociális jelző. A harmadik szakasz a leghosszabb, a tanuló folyamatos gyakorlással fejleszti a készségét automatikus szintre.

Arányokkal kifejezve: 70:20:10 jelenti, hogy körülbelül 10% tanulási idő kell a tanulás során az adott készség szemantikus felfogására, megértésére; utána 20% irányított szakasz következik, amely elősegíti az eljárás integrációját, kapcsolódását a meglevő ismeretekbe, majd 70% a gyakorlás, reflektálás, saját ismeretelsajátítás menedzselése beleértve informális szociális tanulást is.

IV. Ismeret konstrukció

A tanulás mentális reprezentációk konstruálását jelenti, melyekből következtetéseket lehet levonni. Aktív tanulás akkor történik, amikor a tanuló megfelelő kognitív folyamatokban vesz részt. A tanuló szerepe a prezentált anyag értelmezése, a tanár szerepe kognitív vezetés, a tanuló kognitív folyamatainak irányítása, segítése. Az 1900-as évek végén terjedt el ez az irányzat és ma is népszerű, főleg a fogalmak képzésében és a stratégiák tanításában.

Az irányzat jeles képviselője Frederick Bartlett. Szerinte az értelmes tanulás az új információ asszimilálását jelenti a meglevő sémákba. (Séma- szervezett, rendezett információk koherens mentális reprezentációt alkotva). Tanulás nem jön létre, ha hiányzik a megfelelő előismeret (séma), nincs mihez kötni, asszimilálni. A sémába való asszimiláció konstruktív folyamat, nem egyszerű hozzáadása az ismereteknek. Bartlett szerint az emlékezés egy rekonstrukciós folyamat nem pedig egyszerű felidézés.

AZ EMBERI ELME KOGNITÍV FELÉPÍTÉSE: EMLÉKEZET STRUKTÚRÁK

A legtöbb agykutató elfogadja A. Baddeley angol tudós struktúra modelljét: érzékszervi (szenzoros) emlékezet, munkamemória, hosszú távú memória.

Szenzoros memória

Érzékszerveinkre másodpercenként hatalmas mennyiségű információ hat a környezeti világunkból. Ezek nagyon rövid idejűek és csak azon információkat észleljük, az kerül a munkamemóriánkba, amelyre tudatosan figyelünk. Az ismeretfeldolgozás szempontjából a munkamemória és a hosszú távú memória játszik lényeges szerepet.

Munkamemória

A munkamemóriában folyik a tudatos ismeretfeldolgozási folyamat – felfogás, megértés, ismeretek rendezése, összehasonlítása, kritikus gondolkodás, probléma megoldás, stb. Agyunk munkaasztalának is nevezzük, ez egy aktív probléma terület. Négy összetevője van: fonologikus tár, vizuális-téri tár, epizodikus tár, centrális végrehajtó. A *fonologikus tár* tárolja és ismétlésekkel fenntartja a verbális, hangi információkat. A *vizuális-téri tár* a vizuális, képi információkat tárolja, az *epizodikus tár* összekapcsolja a verbális és képi információkat a központi szabályozó, végrehajtó irányításával és a hosszú távú memóriából vett információ segítségével. A *központi szabályozót* s(centrális végrehajtó) supervisor-i figyelmi rendszernek is nevezik, mivel felügyeli, kontrollálja és irányítja az ismeretfeldolgozási folyamatot agyunkban. Munkamemóriánk terveket készít, transzformációs stratégiákat alkalmaz, analógiás és metaforikus gondolkodás itt történik, dolgok közötti kapcsolatokat létesít gondolatban, absztrahál, mentális reprezentációkat alkot. A problémamegoldás során a tanulóknak egy feladat, probléma világos mentális reprezentációját kell létrehoznia. (A probléma megértése). A megoldási módszer, stratégia keresése során a tanulónak az kiinduló adatokat, feltételeket, lehetséges megoldási lépéseket és a feladat célját, kérdését emlékezetben kell tartania (munkamemória), ezek figyelembe vételével monitoroznia kell a megoldási folyamat állását, el kell vetnie a hamis ötleteket, ellenőriznie kell az eredményeket. Ebből is látható milyen nagy terhelésnek van kitéve egy tanuló munkamemóriája a probléma-megoldási folyamat során. Erről a későbbiekben részletesen szólunk.

A munkamemória korlátai

A munkamemóriának nagyon korlátozott a kapacitása: Miller ezt 7±2 információ egységben határozta meg, ennyi új információ egységet tud tárolni a munkamemória. Újabb kutatások szerint a 4±1 információegység inkább közelít a valósághoz. Ha ismeretfeldolgozási folyamat is történik, egyszerre csak két-három szimultán folyamatra vagyunk képesek. Például: tanulás és zenehallgatás, vagy matematikai probléma megoldás folyamata bármilyen osztályzajjal zavaró lehet sok tanuló számára. A memóriánk időkorlátja: egy adott információ 20-30 másodpercig marad fenn ismétlés nélkül. (Baddeley, 2005)

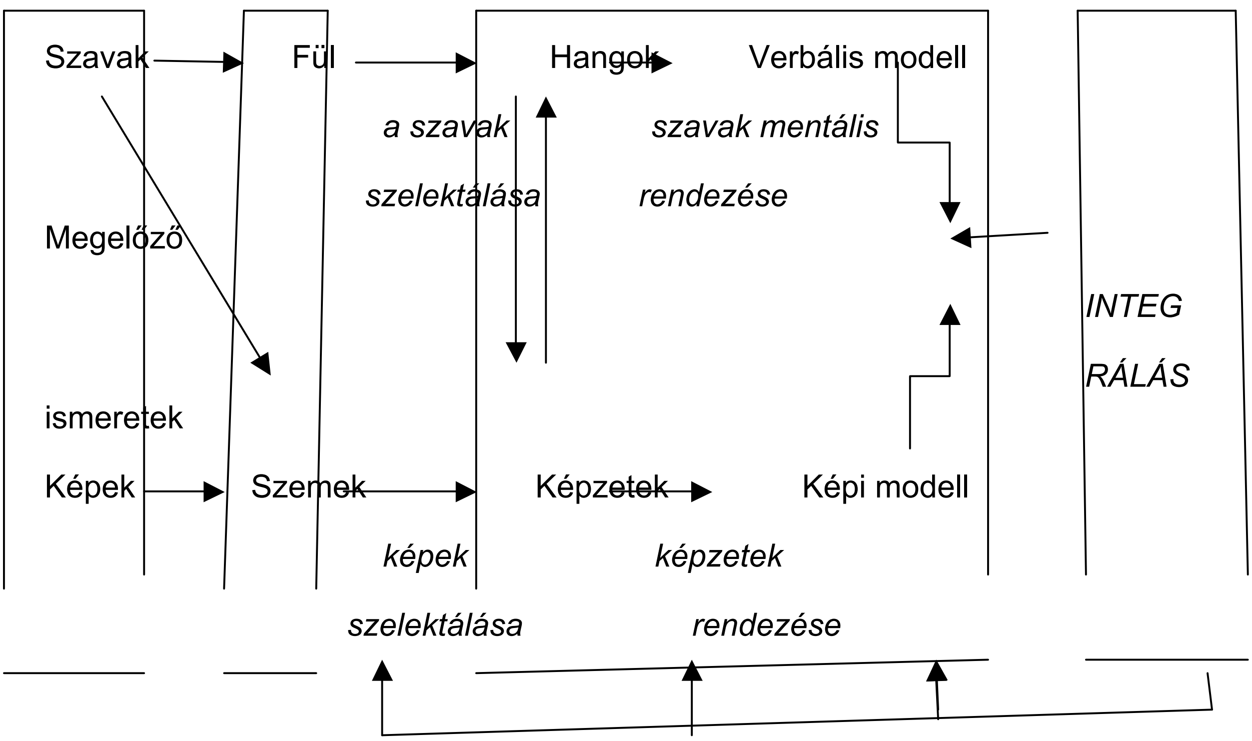
Hosszú-távú memória

A hosszú-távú memória ismereteink tárháza. Az ismereteket sémákban tárolja. *A sémák mentális struktúrák, segítségükkel rendezzük és strukturáljuk ismereteinket*. A sémákat a hosszú-távú memóriából hívjuk elő bizonyos szituációk, problémahelyzetek megértéséhez. A munkamemóriában hozzuk létre a sémákat, melyeket integráljuk a hosszú-távú memóriában meglévő sémákba. A hosszú-távú memóriának nincsenek kapacitás korlátai, időkorlát sem ismeretes. (Felejtésről most nem beszélünk). A munkamemória és hosszú-távú memória kapcsolata döntő a hatékony ismeretszerzési folyamatban. Még a komplex sémák is egy információ egységnek számítanak, így előhívásuk a munkamemóriába nem kapacitás elfoglaló. A komplex problémamegoldás nélkülözhetetlen feltétele a sémák automatizálása, mivel így ezek alkalmazása nem kíván extra munkamemória kapacitást.

A TANULÁS KOGNITÍV ELMÉLETE A METAKOGNITÍV KONTROL ÉS TANULÁS MOTIVÁCIÓ FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

PRESENTÁCIÓ ÉRZÉKSZERVI MUNKAMEMÓRIA HOSSZÚ-TÁVÚ MEMÓRIA

MEMÓRIA

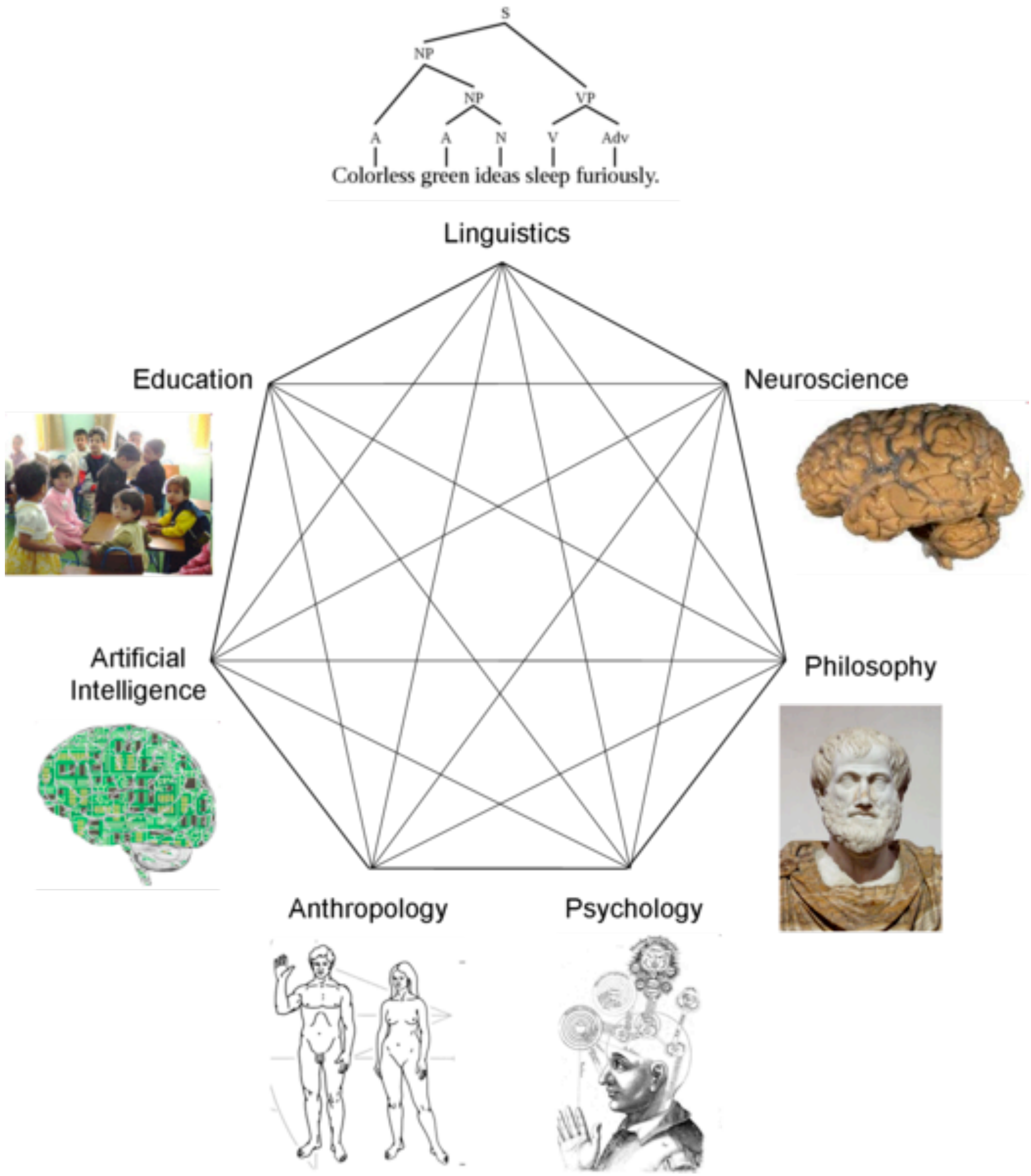


Motiváció és metakognitív irányítás

Kognitív tanuláselmélet modellje a motiváció és metakognitív kontrol figyelembe vételével (Mayer, 2011)

A modellel kapcsolatban kiemeljük a két párhuzamos ismeret feldolgozási, elsajátítási folyamatot: verbális illetve képi.

Ezek szerint célszerű az információkat kétféle reprezentációs módban feldolgozni, így a munkamemória kapacitása megoszlik a két mód között, ha egyik telve van, akkor a másik mód segíthet. Dőlt betűvel kiemeltük az alapvető mentális műveleteket: koncentrált figyelem és szelektálás, mentális rendezés, integrálás a megelőző ismeretekbe. Kiemeljük még a motiváció és a metakogníció (saját tudásról való ismeretek, képességek, tudás) fontosságát a hatékonytanulásban.



Kognitív forradalom a felsorolt tudományágak integrációja

(Cognitive Science Septagram, Internet)

A fenti ábrán látható, hogy milyen tudományterületeknek van alapvető szerepe a hatékony oktatásban, nevelésben: nyelvészet, agykutatás, filozófia, pszichológia, antropológia, mesterséges intelligencia.

KOGNITÍV TERHELÉSI ELMÉLET (KTE)

Kognitív terhelésnek nevezzük a munkamemóriában az információfeldolgozás során keletkezett terhelést. A KTE az információfeldolgozás okozta kognitív terheléssel foglalkozik, annak következményeivel, és az oktatásnak a tanulást segítő hatékony tervezésével. Alapvető feltételezései:

1. A munkamemória kapacitása nagyon korlátozott.

2. Az információt a hosszú-távú memóriában sémák formájában tároljuk.
3. Egy séma egyetlen egy információ egységet jelent az MM szempontjából.
4. A komplex problémák megoldásához szükséges a sémák automatizálása.
5. Hatékony tanulás alapkövetelménye az aktív, tudatos ismeretfeldolgozás az MM-ben.

A kognitív terhelés fajtái

Belső (lényegi) kognitív terhelés (Intrinsic Cognitive Load)

Ez a terhelés nem befolyásolható, a probléma elemei közötti kapcsolatoktól függ, melyeket szimultán kell az információ feldolgozási folyamatban kezelni. Például szöveges feladatok megoldásánál a probléma szövegének olvasása, kiemelve a probléma kiinduló adatait, kérdését, a megoldási folyamatban szükséges helyzetek és lehetséges lépések kapcsolata jelenti a feladatból adódó belső terhelést. Tekintsük a következő feladatot: *Péter 1000 kötetes könyvtára magyar, angol és német nyelvű könyvekből áll. A könyvek p%-a magyar nyelvű, az idegen nyelvű könyvek p%-a angol nyelvű, német nyelvű könyv mindössze 10 db van. Határozzuk meg a magyar és az angol nyelvű könyvek számát.*

Az elemek közötti kapcsolatot egyrészt a különböző nyelvű könyvek összege, az egész és a részek kapcsolata, a magyar nyelvű könyvek az összes könyv p%-át, míg az angol nyelvű könyvek a maradék p%-át jelentik. E feladat mentális reprezentációját a fenti kapcsolatok felismerése jelenti. Több tanuló számára a *p* paraméter gondoz okot, nekik először konkrét százalékértékkel célszerű megoldatni a feladatot. Mivel ez emeltszintű érettségire szánt feladat, ilyen szinten elvárható követelmény a százalékszámítási alaptípusok automatikus ismerete. A konkrét adatok a paraméteres feladat belső (lényegi) kognitív terhelését csökkentik.

Külső kognitív terhelés (Extraneous CL)

Az információ prezentálásának módjától függ, amely tartalmazhat a tanulandó anyag szempontjából felesleges információkat például háttérzene, társak beszélgetése, továbbá ábrák és szövegek elhelyezése is nehezítheti a feldolgozást, ha ábra egyik oldalon, míg a hozzátartozó szöveg a következő oldalon van. Meglepő, de sok tanuló véleménye szerint a matematika tanárok túl sokat, sokszor munkájukat zavaróan beszélnek. Ezt többnyire segítő szándékkal teszik, például a tanulók egyéni feladatmegoldásánál ötleteket, javaslatokat tesznek hangosan, ezzel a saját gondolataiban elmerülő tanulókat megzavarhatják. Kirschner írja: *„Mivel a támogató információ tipikusan magas elemek közti interaktivitást jelent, ezért nem célszerű egyéni feladatmegoldás közben ilyet közölni. Egy feladat megoldásán dolgozni és közben a segítő információra is figyelve ez szinte biztosan kognitív túlterhelést jelent sok tanuló számára. Ezért a támogató ötleteket, sémákat legjobb közvetlenül a probléma kitűzése után adni, így a tanulók előre meg tudnak konstruálni egy kognitív sémát, amit a hosszú-távú memóriájukban tárolnak és a feladatmegoldás közben elő* *tudják hívni, ha szükséges a munkamemóriájukba. Ez kisebb kognitív terheléssel jár, mint a feladatmegoldás közben adott információ"* (Kirschner, 2009)

A fenti könyvtáras feladatban például növeli a kognitív terhelést, ha a feladat szövegének egyik része egyik oldal alján, a folytatás lapozás után a másik oldal tetején van.

Generatív kognitív terhelés (Germane CL)
A tanulás szempontjából döntő tényező, a sémák elsajátításához és automatizálásához szükséges munkamemória kapacitást jelenti. Fő funkciója a problémaadatok kapcsolatának beépítése, integrálása a hosszú-távú memóriában tárolt sémák segítségével. A fenti szöveges feladat többféle kontextusban tűzhető ki: egy adott témakörben komplex feladatmegoldás gyakorlásaként illetve ellenőrzési céllal, tanult ismeretek kontrolljaként. Ha problémamegoldás fejlesztése a cél, akkor a feladat sémáját fontos, hogy jegyezzék meg a tanulók*: egy ismeretlennel – például p százalék - fejezzük ki a könyvállományokat, összeadva megkapjuk a teljes állományt.*
A kognitív terhelés a három fenti terhelés összege. Mivel a tanítás során a belső kognitív terhelés nem változtatható, a külső terhelést kell minimálisra csökkenteni, hogy maradjon kapacitás a generatív terhelésre, a séma kialakítására, elsajátítására.
Úgy tűnik, hogy a séma konstrukció. séma integráció és séma automatizálás munkamemóriára gyakorolt kognitív terhelő hatása megmagyarázza a tanulók tapasztalatai, képességei és tartalmi ismeretei közötti különbségeket. Hatékony tanítás tervezésekor messzemenően figyelembe kell venni a lehetséges kognitív terheléseket.

KOGNITÍV TERHELÉS MÉRÉSE

Nem egyszerű probléma a kognitív terhelésnek a mérése, egyértelműen elfogadott módszer nincs. Három különböző mérési módszer létezik.
Szubjektív értékelés
A tanulóknak egy adott tananyag elsajátítása, adott probléma megoldása után egy többfokozatú skála alapján kell kinyilvánítaniuk milyen terhelést okozott nekik az adott feldolgozás, mennyire nehéznek találják azt. Gyakori a hatfokozatú skála, amelynek az elején 1 jelenti a nagyon megterhelő, nehéz, a 2 jelenti a nehéz, 3-4 lehet a közepes terhelés két fokozata, míg 5 a könnyű illetve 6 a nagyon könnyű minősítést jelenti. A nevében is benne van, hogy ez az értékelés erősen szubjektív jellegű, de a leggyakoribb, mivel nem kíván különösebb eszközöket, célszerű, ha a tanárok használják osztályaikban, hiszen a matematikai probléma-megoldás sok tanulónak különösen nagy terhelést okozhat.
Fiziológiai értékelés
A tanulók szem mozgásának illetve szívritmusának mérése. Eszközigényes, osztálykeretek között nehezen alkalmazható tudományos igénnyel.
Kettős feladat terhelés

Az ismeret elsajátítónak a fő feladat mellett egy másodlagos feladatot is meg kell oldania. A fő feladat megoldási teljesítménye mellett a másodlagos feladaton nyújtott teljesítményt is vizsgálják és a kettő alapján következtetnek a kognitív terhelésre. Ez is inkább a kutató szakemberek eszköze, gyakorlati tanítás során nehéz kivitelezni.

KOGNITÍV TERHELÉS ÉS A PROBLÉMAMEGOLDÁS

Sokat hivatkozunk Pólya Györgyre a matematikai probléma megoldás tanításának atyjára, világhírű képviselőjére. „A gondolkodás iskolája" című könyve 1945-ben jelent meg angolul, magyarul pedig már 1957-ben. „A problémamegoldás iskolája" első kötete1962-ben, a második kötet 1965-ben jelent meg Amerikában. Magyarul 1967 illetve 1968-ban jelent meg e két munka. Azóta sok elnevezése van azon matematikatanítási irányzatoknak, melyeknek középpontjában a matematikai problémák önálló tanulói megoldása áll. Problémaorientált matematikaoktatás, felfedeztető tanítás, kísérletezésen, vizsgálódáson alapuló tanulás, tanítás (inquiry based teaching), konstruktivista tanítási irányzat. Közös ezen felfogásokban, hogy a középpontban a problémák állnak és a tanulóknak teljesen önállóan vagy nagyon minimális tanári segítséggel kell megoldani azokat.

Mi a probléma ezen felfogásokkal? Két irányból közelítjük meg a választ. Az első a tanuláskísérleti tapasztalatok, eredmények elemzése. A tudományos igényű kísérletek egyértelműen bizonyították, hogy a minimális vezetés a tanulók döntő többsége számára nem hatékony. Érdemes idézni Sweller, Clark, Kirschner „Mathematical Ability Relies on Knowledge, Too" cikkét: *„Sok pedagógiai szakember állítja, hogy a problémamegoldó stratégiák nem csak tanulhatók és taníthatók, hanem kritikus alapját képezik a matematikai tudásnak. A legjobb példa erre Pólya György munkássága volt. Ő többféle általános problémamegoldó stratégiát elemzett, mint például „Gondolj egy analóg, releváns problémára, először oldd meg azt, azután analóg módon az eredeti problémát". A másik „Gondolj egy egyszerűbb részproblémára és terjeszd ki a megoldást a teljes a problémára!" Pólya példái a problémamegoldó stratégiák demonstrálására nagyon szépek, az ő hatása kétségtelen a probléma-megoldás tanítására. Mindazonáltal egy fél évszázad alatt nem történt olyan szisztematikus kutatás, amely egyértelműen demonstrálta volna az általános probléma megoldó stratégiák tanításának hatékonyságát. Lehet persze tanítani általános stratégiákat, de nincs véletlenszerű kiválasztáson alapuló, ellenőrzött kísérlet, mely bizonyítaná az ilyen jellegű oktatás hatékonyabb voltát." (Sweller etc. 2010-2011)*

Természetesen figyelembe kell vennünk, hogy a kognitív terhelési elmélet a múlt század végén keletkezett, Pólya pedig a múlt század közepén alkotott, amikor szó sem volt a munkamemória korlátozottságáról, és egyénenkénti nagy különbségeiről.

Ha megfigyeljük Pólya írásait, tanácsait, azokban a tehetséges tanulók vannak a középpontban. Kárteszi Ferenc professzor mondta valahol Pólya probléma megoldási könyveiről. „*Az idősebb Pólya leírta, hogy a tehetséges, fiatal Pólya hogyan fedezte fel a matematikát*" Kárteszi professzor az átlagos tanulók matematikaoktatásával kapcsolatban is hivatkozott Pólyára. Egy magyarországi interjúban Pólya a következő kérdésre: *Ha némelyik diák érdeklődése a szép* *problémák, a felfedeztető módszer segítségével sem ébred föl, mit kell tenni?* azt válaszolta: *„Nézze, szerintem bizonyos értelemben a tanár is kereskedő, aki jelen esetben matematikát akar eladni az egészen más iránt érdeklődő fiataloknak. Ha nem tudja eladni az áruját, nem háríthatja a vevőre a kudarcot, mert ahogy mondják „mindig a vevőnek van igaza”. Igaza lehet a diáknak is, akit a világ látványos, bizarr dolgai, vagy a nemiség problémái jobban érdekelnek, mint a „száraz” matematika. Éppen ezért a tanárnak nagyon kell ügyelnie a feladat, a probléma megválasztására és a tálalás módjára. Olyan feladatokkal kell a diákot a maga boltjába becsalogatnia, amelyek az életből valók, hozzáillenek érdeklődésükhöz, amelyek erőszak nélkül, természetes módon serkentik őket az önálló munkára. Már a kérdésfeltevésünk is olyan legyen, hogy fölébressze a diákok „vásárlási kedvét” fölajzza bennük a szellemi kaland izgalmát”(Kárteszi, 1980)* Kezdő tanárként vidéki kisváros kertészeti szakközépiskolájában bizony nem tudtam ezen elveket alkalmazni. Az alábbiakban a kognitív pszichológia mai eredményi, főként a kognitív terhelési elmélet kutatásai alapján megpróbálunk az átlagos tanuló számára is alkalmazható módszereket elemezni.

A problémamegoldás során ajánlott minimális vezetés sikertelenségének másik oka az emberi megismerő rendszer felépítésén alapszik. Ezt elemeztük a korábbiakban, de még visszatérünk rá.

Mi a probléma a minimális vezetés, felfedeztetés osztálykeretben való alkalmazásakor?

1. Gyakran csak egy-két kiváló tanuló tudja megoldani a problémát.
2. Sok tanuló frusztrált lesz, mivel képtelen valamire való megoldási lépést találni. Van aki föladja, mások mechanikusan lemásolják a jó tanuló által ismertetett megoldást, anélkül, hogy megértenék azt.
3. Vannak tanulók, akik találnak valamiféle megoldást, úgy vélik az helyes megoldás, holott hibás, ez megmaradhat az emlékezetükben az adott problémához asszociálódva, zavarva ezzel a későbbi tanulást. Az emlékezet olyan, hogy hiába mutatták meg a helyes megoldást, a tanulóban az ő saját „megoldása” marad meg.
4. Ha minden tanuló valamiféleképpen eljutott is a megoldáshoz, ha az időfaktort nézzük a teljes irányítás sokkal hatékonyabb. Ha egy anyag 25 perc tanári demonstrációval tanítható, amelyet 15 perces gyakorlás követ tanári visszajelzéssel, ugyanez ez eredmény több tanórát kíván felfedeztetéses tanítással.
5. A minimálisan vezetett tanítás nagyon megnövelheti az osztályban levő tanulók közötti szintkülönbségeket.

Konstruktivizmus, mint tanuláselmélet illetve tanításelmélet.

Sok kutató átviszi mechanikusan a konstruktív tanuláselméletet, mint előírást a tanításra. A konstruktív tanuláselmélet szerint a tanulónak sajátmagának kell megkonstruálnia a bejövő információ, ismeret mentális reprezentációját. Ez történhet egy könyv, internetszöveg olvasása, tanulmányozása révén, tanári előadás, magyarázat segítségével, tanári demonstráció, kísérlet magyarázattal követett bemutatása révén. A lényeg, hogy a tanuló megkonstruálja az ismeret, tudás belső, mentális reprezentációját. A legtöbb tanuló képtelen irányítás, segítés nélkül megtenni ezt.

Kognitív terhelés a problémamegoldás során

A problémahelyzetek, állások és a lehetséges megoldási lépéseket először De Groot vizsgálta sakkjátékosok megfigyelésével. A tapasztalt sakkjátékosok a memóriájukban különböztek kezdőktől. Az emlékezetükben több ezer sakkállás van tárolva a helyzetekhez kapcsolódó jó megoldási lépésekkel.

Sweller és társai a sakkjáték analógiájára kidolgozták elméletüket a matematikai problémamegoldásra is. Véleményük szerint a problémamegoldóknak rendelkezniük kell sok problémahelyzet, problémaállás és az azokhoz tartozó helyes megoldási lépések sémájával, és azokat a megfelelő problémák azonosítása után aktivizálni is tudnak. Ezek a probléma-megoldási sémák terület specifikusak. (algebra, trigonometria stb.) Ha egy tanuló nem rendelkezik a problémának megfelelő megoldási sémákkal, a próba-szerencse, esetleges próbálkozások módszerét kénytelen alkalmazni, ami komolyan leterheli a munkamemória kapacitását. Mi a kiindulási helyzet, mik az adatok és feltételek? Mit keresünk? Milyen megoldási módszerek, lépések jöhetnek számításba? Ha elértünk valahová, jó az irány? Mi lehet a következő lépés, közelebb kerülünk a célhoz vele?

Gyakran előfordul, hogy bár a feladatot megoldja a tanuló, megtalálja a kérdésre a helyes választ, de a megoldás sémájának rögzítésére a hosszú távú memóriában már nem kerül sor a nagy kognitív terhelés miatt, pedig a cél nem a kapott, konkrét eredmény, hanem a probléma megoldását lehetővé tevő megoldási séma beépítése a hosszú távú memóriába, hogy a jövőben is aktivizálni, alkalmazni lehessen.

Ötven éves matematikatanítási tapasztalatunk alapján az a határozott véleményünk, hogy egy új témát, összetett problémát kezdőfokon tanuló számára a teljes irányítás hatékonyabb, mint a minimális vezetés. Természetesen a kiemelkedő tanulók számra sok esetben inkább zavaró a vezetés, ők önállóan meg tudják oldani a problémát (Expertise reversal effect).

KOGNITÍV TERHELÉST CSÖKKENTŐ TANÍTÁSI MÓDSZEREK

Nyitott problémák alkalmazása a matematikatanításban (Goal free problems, Open-ended problems)

Az olyan problémák megoldásánál ahol több megoldási lépés egymásutánja szükséges a cél eléréséig, sok tanuló nem tud elindulni. Az ilyen problémák hagyományosan zárt formában vannak megfogalmazva („Számítsd ki…, bizonyítsd be…, szerkeszd meg…”). A legtöbb feladat a magyar matematika tankönyvekben, feladatgyűjteményekben zárt formájú. A KTE szerint célszerűbb nyitott formában kitűzni a feladatokat, így nem kényszerülnek hosszú keresgélésre, próbálgatásra a tanulók, hanem az adatok alapján meghatároznak közvetlenül egy további adatot.

Példa: *„Egy háromszög két oldala 5 illetve 6 egység hosszú, a rövidebb oldallal szemközti szög 45^{o}. Határozzuk meg a háromszög területét*!” Zárt forma helyett célszerű a következő formában kitűzni: *„Egy háromszög két oldala 5 illetve 6 egység* *hosszú, a rövidebb oldallal szemközti szög 45^o. Add meg a háromszög azon további adatait, amelyeket meg tudsz határozni!"*

Az első esetben a keresés túlzottan megterhelheti a munkamemóriát, mivel nincs közvetlen séma ezen adatokból a terület meghatározására. A második esetben könnyebben aktivizálódik a két oldal és egyikkel szembeni szögre fókuszálva a szinusztétel alkalmazása a másik oldallal szemközti szög kiszámítására. Így maga a séma asszociációja a problémahelyzethez erősebben kötődik. Nincs távolabbi cél, hanem az adatokból egy következtetési lépés. Folytatva a feladatot további egylépéses sémák alkalmazása következik: a harmadik szög kiszámítása, trigonometrikus területképlet alkalmazása. Így adódik három részséma egymás utáni alkalmazásából egy összetett séma: hogyan határozhatjuk meg a háromszög területét két oldal és az egyikkel szemközti szög ismeretében. Ez a fontos, nem az, hogy hány egység lett a terület!

Néhány zárt feladat magyar matematika feladatgyűjteményekből.

1. Három egész szám összege 1994. Ezen számok szorzata végződhet-e 1- re? (5. osztály)
2. Öt egymást követő páratlan szám összegéből levonjuk a közöttük levő páros számok összegét, így 55 marad. Melyek ezek a páratlan számok? (5. osztály)
3. Van-e hat olyan egymás után következő egész szám, melyeket szét lehet osztani két csoportba úgy, hogy mindegyik csoportban ugyanannyi legyen a számok összege? (7. osztály)
4. Összeadtunk 1996 darab egymást követő egész számot.

a. Lehet-e az összegük 1996-tal osztható?

b. Lehet-e az összegük 1995-tel osztható?

Ha igen írj rá példát, ha nem, indokold meg állításodat!(8. osztály)

5. Föl lehet-e osztani egy négyzetet 2015 darab négyzetre átfedés és hiányzó részek nélkül? (Hatodik osztálytól kezdve)
6. Két természetes szám négyzetének különbsége 1999. Melyik ez a két szám? (8. osztály)
7. Bizonyítsuk be: Ha négy egymás utáni természetes szám szorzatához 1-et adunk, eredményül egy négyzetszámot kapunk. (Szlovákia középiskolai versenyfeladat, Magyarország, Románia egyetemi írásbeli felvételi feladat)

Az utolsó feladat elemzésével részletesen foglalkozunk majd.

A fenti feladatok (kívánatos) nyitott változatai:

1. Válassz ki három tetszőleges egész számot, add össze őket és vizsgáld az összeg utolsó jegyét. Több esetet vizsgálj meg! Vizsgáld az összeadandókat paritás szempontjából is! Mit veszel észre?
2. Válassz ki öt egymás utáni páratlan számot, az összegükből vond ki a köztük levő páros számok összegét. Mit tapasztalsz? Több esetet is vizsgálj meg! Kezdd kis számokkal!

3. Válassz ki hat egymást követő egész számot. Próbáld szétosztani két csoportra őket úgy, hogy az összegük egyenlő legyen! Kezdd kis számokkal! Tapasztalataidat jegyezd le!
4. Adj össze 6, (7, 8, 9) egymást követő egész számot. Lehet-e az összegük 6-tal (7-tel, 8-cal, 9-cel) osztható? Lehet-e az összegük 5-tel (6-tal, 7-tel, 8-cal) osztható? Miért?
5. Próbálj felosztani egy négyzetet annyi négyzetre átfedés és üres rész kimaradása nélkül, amennyire tudsz! Kezdd kis számokkal! Próbálj szabályszerűséget keresni!
6. Vizsgáld két természetes szám négyzetének a különbségét konkrét számokkal! Bontsd föl szorzatra a különbséget és vizsgáld a szorzatokat a két számhoz viszonyítva! Mit tapasztalsz?
7. Válassz ki négy egymás utáni természetes számot, a szorzatukhoz adj 1-et! Végezd el több esetben ezt a tevékenységet! Vizsgáld a kapott eredményeket! Mit tapasztalsz? Sejtésedet általánosítsd! Bizonyítsd be sejtésedet!

A hetedik feladat vizsgálata

- *A zárt változat és néhány megoldása*

Bizonyítsuk be: Ha négy egymás utáni természetes szám szorzatához 1-et adunk, eredményül egy négyzetszámot kapunk!

1. Szlovákiai megoldás. (Oláh, 1999)

Legyen a egy tetszőleges természetes szám, mely nagyobb mint 2. Akkor a-2, a-1, a, a+1 a szóban forgó négy természetes szám. Jelöljük a négy szám szorzatát N-nel. Bebizonyítjuk, hogy N+1 négyzetszám.

N+1= (a-2)(a-1)a(a+1) + 1 = $\left(a^2-a\right)\left[(a-2)(a+1)\right]+1$= $\left(a^2-a\right)\left[\left(a^2-a\right)-2\right]+1$= $\left(a^2-a\right)^2-2\left(a^2-a\right)+1$ = $\left(a^2-a-1\right)^2$

$a\rangle 2$ esetén $a^2-a-1=a(a-1)-1\rangle 1$, amiből következik, hogy a^2-a-1egy természetes szám.

„Hű de matematikus megoldás!” mondta egy középiskolás tanítványom a megoldást kommentálva.

2. megoldás

Dezső Gábor, Babes Bolyai Egyetem Kolozsvár.

Természetesen szimmetriát kell alkalmaznunk. Legyen a négy természetes szám *a-2, a-1, a, a+1.* Jelöljük x-szel a számegyenesen a négy szám „középpontját”:

$x=a-\frac{1}{2}$.

Fejezzük ki x segítségével a négy természetes számot: $x-\frac{3}{2},x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2},x+\frac{3}{2}$

Vizsgáljuk a 1-gyel megnövelt szorzatukat:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)+1=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{9}{4}\right)+1=x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{16}+1=x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{16}=$$

innen $x=a-\frac{1}{2}$ behelyettesítéssel adódik: $\left(x^2-\frac{5}{4}\right)^2$ = $\left(a^2-a-1\right)^2$

ami $a\geq 2$ esetén egy egész számot ad.

3. megoldás
Legyen a négy egymás utáni természetes szám n, n+1, n+2, n+3. a kérdéses szám legyen N.
N = $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$

E kifejezésről kell belátni, hogy egy négyzetes kifejezés.
Átlagos tanulóknak még két tag négyzetének felismerése is gondot okoz, nem hogy többtagú összeg négyzetének felismerése. Jó tanulók rendelkeznek a háromtagú kifejezés négyzetének formulájával, viszonylag hamar megtalálják a helyes kifejezést, amelynek négyzete N.
Egy nyári matematikai táborban egy finn tanuló bevitte programozható zsebszámoló gépébe N kifejezését, majd a „Factorize” parancs segítségével pillanatok alatt mutatta a négyzetes kifejezést, természetesen széles mosoly kíséretében. Végig kell gondolni a számoló és számító gépek alkalmazási lehetőségeit.

- *A nyitott változat és elemzése*

Válassz ki négy egymás utáni természetes számot, a szorzatukhoz adj 1-et! Végezd el több esetben ezt a tevékenységet! Vizsgáld a kapott eredményeket! Mit tapasztalsz? Sejtésedet általánosítsd! Bizonyítsd be sejtésedet!

A tanulók többsége a középiskolában már megszokja, hogy célszerű kis számokkal kezdeni a vizsgálódást.
0 · 1 · 2 · 3 + 1 = 1
1 · 2 · 3 · 4 + 1 = 25
2 · 3 · 4 · 5 + 1 = 121
3 · 4 · 5 · 6 + 1 = 361
4 · 5 · 6 · 7 + 1 = 841
5 · 6 · 7 · 8 + 1 = 1681
6 · 7 · 8 · 9 + 1 = 3025
Tanulói sejtések
1. A kapott eljárással mindig páratlan számot kapunk.

Ezen állítás indoklása könnyen megy, a számok szorzata mindig páros, ehhez 1-et adva páratlan számot kapunk.

2. A kapott szám 2-vel osztva 1 maradékot ad.

Előbbi állítással ekvivalens állítás.

3. A kapott szám 3-mal, 4-gyel, 6-tal, 8-cal, 12-vel, 24-gyel osztva 1 maradékot ad.

Felhasználjuk azt a törvényszerűséget, hogy négy egymást követő természetes szám szorzata osztható 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 6-tal, 8-cal.

4. A kérdéses szám 1-re vagy 5-re végződik, mégpedig abban az esetben, ha a négy szám szorzata osztható 5-tel 1-re, abban az esetben, ha nem tartalmazza 5-öt tényezőnként, akkor huszonötre végződik.

Az 1-re végződés indoklása megy egyszerűbben: mivel 5 vagy annak többszöröse van a négy tényező között, a szorzat 0-ra végződik, tehát a szám 1-re végződik. Kissé összetettebb az másik eset indoklása: a négy szorzótényező 5-tel való osztási maradéka 1, 2, 3, 4, azaz 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4 alakú. Beszorzással megmutatható, hogy 24-re végződik a szorzatuk, azaz az eredeti szám 25-re fog végződni.

Tapasztalatok a négyzetszámok megsejtésével kapcsolatban

A tanulók többsége nem ismeri a kétjegyű számok négyzetét, így számukra 121, 361 egyáltalán nem tűnik fel, mint négyzetszám. Gyakran rá kell kérdezni, mit mondhatunk 25-tel kapcsolatban azon kívül, hogy páratlan szám és osztható 5-tel, így már rendszerint előkerül, hogy négyzetszám és számológéppel hamar ellenőrzik, hogy a többi kapott szám is négyzetszám.

Az általános állítás felírása 9. osztálytól nem okoz gondot, ismerve a polinomok szorzási szabályát, rendre megkapják a tanulók

N = $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

Már jeleztem, hogy a háromtagú kifejezés megtalálása, melynek négyzete N rendre gondot szokott okozni. Sokat segít a konkrét esetek vizsgálata.

$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 1 = 1^2$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$
$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$
$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = 841 = 29^2$
$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1 = 1681 = 41^2$
$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 1 = 3025 = 55^2$

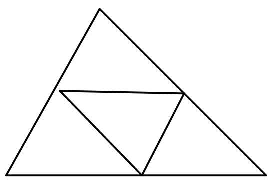
Tanulói sejtések a négyzet alapszámának megtalálására

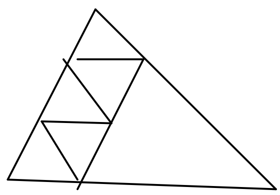
1. Első tényező és negyedik tényező szorzatához 1-et adunk. $n(n+3) +1 = n^2+3n+1$
2. Második és harmadik tényező szorzatából 1-et levonunk. $(n+1)(n+2)-1= n^2+3n+1$
3. Az első és harmadik tényező szorzatához hozzáadjuk az első tényezőt és 1-et. $n(n+2)+n+1 = n^2+3n+1$

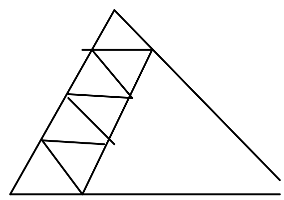
Polinomok szorzásának algoritmusa a legtöbb tanuló számára begyakorolt séma, nehézség nélkül meg tudják mutatni, hogy a kapott kifejezés négyzete N.

2.Feladat

Fel lehet-e bontani egy háromszöget 2015 eredetihez hasonló háromszögre átfedés és hiány nélkül? Fogalmazza meg e zárt feladatot nyitott formában!
A fentiekben felsorolt feladatok közül melyikhez analóg e faladat? Milyen gondolkodási műveletek fordulnak elő a nyitott verzió megoldása során? Milyen bizonyítási módszerek fordulnak elő a sejtés igazolásakor? Mi a megoldás sémája? Fogalmazzon meg további hasonló (analóg) feladatokat!
M.
A feladat nyitott verziója: Bontson fel egy háromszöget annyi, az eredetihez hasonló kis háromszögre, amennyire tudja. Kezdje kis számokkal a felosztást! Próbáljon szabályszerűségeket megfigyelni egyes felosztások között, ami lehetővé tesz tetszőleges sok felosztást. Hány különböző típust lehet találni a felosztások között?
A feladat hasonló a fentiekben közölt négyzet felosztása feladathoz. Abban egy négyzetet középvonalainak behúzásával („kereszt" berajzolásával) négy részre tudtunk osztani, tehát hárommal növeltük a felosztások számát. Ha sikerült 6, 7, 8 számokra a felosztást elvégezni,
a „hárommal több" stratégia segítségével bármely 6-nál nagyobb természetes számhoz eljuthatunk.
Didaktikai megjegyzés: Célszerű először a négyzetes feladatot megoldatni és csak utána a háromszöges verziót, még így is sok diákot emlékeztetni kell a hasonlóságra.
Kísérletező szakasz
A tanulók megpróbálják felosztani az adott háromszöget kisebb részekre. Sok éves tapasztalat mondatja velem, hogy célszerű a feladat kitűzése után a következő tanácsot adni: *„Húzd be a háromszög középvonalait!",* mert különben egy-két okos tanuló jut el csak az alapötletig. Marad még elég munka a tanulóknak! A tanár feladata ezek után hagyja dolgozni a gyerekeket, csak az egyes tanulókhoz menve, egyéni tanácsokat adjon. (Figyelem megosztás effektus elkerülése!)


4


6


8

Egy lehetséges felosztás 4, 6 és 8 esetén.
„A hárommal több" stratégia ezek után már működhet. Külön érdekes kérdés 2, 3, 5 esete, különösen 5 esetében nem könnyű meggyőző érvet adni a lehetetlenségre.
Milyen gondolkodási műveletek fordulnak elő? Indukció: egyes esetek vizsgálata. *Analógia:* hasonló elv működik a többi esetben. *Általánosítás*: Minden 6-nál nagyobb vagy egyenlő természetes számra van felosztás.
Bizonyítási módszerek: Eset megkülönböztetés: számok hármas maradékosztályai. *Teljes indukció*: konkrét kezdő számokra van felosztás, „ha egy számra van felosztás, akkor a hárommal nagyobb számra is van" elve.

Megoldás sémája: kezdő számra találtam megoldást, utána a „hárommal több” elv és a hármas maradékosztályok elve segítségével eljutunk bármely megfelelő természetes számhoz. Így 2015 esetén, amely 3-mal osztható a 8-as felosztásból indulunk ki és (2015-8):3=669 „középvonal háromszög” behúzásával megkapjuk a kívánt felosztást

Hasonló feladatok

1. Osszunk fel egy téglalapot az eredetihez hasonló téglalapokra átfedés és hiány nélkül!. Konkrét kis számokkal kezdd! Fel lehet e osztani a téglalapot 2015 hasonló téglalapra?
2. Osszunk fel egy háromszöget háromszögekre átfedés és hiány nélkül! (Nincs semmi plusz kikötés!)

Záró didaktikai megjegyzés: az elemzett feladatot célszerű csoportmunkában, a teljes témakört esetleg projekt munkában elvégeztetni. Alacsonyabb osztályokban célszerű kis háromszöglapokat – különböző méret, de hasonlók – a diákok kezébe adni, így bár a fordított tevékenység lesz: hány darab háromszögből tudunk egy nagyobb hasonló háromszöget összerakni, az eredeti feladat már könnyebb lesz.

Kidolgozott példák elmélete (Worked example)

Egy kidolgozott példa annak a bemutatása, hogy egy feladatot, problémát hogyan oldhatunk meg lépésről-lépésre demonstrálva. Célja az, hogy a tanulók a probléma helyzetekre és az azokhoz kapcsolódó megoldási lépésekre koncentráljanak, így a megoldási sémát is elsajátítsák. Mivel a probléma teljesen új, nem kell sok erőfeszítést tenniük a keresésre, csak a sémára koncentrálhatnak, az beépül a hosszú távú memóriájukra. A nemzetközi szakirodalomból idézünk egy konkrét példát. (Atkinson, 2000)

PROBLEM TEXT: From a ballot box containing 3 red balls and 2 white balls, two balls are randomly drawn. The chosen balls are not put back into the ballot box. What is the probability that a red ball is drawn first and a white ball second?

SOLUTION:

STEP 1:

Total number of balls:	5
Number of red balls:	3
Probability of red ball on first draw:	3/5

STEP 2:

Total number of balls after first draw:	4
Number of white balls:	2
Probability of white ball on second draw:	2/4

STEP 3:

Probability that a red ball is drawn first and a white ball is second: 3/5*2/4 = 6/20 = 3/10

ANSWER: The probability that a red ball is drawn first and a white ball is second is 3/10.

FIGURE 1. *Worked example from Renkl, Atkinson, and Maier (2000)*

A fenti kidolgozott példa magyar fordítása

Egy dobozban 3 piros és 2 fehér golyó van. A dobozból véletlenszerűen kiveszünk két golyót úgy, hogy a kivett golyót nem tesszük vissza. Mi a valószínűsége, hogy elsőre piros, másodikra fehér golyót húzunk ki.

Megoldás

1. lépés

Labdák száma összesen 5

Piros labdák száma 3

Annak a valószínűsége, hogy elsőre pirosat húzunk $\frac{3}{5}$

2. lépés

A labdák száma az első húzás után 4

Fehér labdák száma 2

Fehér labda húzásának valószínűsége $\frac{2}{4}$

3. lépés

Annak a valószínűsége, hogy elsőre piros, másodikra fehér golyót húzunk

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

Válasz

Annak a valószínűsége, hogy elsőre piros, másodikra fehér golyót húzunk visszatevés nélkül $\frac{3}{10}$.

Kommentár

Sokszor fordul elő, hogy a tanuló füzetébe kevés információ kerül rögzítésre, így otthon nincs lehetősége a tanult koncepciót átismételni. Ehhez jön még, hogy sok magyar matematika tankönyv kidolgozott mintapéldái nem ilyen részletesek. A tanuló a fenti példa alapján újra végig gondolhatja a visszatevés nélküli húzási eljárás lényegi lépéseit.

A feladatot a feltételes valószínűség segítségével is megoldhatjuk. Legyen *A* esemény, hogy elsőre pirosat húzunk, *B* esemény, hogy másodikra pedig fehéret húzunk, úgy, hogy nem tettük vissza az első kiválasztás után a golyót. Keressük annak a valószínűségét, hogy másodszorra fehéret húzunk azzal a feltétellel, hogy elsőre pirosat húztunk ki.

P(AB)=P(B/A)·P(A)= $\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

Természetesen felhasználtuk az előző megoldásból P(B/A) illetve P(A) értékeit.

A példák alapján történő tanításnak nagy hagyománya van a fogalomképzésben, bizonyítások tanításánál, de eljárások, algoritmusok tanításánál is. a következőkben erre mutatunk lehetőségeket.

a) Tétel bizonyítása előkészítő példákkal

Tétel: A prímszámok száma végtelen

Tekintsük a következő kifejezéseket!

$N_1 = 2 \cdot 3+1 = 7$ prímszám

$N_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5+1 = 31$ prímszám

$N_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7+1 = 211$ prímszám

$N_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11+1 = 2311$ prímszám

$N_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13+1 = 30031 = 59 \cdot 509$ összetett szám, de az első hat prímszámhoz képest relatív prímszámokat kaptunk „újabb prímszám”.

A fenti példák alapján látják a tanulók, megtapasztalják, hogy ha összeszorozzuk a prímszámokat az elsőtől kezdve egy bizonyos prímszámmal bezárólag és a szorzatukhoz 1-et adunk, az eredmény vagy egy eddigiektől eltérő prímszám, vagy egy összetett szám, amelynek csak az eddigiektől eltérő prímszám osztója van. Ez sokat segít a formális bizonyítás követéséhez, megértéséhez.

Tétel: A prímszámok száma végtelen

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy vége sok prímszám létezik. $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots p_n$

Képezzük ezen számok szorzatát és adjunk 1-et a szorzathoz, vizsgáljuk e számot.

N= $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n+1$

N vagy „új” prímszám, vagy olyan összetett szám, melynek csak az eddigi prímszámoktól eltérő prímosztója van. (A számelmélet alaptételének alkalmazása.)

Tudtunk egy új prímszámot konstruálni, azaz mindig van újabb és újabb prím, ellentmondásba jutottunk feltevésünkkel, hogy véges sok prímszám van.

Megjegyzés

A konkrét példák alapján való magyarázat után az indirekt bizonyításra is egy példát láthatnak a tanulók.

Hány kidolgozott példa szükséges?

A kérdés vizsgálatához egy konkrét szituációt mutatok be.

Egy foglalkozáson a Bernoulli kísérletek valószínűségeit vizsgáltuk. A 12. osztályos tanulók számára teljesen új volt e probléma. Matematika fakultációs csoport tagjai voltak, többnyire jeles matematika osztályzattal. A következő információt kapták egy feladatlapon:

Bernoulli kísérletről beszélünk, ha egy véletlen eseménynek kétféle kimenetele van: talált – nem talált, siker – sikertelenség, A kísérlet akárhányszor elvégezhető úgy, hogy közben a valószínűségek nem változnak. Ha n-szer végezzük el a kísérletet, akkor *k* találat (siker) valószínűsége *P(X=k)*= $\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Példák Bernoulli kísérletre: pénzérme feldobása (fej – írás), kockadobás (párosat dobunk – páratlant dobunk), minden olyan játék, amelyben a győzelem valószínűsége állandó, gyári termékek, melyeknél a selejtes termék valószínűsége állandó, adatátvitel, ahol minden bit egység azonos valószínűséggel lesz hibás.
Nem Bernoulli kísérletek: egy adott nap esős lesz-e az időjárás vagy sem, egy tanuló által elkövetett hibák egy feleletválasztós tesztben.
Két kidolgozott feladat következett magyarázattal.

1. Egy kockával nyolcszor dobunk. Mi a valószínűsége, hogy három alkalommal kapunk 1-est, vagy 2-est?
2. Egy pénzérmét 20-szor feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy 8 alkalommal kapunk fejet?

A harmadik feladat a következő volt: *Egy rajzszöget ötször dobunk föl. Annak a valószínűsége, hogy lapjára esik 0,4. Vizsgáljuk a lehetséges kimenetelek, események valószínűségeit!*
Egy tanuló kérte, hogy ezen a feladaton keresztül is magyarázzam el a Bernoulli kísérlet lényegét, mert még nem állt össze benne a kép teljesen. Harmadszor is ki kellett emelni, hogy két kimenetel van állandó valószínűséggel, a binomiális együttható szorzó azért szükséges, mert a vizsgált esemény többféleképpen következhet be. Például öt dobás során két lap $\binom{5}{2}$ féleképpen fordulhat elő. **„Ja, most már értem!”** mondta örömmel a tanuló.
Föltételezve, hogy tanáraink és diákjaink használják a matematika tankönyvüket, érdemes lenne megvizsgálni hány kidolgozott példa van az egyes fogalmak, eljárások bevezetésére.
Például a *Sokszínű Matematika 8. osztály (Mozaik 2010*) következő fejezeteiben a kidolgozott példák száma:
„*Válasszuk szét az eseteket*!” 4 kidolgozott példa 110 – 111. oldalak. *Szöveges feladatok megoldása. „Hány éves a kapitány?*” 5 kidolgozott példa, 57 – 60 oldalak. „*Gondoltam egy számra*” 3 kidolgozott példa, az első kidolgozott példa kapcsán konkrét számok segítségével, majd általánosan is felírja a kétjegyű számok sémáját: 10a+b.
A Mozaik hagyomány folytatódik a középiskola felsőbb osztályaiban is. 11. osztályos tankönyv „*Exponenciális függvények ábrázolása*” 5 kidolgozott példa 81 – 83 oldalak.
Sajnos az új kísérleti 9. osztályos matematika tankönyvben rendre egy-egy kidolgozott példa szerepel. Például mindenegyes egyenletrendszer megoldási módszerre egy – egy kidolgozott feladat szerepel. Matematika 9 Második kötet. Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet 104 – 105 oldalak.
Félve jegyzem meg, hogy egy alkalommal megkérdeztünk körülbelül 100 matematika tanárt, használják-e tanításukban a matematika tankönyveket, Egyharmad rész rendszeresen használta, egy harmad rész csak mint feladatgyűjteményt és a maradék egy harmad rész sohasem használta a tankönyveket, még a feladatokat sem! Így beszélhetünk kidolgozott példákról, elemezhetjük azokat, ha a gyakorlat nem figyel oda!
A nemzetközi szakirodalomban a kidolgozott feladatok alkalmazása után van ahol a „kiegészítő”, hiányos megoldású feladatokat javasolják, így a tanulónak egyre többet

kell alkalmaznia az elsajátított sémát, mígnem eljut az adott típusú feladatok teljesen önálló megoldásához. (Completion effect)
Példa
Sam és Amanda könyveket vásárolnak. Sam 4-gyel többet vásárolt, mint Amanda által vett könyvek kétszerese. Összesen 15 könyvet vettek.
a. Milyen típusú a probléma?
  A. Kombinálás és kombinálás
  B. Összehasonlítás és kombinálás
  C. Összehasonlítás és összehasonlítás
  D. Egyik sem a fentiek közül
b. Ha *s* jelöli a Sam által vett könyvek számát és *a* az Amanda által vett könyvek számát, az alábbi egyenletek melyek modellezik a fenti vásárlási problémát?
A) s=2(4 + a) s+a=15
B) s+4=2a s+a=15
C) s=2a+4 s+a=15
D) s+4=2(a-4) s+a=15 (Cooper, 1998)

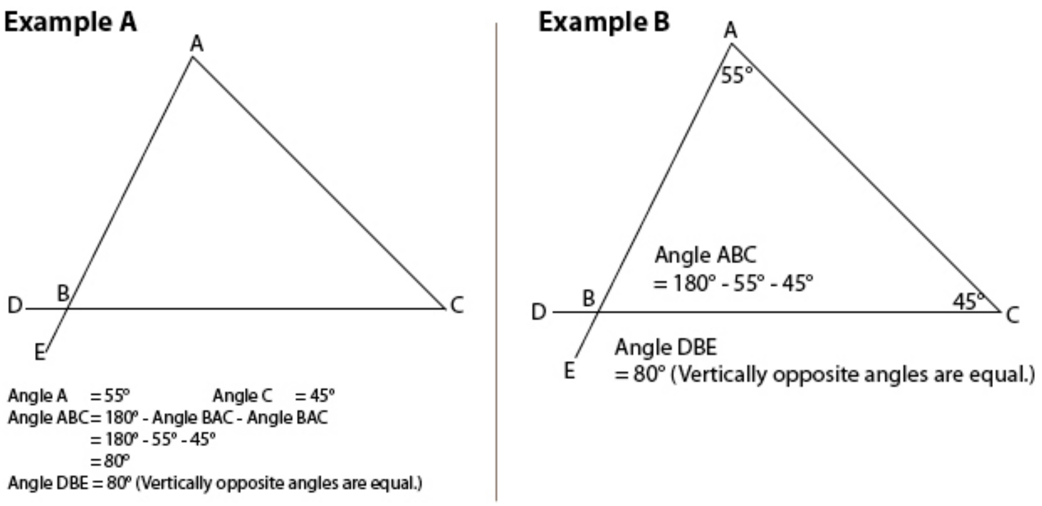
Kiemelendő, hogy a tehetségesebb tanulók számára gyakran elegendő egy kidolgozott példa, sőt többek már régebbről ismerhetik az új fogalmat, módszert, eljárást. Nekik igényesebb feladatot kell adni, mert számukra inkább zavaró az ismert témák újra és újra való elővétele. (Expertise reversal effect)

3.Feladat
1. Elemezze a Sokszínű Matematika 8 tankönyv „Válasszuk szét az eseteket!” (110-113 oldalak) kidolgozott példáit! Ugyancsak vizsgálja meg témához tartozó feladatokat, elemezze ezeket didaktikai szempontból! (Téma, kidolgozottság, nyitottság, séma kiemelés, konkrét reprezentációk, gyakorlás)

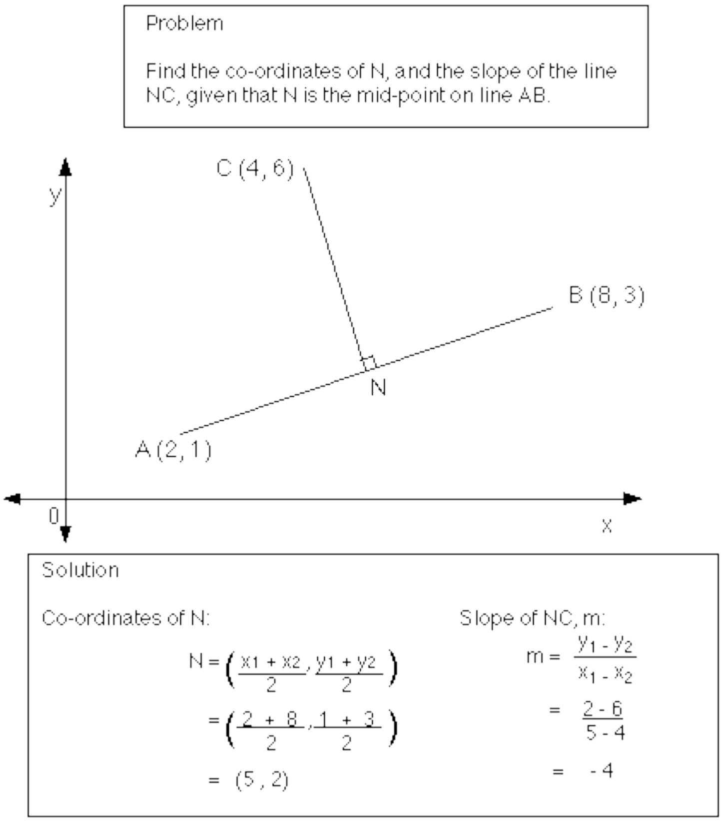
M.
Témáját tekintve három típus fordul elő: fagylaltos, számjegyes, ülésrend.
*Kidolgozottság s*zempontjából a fagylaltos feladatban célszerű a lehetőségek gráfját megrajzolni, sok tanulónak gondot okoz a szorzási szabály megértése, ehhez segíthet a konkrét esetek felrajzolása. A példa végén célszerű kiemelni, megfogalmazni a szorzási szabályt.
A második példa esetén célszerű konkrét számkártyákkal kísérleteztetni a tanulókat – materiális reprezentációk – így nagyobb esély van a feladat és megoldásának mentális reprezentációjára. Itt is hiányzik a feladat megoldási sémájának – eset megkülönböztetés – kiemelése.
A harmadik feladatra is érvényes a konkrét kártyákkal való kirakás fontossága. A rajzolás egy konkrét tevékenység képi reprezentációja már, több tanuló számára túl gyors, kell a konkrét kísérlet! Megoldás sémáját – szorzási szabály – itt is kiemelném.
Negyedik példa: Itt már több feltételnek megfelelő számokat kell meghatározni. Jónak tartjuk a második megoldást – gráfos szemléltetés – és azt, hogy a feladat végén a megoldási sémát kiemeli a tankönyv.
Feladatok: Mindegyik feladat zárt feladat, határozott kérdésekkel.
Hiányoljuk, hogy a feladatok között nincs olyan, mely a négy példában alkalmazott megoldási sémák közvetlen gyakorlását szolgálná. Igaz, hogy a tankönyvhöz tartozik feladatgyűjtemény, ott vannak gyakorló feladatok, de didaktikai szempontból szerencsésebb lenne, ha a tankönyvben lennének ezek, jobban látnák a tanulók a módszerek direkt alkalmazását.

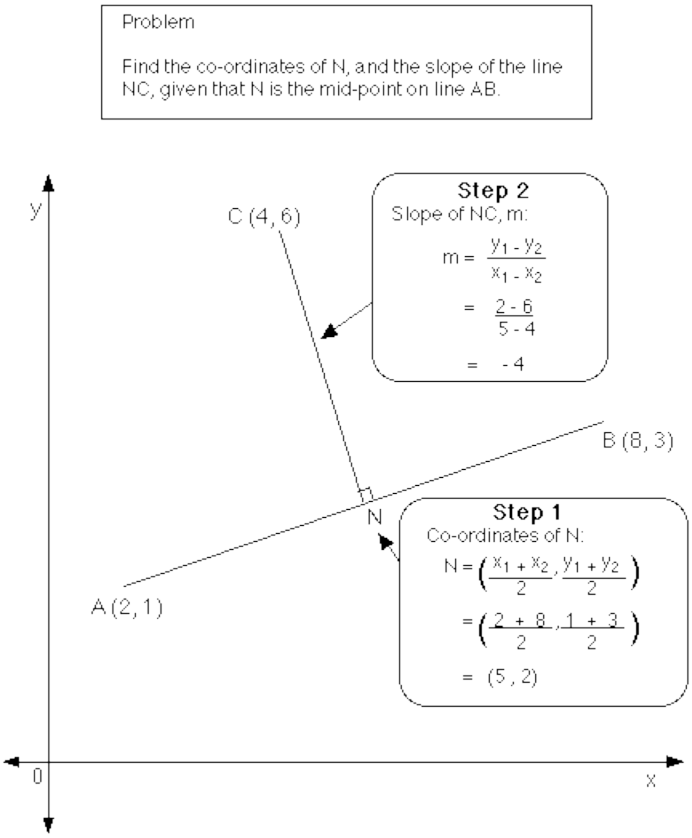
Figyelem megosztási effektus

Már a korábbiakban is említettük, hogy a tudatos figyelem kapacitás nagyon korlátozott. Ezt a tanítás tervezésekor figyelembe kell venni. A külső kognitív terhelés a figyelem megosztás egyenes következménye.
A tanuló figyelmének megoszlása akkor történik, ha a tanulónak olyan folyamatokat kell végezni és integrálni, amelyek különböző modalitásúak és el vannak különítve egymástól. Sok tanítási anyagban szerepel képi (grafikus) komponens és szöveges komponens is. Gyakran a képi komponens a szöveg alatt, fölött vagy mellett szerepel. A tanulónak mindkét komponensre figyelnie kell, mivel külön egyik sem elegendő a probléma megoldására. Megértés és tanulás csak akkor következik be, ha a tanuló mentálisan integrálja a különböző – képi és verbális – információkat. A munkamemória kapacitásának egy része e források mentális integrációjához szükséges, következésképpen nem áll rendelkezésre a tanulási folyamat támogatására. (Figyelem ide –oda „ugrál”) Jó tanítási tervezés egyesíti (fizikailag integrálja) a grafikus és szöveges információt, így a tanulót felmenti ettől a tevékenységtől, felszabadítva munkamemória kapacitást. Ez a hagyományos téri figyelem megosztási effektus. Beszélhetünk időbeli figyelem megosztási aspektusról is, ha összetartozó információk szimultán vannak prezentálva.
Az alábbiakban egy egyszerű geometriai feladaton keresztül illusztráljuk, hogy a helyes tervezés mennyire figyelembe veszi a figyelem megosztás elkerülését. (B. variáns) Utána egy koordinátageometriai feladat megoldás variánsait mutatjuk be, itt is a második változat teszi könnyebbé a feladat megoldásához szükséges mentális reprezentáció megalkotását.
(Merrienboer et. al. 1988)



A következő koordinátageometriai feladat megoldásának kétféle változatában a második változat hatékonyabbá teszi a megoldás mentális reprezentációját.





(Cooper ,1988)

4.Feladat

Elemezze a figyelem megosztási aspektus szempontjából a Sokszínű Matematika tankönyv „Hányféle útvonal lehetséges? Az összegezési módszer" című rész 98-101 oldalakon bemutatott kidolgozott példát!

M.

A különböző útvonalak csoportosítása a szökőkút illetve torony érintése alapján történik. Célszerű ezeket jobban elválasztani, esetleg nagyobb térközzel, hiszen a felső négy a szökőkutas út. Az ábra mellett a lap szélén szerepel minden út szimbolikus jelölése J illetve L betűk sorozatával. A tanulóknak ide-oda kell „ugrálni" a figyelmével az azonosításhoz, célszerű az útvonal szakaszokhoz odaírni a megfelelő betűket, így nagyobb esély van annak felismeréséhez, hogy három J és két L lehetséges sorrendjeinek a számáról van szó. A 101. oldalon szerepel a 10 útvonal „egyesítése" egyetlen ábrán való szemléltetése. Sokat segíthet egy interaktív tábla, amelyen bemutatható az összes útvonal megfelelő animáció segítségével.

5.Feladat:

Adott a derékszögű koordinátarendszerben a P(3;4) pont és a 2x + y = 4 egyenes. Határozza meg a P ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges egyenes egyenletét! Készítse el a megoldás hagyományos illetve figyelem megosztási effektusos leírását!

M.

Egyéni, ld. előző oldalon a minta.

Egy téma feldolgozása két különböző felfogásban – A szakaszfelező merőleges tanítása feladatlapokkal

A magyarországi matematikatanítás problémamegoldó hagyományaiban fontos helyet tölt be a geometria tanítása. A matematikai gondolkodás folyamatos fejlesztésében jelentős állomás a felső tagozatos kor. Ekkor nemcsak lehetségessé válik már egyszerűbb bizonyítások elvégzése, de szükséges is, hogy minél több megfelelő feladatot kapjanak ehhez a tanulók.

A geometria számos lehetőséget kínál arra, hogy már ezen a szinten is valóban matematikai indoklások születhessenek.

Az utóbbi évek során az oktatásban bekövetkezett változások hatására a geometriára már kevesebb figyelem irányul, és kevesebb idő jut. Ezért különösen is tartjuk fontosnak, hogy a következőkben egy geometriai fogalom, a szakaszfelező merőleges tanításának példáján keresztül, felső tagozatos korosztály számára több lehetőséget is bemutassunk matematikai indoklásokat igénylő különféle feladatokra.

A téma feldolgozása a következőkben két különböző módon felépített feladatlap segítségével történik. Ezek a feladatlapok alkalmasak arra, hogy megadják az órai munka „irányvonalát“ . A feladatlaphoz tartozó kommentárok segítségével követhető a feladatkészítő szándéka is az egyes feladatokkal illetve a lap felépítésével kapcsolatban, és így a fogalom kialakításának módja is.

Az egyes lapok órai feldolgozásra tervezett feladatai után a tervezett házi feladat is szerepel, amely szervesen kapcsolódik az órai munkához.

Az óra tervezéséhez képest természetesen az óra menete változhat, egyes kérdésekre több, más feladatokra kevesebb időre van szükség. Így a konkrét gyakorlatban ezt figyelembe kell venni, és ennek megfelelően a lapot az iskolai felhasználás során rugalmasan kell kezelni. Az első feladatlap esetében éppen az órák hangulatát idézve egy „váratlan” helyzet is tárgyalásra kerül az óra végén.

A feladatlapok különféle előzetes ismeretekre, és tanári oktatási elképzelésre alapoznak.

Az **első feladatlap** inkább a *hagyományos felépítésű órá*t veszi alapul.

A **második feladatlap** az integráló szemléletű, kísérletezésre, *problémamegoldásra irányuló óratervezést* idézi.

A bemutatásra kerülő két lehetséges témafeldolgozás nyilvánvalóan nem kizárólagos lehetőségeket fogalmaz meg. A cél az, hogy példákat mutassunk lényegileg különböző felépítésekre, ugyanazon témához.

A feladatlapok megoldásához a tanulók megkapják az adott feladatlapot és a szükséges eszközöket vagy ez utóbbiakat előzőleg elkészíthetik maguknak(átlátszó papírt, középen lyukas körlapot kartonból, ez utóbbi helyett használható például a Logikai Készlet nagy lyukas műanyag köre is).

A feladatlapon az elgondolt lehetséges megoldások *ilyen írással* és más színnel szerepelnek, így jól követhetőek a feladatlap készítőjének szándékai az adott feladattal, amelyet a továbbiakban még a feladatlapok után következő módszertani elemzések is kiegészítenek.

Egy feladat rejtett kincsei

Feladatok megoldása a matematikatanulásban fontos szerepet tölt be. Az alkalmasan választott feladatok konkrét ismereteket mélyítenek, miközben ezeket régebbi ismeretekkel, más matematikai területekkel is összekapcsolják. Megoldásuk során rutinszerű ismeretalkalmazás, problémamegoldás egyaránt szerepel az adott tanulócsoport számára alkalmas mennyiségben és minőségben.

Ahhoz, hogy egy tanár minél rugalmasabban tudjon feladatokkal dolgozni jó, ha sokféle érdekes és „sokoldalú" feladatot ismer. Egy feladat érdekességét leginkább szövegezése, illetve meghökkentő vagy/és igen „elegáns" megoldása(i) adja/adják, a sokoldalúság pedig elsősorban azt jelenti, hogy sokféleképpen felhasználható.

Az említett két tulajdonsággal elég sok feladat rendelkezik, de ez sok esetben rejtve marad, vagy csak részben nyilvánvaló a „felhasználó" számára.

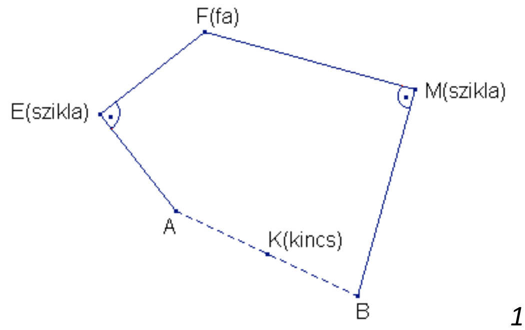
Egy adott feladat esetében mind az érdekesség, mind a sokrétű felhasználhatóság gyakran fokozható a feladat variálásával. Ilyen módon sokféle (további) érdekes kérdéshez el lehet jutni és lehetőség van akár különböző nehézségű feladatok elkészítésére is adott „alapfeladat"-ból kiindulva.

> A következőkben egy eredetileg is érdekes és jól felhasználható feladat, a szokásostól eltérő variálásáról lesz szó, a variációk megoldásai röviden elemzésre is kerülnek, elsősorban a szükséges ismeretek és felhasznált probléma megoldási stratégiák (vö. például Ambrus A. 1995 116-128) szempontjából.

Egy többféle szövegezésben is ismert alapfeladatból kiindulva, a kérdésfeltevésen változtatva egy érdekes jelenséget veszünk nagyító alá, ami gyakran rejtve marad a feladatokban, nevezetesen azt, hogy *mennyire vesszük figyelembe a megoldás során a feladatban megadott információkat*.

Először tekintsük az alapfeladatot (Kincses feladat):

1. *Tengeri kalandozásuk során négy kalóz elvetődik egy lakatlan szigetre. Mivel már rengeteg kincset zsákmányoltak a legértékesebbeket egy nagy ládába zárják és elhatározzák, hogy elrejtik a szigeten. A parton találnak két érdekes alakú sziklát és egy nagy pálmafát. A kincs elásásának módját az alábbi vázlaton rögzítik. Azaz EF=EA, FM=MB, EF⊥EA, FM ⊥ MB.*



1.ábra

Az így kijelölt A és B pontok által meghatározott szakasz K felezőpontjába kerül a kincs.

Megtalálják-e a kincset, ha igen, hogyan?

Mindenekelőtt készítsünk megoldást a feladathoz. Ehhez többféleképpen is nekikezdhetünk.

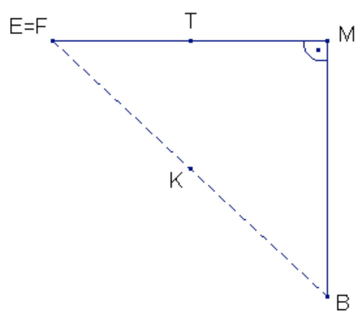
Lehet például kísérletezni papíron, vagy számítógépen pl. GeoGebra interaktív program segítségével annak kiderítésére, hogy van-e esélyük a kalózoknak, azaz független-e a kincs helye a fa helyétől, hiszen az már nincs a helyén.

- Feladat

Olvassa el az előbbi feladat következő megoldását és gondolja meg, hogy helyes-e:

Mivel a fától függetlennek kell lennie a kincs helyének, hiszen különben nem találnák meg, feltehető, hogy például a fa az egyik sziklával azonos helyen volt.

Így például az ábra szerint a fa E pontban van és végrehajtva a kincselrejtési eljárást, az 1. ábra jelöléseivel TK középvonal lesz EMB derékszögű háromszögben, és így TK⊥EM, TK=1/2MB=1/2EM.



2. ábra

M.

A feladatmegoldás nem jó, hiszen eleve feltételezi, hogy a kincs helye független a fa helyétől, pedig erről a feladatban nem volt szó.

A megoldást ki kell egészíteni ennek bizonyításával.

Visszatérve eredeti kérdésünkhöz, az előbbi megoldás arra volt példa, hogy van, aki egyszerűsíteni szeretné a problémát, vagy éppen jó ötletét alkalmazni, és így tudatosan vagy éppen önkéntelenül, de figyelmen kívül hagy/beletesz részleteket az adott feladatban. Itt a bizonyításra váró megállapítással egészítette ki a megoldó az eredeti feladatot: a fa helyétől független a kincs helye.

- Feladat

Oldja meg a „kincses" feladatot többféleképpen és gondolja meg, milyen ismereteket, problémamegoldási stratégiákat használt a megoldáshoz.

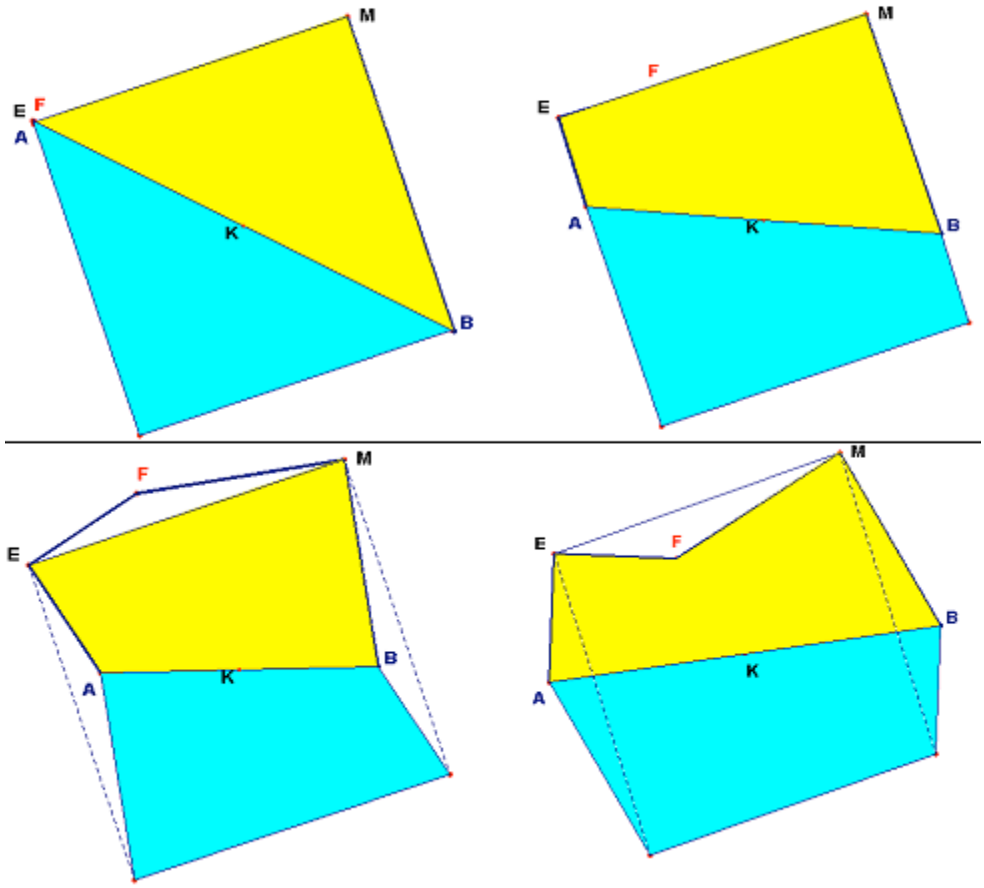
A megoldáshoz használhat segítséget (S) vagy gondolkodhat önállóan.

S

Az alábbi segítő ábrákat Vásárhelyi Éva készítette a feladathoz a CABRI II interaktív geometriaprogram segítségével.

A segítség alapgondolata: *Irányítsuk a figyelmet a négyzetre*

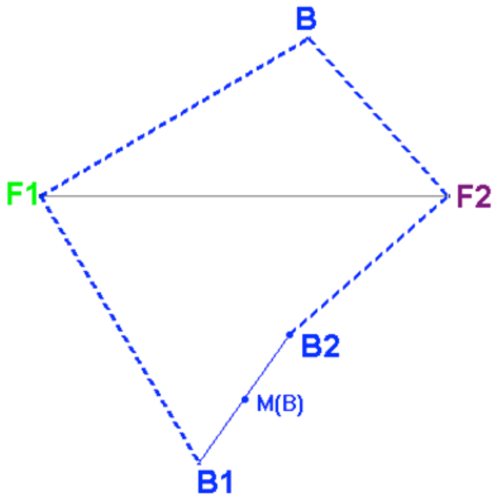
A feladat ábrájához megfelelő mozgatható ábrát készített, és azt vizsgálta, hogyan változik a kép, ha a fa (F) speciális helyzetbe kerül.



3.ábra

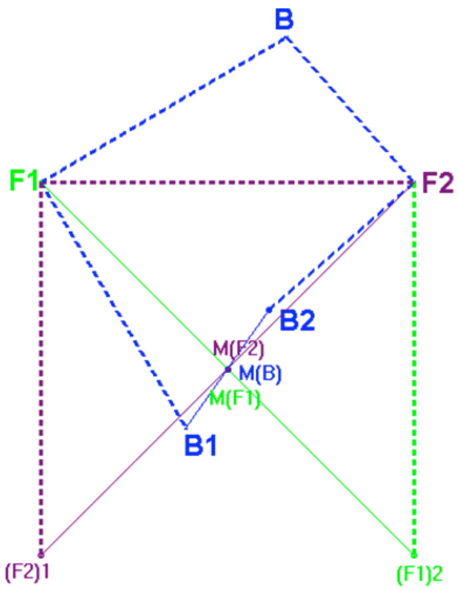
Majd a következőket javasolta:

1. Végezzük el a kincs helyének megadását szerkesztéssel



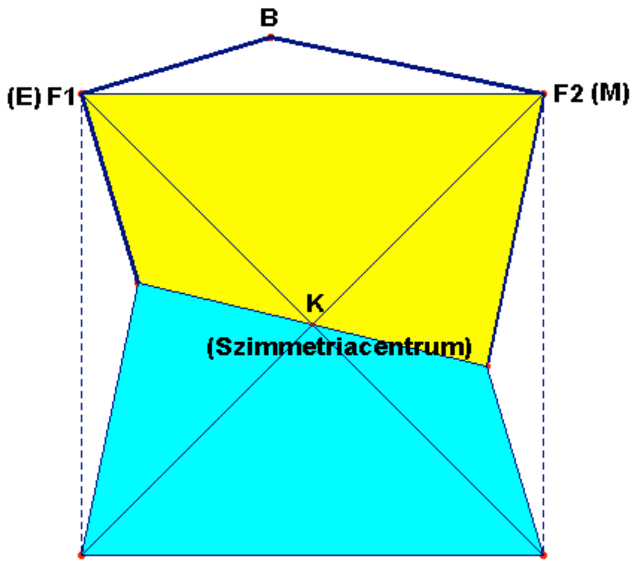
4. ábra

2. Nézzük meg hova kerül a kincs azokban a speciális helyzetekben amikor a fa egyik vagy másik szikla helyén van:



5. ábra

3. A sejtés megfogalmazása: M(B)=M(F1)=M(F2)= A négyzet középpontja
4. Bizonyítás a középpontos szimmetria felhasználásával (ezen alapul például a következőkben megadott 1 M megoldás).



6. ábra

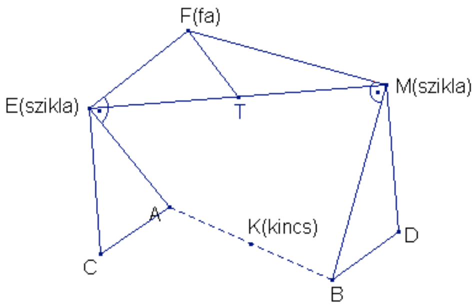
A megoldások többféle alapötletet használhatnak fel kiindulásként, és gyakorlatilag két nagy csoportba oszthatók:

- Forgatásokon, és a forgatás révén keletkezett alakzatok tulajdonságain alapulók
- Koordinátageometriai ismereteket alkalmazók.

Kezdjük az előbbiekhez tartozó megoldásokkal.

1.M

Szerencsére megtalálják a kincset, mégpedig a következők miatt:



7. ábra

Jelölje T az EM szakasz felezőpontját (7. ábra) . Az EFT háromszög 90º-os elforgatottja az EAC háromszög, az MFT háromszög M körüli 90º-os elforgatottja az MBD háromszög.

A forgatásokból adódóan AC=BD és AC||BD, így az ABCD négyszög (esetleg elfajuló) paralelogramma.

Ebből következik, hogy C, K, D pontok egy egyenesen vannak, hiszen K a paralelogramma középpontja. Így mivel EMCD téglalap CD=EM, CD párhuzamos EM és az előbbiek miatt K egyben a CD szakasz felezőpontja. Azaz TK⊥EM és TK=1/2EM. Így már könnyen megtalálható a kincs.

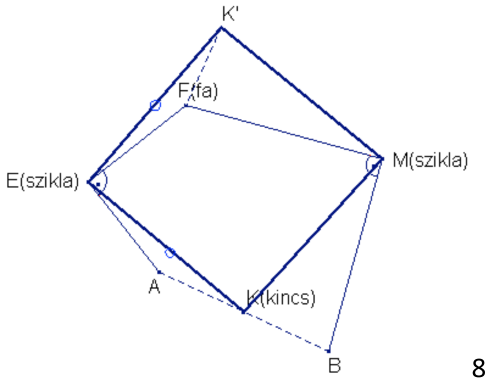
Felhasznált ismeretek: geometriai transzformációk (forgatás) és tulajdonságai, a paralelogramma tulajdonságai

Problémamegoldási stratégiák: ábrakészítés, speciális helyzet keresése, összefüggések keresése,

A következő megoldás is forgatáson alapul, most azonban a Kincs helyét (K) forgatjuk „visszafelé” és az így kapott ábrában keresünk egybevágó háromszögeket.

2.M

Forgassuk el K-t 90 º-kal E körül az ábra szerint, legyen a kép K’.



8. ábra

Ha K’ nem illeszkedik EF-re, akkor nyilván EAK és EFK’ (esetleg elfajuló) háromszögek egybevágók és MBK háromszög is egybevágó MFK’ háromszöggel (esetleg elfajulóak), valamint KEK’∠=KMK’∠=90º.

Eszerint az EKMK’ deltoid négyzet.

Így K rajta van az EM átló felezőmerőlegesén, mégpedig az EM szakasz C felezőpontjától EM/2 távolságra a vázlat szerinti oldalon.

Megjegyzés: A vázlat megadja, hogy melyik oldalon kell ásni, de akkor sincs probléma, ha véletlenül rossz oldalon árnak, hiszen ezt gyaníthatják egy idő után, és átmehetnek a másik oldalra, és ott már megtalálhatják a kincset.

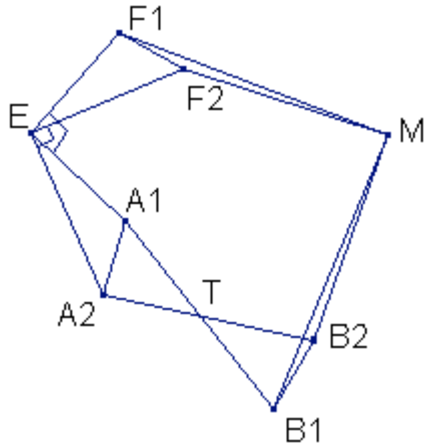
Felhasznált ismeretek: geometriai transzformációk (forgatás) és tulajdonságai, háromszögek egybevágósága, deltoid és négyzet kapcsolata

Problémamegoldási stratégiák: ábrakészítés, speciális helyzet keresése, összefüggések keresése,

A következő megoldás két tetszőleges fa-helyet választva adja meg a kincs (két) helyét, és belátja, hogy ezek a helyek egybeesnek:

3.M

Válasszunk két F_1, F_2 pontot és adjuk meg ezekkel az A_1 (A_2) és B_1 (B_2) pontokat. Belátjuk, hogy az így kapott K_1 (K_2) pontok (kincshelyek) egybeesnek.



9. ábra

A_1B_1 és A_2B_2 szakaszok metszéspontja legyen T. Amennyiben igaz, hogy T mindkét szakaszt felezi, akkor az állítás igaz.

EF_1F_2 és E A_1A_2 háromszögek egy bevágóak, mert egymás 90 fokos elforgatottjai és hasonlóan M F_1F_2 és MB_1B_2 háromszögek is. Valamint $A_1A_2 \perp F_1F_2 \perp B_1B_2$. Ebből következik, hogy A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok egyenlők és párhuzamosak is egymással.

Emiatt A_1A_2 B_1B_2 paralelogramma, melyben T a paralelogramma középpontja, így valóban felezi a jelzett szakaszokat.

Mivel így a szerkesztés során F-től függetlenül ugyanazt a K pontot kapjuk, a kincs megtalálható. A befejezés a korábbiakban már látott módon történhet, megadva a kincs helyét.

Felhasznált ismeretek: geometriai transzformációk (forgatás) és tulajdonságai, háromszögek egybevágósága, paralelogramma tulajdonságai,

Problémamegoldási stratégiák: ábrakészítés, speciális helyzet keresése, összefüggések keresése,

4.M

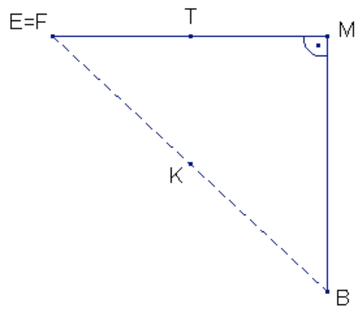
Meggondolva a feladatban található feltételeket:

Az E körüli pozitív irányú 90º-os forgatás A-t F-be viszi.

Az M körüli pozitív irányú 90º-os forgatás F-t B-be viszi.

Megállapítható, hogy a két egybevágósági transzformáció egymásutánja egy olyan 180º-os forgatás, melynek K' középpontját tekintve EK'M háromszög E-nél illetve M-nél levő szögei 45º-osak, azaz ez a háromszög derékszögű, egyenlőszárú. Mivel ez a transzformáció a fentiek szerint A-t B-be viszi, így K' éppen az AB felezőpontja, azaz K'=K. Ezzel K-t megadtuk F-től (a fa helyétől) függetlenül.

Mivel K helye független F-től így megtalálják a kincset, hiszen F-helyét tetszőlegesen felvéve (például E=F vagy M=F választás igen kedvező) megadható a kincs helye. A kincs tehát például úgy található meg, ha az E és M pontokat összekötik és megkeresve a felezőpontot, abban merőlegest állítanak EM-re, majd felmérik erre EM szakasz felének hosszát.



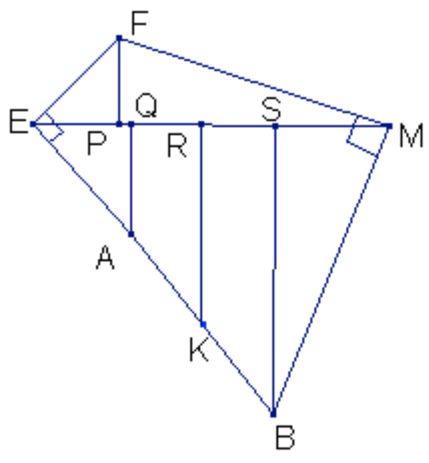
10. ábra

Felhasznált ismeretek: geometriai transzformációk (forgatás) és tulajdonságai, forgatások egymásutánja, egyenlőszárú derékszögű háromszög,

Probléma megoldási stratégiák: ábrakészítés, speciális helyzet keresése, összefüggések keresése.

5.M

A megoldáshoz osszuk fel az eredeti ábrát az alábbi módon, ahol az F, A, K és B pontokból EM szakaszra húzott merőlegesek talppontjai rendre P, Q, R, és S pontok:



11. ábra

EFP és EAQ valamint MFQ és MBS derékszögű háromszögek egybevágóak ugyanis az E illetve M pontok körüli feladatban szereplő forgatás miatt szögeik és átfogóik egyenlőek. Az ABSQ négyszög trapéz, és KR a középvonala. Mivel EQ=SM=FQ így R az EM szakasz felezőpontja. EP=AQ és MP=SB az említett háromsAz zögek egybevágósága miatt. Így AQ+SB=EM, viszont RK középvonal ennek a fele, azaz EM/2. Ez azt jelenti, hogy a K (kincs helye) az EM szakasz felező merőlegesén van, az R-ből éppen EM/2-nyi távolságra.

Felhasznált ismeretek: háromszögek egybevágósága, trapéz középvonalának hossza.

Probléma megoldási stratégiák: ábrakészítés, speciális helyzet keresése (speciális alakzatokra bontás),

A következőkben a koordinátageometria eszközeit használó megoldásokról lesz szó.

6.M

Legyenek E(-1;0), M(1;0) koordinátájú pontok, $F(f_1;f_2)$ legyen az 1. ábra alapján, $f_2>0$, $-1<f_1<1$.

F-ből az A pontot az E körüli -90º-os forgatással kapjuk, a B pontot +90º-os forgatással. Ennek alapján A koordinátái $(f_2 - 1; -f_1 - 1)$, B koordinátái $(1 - f_2; f_1 - 1)$ lesznek.

Így AB szakasz felezőpontjának koordinátái: $(\frac{f_2 - 1 + 1 - f_2}{2}; \frac{-f_1 - 1 + f_{1-1}}{2}) = (0;1)$

Azaz K helye nem függ F-től, mindig a két szikla által meghatározott szakasz, mint átfogó fölé az ábrának megfelelő oldalra rajzolt egyenlőszárú derékszögű háromszög harmadik csúcsa.

A megoldás természetesen nem függ attól, hogy az EM szakasz felezőpontját választva (0:0) pontnak, (így E és M pontok egymás tükörképei lesznek) a távolságuk egymástól 2 mint az előbbi megoldásban, vagy más érték.

Felhasznált ismeretek: koordináta geometria és geometriai transzformációk (forgatás) és tulajdonságai, felezőpont koordinátái, ,

Problémamegoldási stratégiák: ábrakészítés, speciális helyzetű pontok keresése, összefüggések keresése,

Megjegyzés:

Hasonló megoldás készíthető, ha E-t vagy M-t tesszük az origóba, és ennek alapján dolgozunk.

- Feladat

Amennyiben eddig nem koordinátageometriai eszközöket használó megoldást készített, vagy nem sikerült még megoldania a feladatot, készítsen olyan megoldást az előbbiek alapján, amelyben az origó az E vagy az M pontokban van.

M.

Hasonlóan végezhető, mint az 6. M.

- Feladat

Térjünk vissza az eredeti feladathoz, és az első feladatban szereplő (helytelen) megoldáshoz. Vajon lehetséges-e a feladatnak olyan változatát elkészíteni, hogy ez a megoldás is helyes legyen?

M.

Igen, ha az kérdést például a következővel helyettesítjük:

Kérdés: A rafinált rablók mégis megtalálják a kincset. Hogyan?

Ebben az esetben már megadtuk a választ arra a kérdésre, hogy megtalálják-e a kincset, tehát annak helye nem függött a fa helyétől. Így tehát nem maradt más hátra, mint a hely megadása. Ez viszont már igen „kényelmes” hiszen a fát akárhova helyezhetjük, például E vagy M pontokba is.

A „Kincses feladat” két változata mindössze a kérdésfeltevésben különbözött egymástól, ám ez jelentősen befolyásolta a megoldás módját, hiszen a második esetben többletinformációt is tartalmazott így sokkal egyszerűbbé vált a megoldás.

Legalábbis a megoldás folyamatát összehasonlítva így tűnik.

A tapasztalat azonban az, hogy a megoldás egyáltalán nem lesz egyszerű így sem. Ezt bizonyítják például tanárszakos hallgatók körében végzett felmérések (Ambrus G., 2011).

A felmérés a „Kincses feladat” említett két változatával készült. A hallgatók egyidejűleg megkapták a két változatot egyéni megoldásra. Ehhez két hét állt rendelkezésükre.

A feladat nemcsak nehéz volt, de annak ellenére, hogy a két változat egymás mellett szerepelt, senki nem vette észre a különbséget a kérdésfeltevésben, és ha megoldást tudtak adni, akkor mindkét változathoz ugyanazt adták. Megjelent tehát a „túlbizonyítás”, azaz a többletinformáció (a kalózok megtalálják a kincset) figyelmen kívül hagyásával történő megoldás.

Látható tehát, hogy a feladatmegoldás során nemcsak „többlet információ”-t próbálnak alkalmazni a megoldók, de „információ figyelmen kívül hagyása” is előfordulhat.

A „túlbizonyítás” jelensége megfigyelhető más esetekben is feladatmegoldás során és van, aki miután rájön/megtudja, hogy feleslegesen dolgozott, tevékenységét azzal indokolja, hogy „biztos, ami biztos, ezt is bebizonyítottam hozzá”.

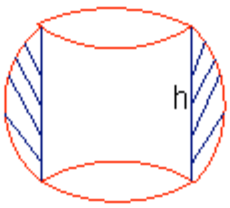
A problémamegoldási folyamatban Pólya György felhívja a figyelmet az utolsó lépésben - a megoldás vizsgálata (Pólya, 1977) a bizonyítás ellenőrzésére és lehetséges rövidítésére is. A megoldási folyamat során tehát nemcsak a megoldási lépések helyességét kell ellenőrizni, hanem azt is, hogy valóban szükségesek-e ezek a lépések a megoldáshoz.

Érdemes még részletesebben is megvizsgálni az ilyen „típusú” feladatpárokat – hiszen a „Kincses” feladat két változata feladat párnak is felfogható, illetve akár egy feladattípusnak is.

Ilyen feladatpárok találhatók példatárakban is, de ritkán, és „elkülönítve”, azaz különböző helyeken bukkanhatunk rá a pár tagjaira:

A következő (gyűrűs) feladatpár bár más szövegezéssel, de szintén ilyennek tekinthető.

2. a)



12.ábra

Egy golyó közepén egy lyukat fúrtak. A furat falának hossza h=6 cm. *Mekkora a maradék test térfogata, (vagyis az a térfogat, amelyet úgy kapunk, hogy golyótérfogatból kivonjuk a furattérfogatot)? A feladat minden további nélkül megoldható, pedig első ránézésre nem is gondolnánk.*

(Hemme, H., 1988)

b) Egy R sugarú gömböt középpontján átmenő tengelyű hengerrel átfúrunk úgy, hogy egy 2 m magasságú „karikagyűrű” maradjon belőle (m<R).

Rögzített m esetén hogyan kell megválasztani a gömb R sugarát, hogy a gyűrű térfogata maximális legyen? (Reiman, I., 1986)

Lehetne természetesen az is a kérdés, hogy *adott m esetén bizonyítsuk be, hogy a gyűrű térfogata független R-től.*

(Ez utóbbi változat is létezik, némileg hosszabb történettel: A Matematika Tanítása, 1996)

Meggondolva a feladatpárok szerkezetét, más feladathoz is elkészíthető a párja, attól függően, hogy melyik változat áll rendelkezésre, a külön információval már könnyített, vagy a másik.

- Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

$$P=(x-a)(x-b)(x-c)\left[\frac{a-b}{x-c}+\frac{b-c}{x-a}+\frac{c-a}{x-b}\right]$$ kifejezés értéke x-től független!

Határozzuk meg P értékét!

(Lukács O./Scharnitczky V.:Érdekes Matematikai Gyakorló feladatok VI, Tankönyvkiadó, 1975)

Gondolja meg a feladat megoldását és utána adja meg a párját. Ez utóbbit is oldja meg

M.

A jelzett függetlenség számolással közvetlenül adódik.

A következő megfogalmazás lehet a feladat párja:

A $$P=(x-a)(x-b)(x-c)\left[\frac{a-b}{x-c}+\frac{b-c}{x-a}+\frac{c-a}{x-b}\right]$$ kifejezés értéke független x-től.

Határozzuk meg P értékét! P értékének megadásához elegendő alkalmas x –t behelyettesíteni, például legyen x=0.

A következőkben további példákat mutatunk előbbihez hasonló feladatpárokra:

5. a) Egy számtani sorozat első n elemének összege $4n^2$. Adjuk meg a sorozat első elemét és differenciáját!

Az első megoldás: Ha n=1 akkor $a_1=4$, ha n=2 akkor 4+4+d=4x4, azaz d=8 kell, hogy fennálljon. Be kell látni, hogy az így kapott sorozat valóban rendelkezik a mondott tulajdonsággal, azaz az első n elemének összege $4n^2$.

felhasználva az ismert összegzési összefüggést:

$n/2(2x4+(n-1)8)=8nxn/2=4n^2$ (1)

Vagyis a kapott számtani sorozat eleget tesz a feltételnek.

A második megoldás:

Felhasználva az előbbi összefüggést (1):

$2a_1+(n-1)d=8n$, amiből $2a_1-d=n(8-d)$ adódik.

ha van az előírtaknak megfelelő számtani sorozat, akkor a $2a_1$-d értéke n-től független. Az előbbi egyenlőségben ez akkor teljesül, ha 8-d=0, azaz d=8 és $a_1=4$. Ez így megadott sorozat pedig nyilvánvalóan eleget tesz az eredeti feltételnek.

b) Egy számtani sorozat első n elemének összege $4n^2$. Adjuk meg a sorozat első elemét és differenciáját!

Noha látszólag kevés az adat mégis van egyértelmű megoldás.

A feladat megoldása:

A kiegészítő megjegyzés miatt elegendő néhány behelyettesítést vizsgálni és ennek segítségével megadni a sorozatot. Például az előbbiekben említett n=1 és n=2 helyeken. Ezzel $a_1=4$ és d=8, ami az említett egyetlen megoldás tehát.

- Feladat

Készítsen legalább két ilyen típusú feladatpárt a megoldásukkal együtt!

M.

Egyéni

- Feladat

Gondolja meg, miért érdemes az említett feladatpárokat alkalmazni a matematika tanításában.

M.

Például mert:

- Fejleszti a problémamegoldó készséget.
- A sematikus feladatértelmezés/megoldás ellen hat
- A könnyebb változatot sokan meg tudják adott esetben oldani
- Ráirányítja a figyelmet a speciális helyzetek vizsgálatára

A továbbiakban befejezésül még néhány, hasonló szempontból érdekes feladat következik.

A következő feladat szintén rejtett kincset tartalmaz, de másképpen:

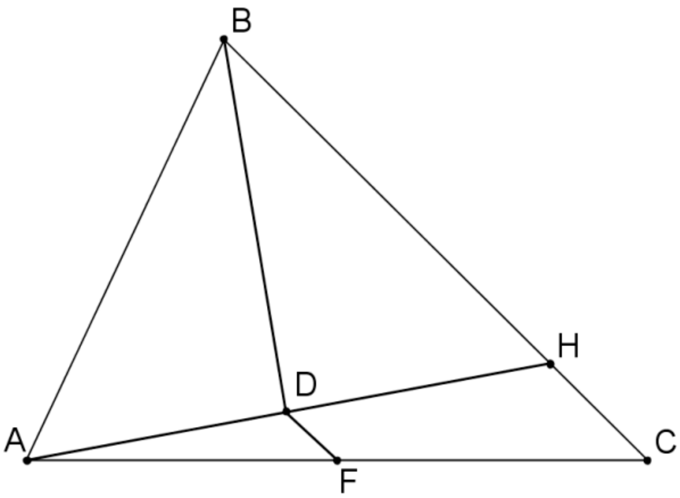
Az ABC háromszögben AB=28 cm, BC=38 cm. A B-ből induló belső szögfelezőre A-ból merőlegest állítunk, ennek metszéspontja a szögfelezővel D. Az AC oldal felezőpontja F. Hány cm hosszú a DF szakasz?[1]

[1] A feladatra és érdekes megoldására Kovács Viola tanárszakos hallgató hívta fel a figyelmemet.

(KÖMAL[2], K.374)

Megoldás a megoldókulcs alapján:

A háromszög *BC* oldalán vegyük fel a *H* pontot úgy, hogy $BH = 28\ cm$ legyen. Ekkor az *AHB* háromszög egyenlő szárú, melynek a *BD* szögfelező egyben oldalfelező merőlegese is, így *D* az *AH* szakasz felezőpontja. Mivel *F* az *AC* szakasz felezőpontja, ezért *DF* az *AHC* háromszög középvonala, így feleakkora, mint a *HC* oldal. Tehát *DF*=5 cm.



13. ábra

Egy tanuló a megoldás során azonban másképpen gondolkodott:

Mivel a feladat nem tér ki a β szögre, ezért azt bármekkorának vehetjük. Tegyük fel, hogy β közelít 0°-hoz. Ekkor *BC* oldal közelít, AB oldalhoz, egy egyenesbe esnek. Így a β szögfelezőjére A-ból állított AD merőleges egyenes közelít a 0-hoz, azaz $A = D$ lesz. Emellett AC oldal hossza $= BC - AB = 38 - 28 = 10$, így $AF = FC = 5$ lesz. Mivel $A = D$, ezért $DF = AF = 5$. Tehát a kérdéses szakasz 5 cm hosszú.

- Feladat

Olvassa el a két megoldást és gondolja meg melyik helyes.

M.

A szövegbe beleérthető, hogy a B-nél levő szögtől függetlenül megadható megoldás, tehát elég a szélső (kedvező) helyzetek valamelyikét vizsgálni. Ha ugyanis létezik ilyen FD hossza, akkor ennek

[2] http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=K374&l=hu

ezzel meg kell egyeznie. Mindkét megoldás helyes, csak éppen az első nem foglalkozik ezzel a lehetőséggel.

- Feladat

Oldja meg a következő feladatot és gondolja meg, milyen kapcsolatban lehet ez a feladat az előbbi feladatokkal:

Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, … ,2010, 2011 számokat (az első 2011 darab pozitív egész számot). Ezek közül egy lépésben két tetszőleges számot letörlünk és helyettük a különbségüket írjuk. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg egyetlen szám marad. Páros vagy páratlan szám maradt?

M.

Egy lépésben a páratlan számok száma vagy nem változik, vagy kettővel csökken. Kezdetben páros sok páratlan szám volt, így a megmaradó páros lesz.

De gondolkodhatunk úgy is, hogy a feladatban rejtve van az az információ, hogy a megmaradó szám paritása eldönthető, hiszen rákérdeznek, hogy páros vagy páratlan ez a szám. Emiatt elég egy konkrét eljárást kipróbálni, és a megmaradó szám paritása adja a választ.

A feladat kérdésfeltevésének félreérthető volta még jobban látszik, ha összehasonlítjuk egy másik változatával:

Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat. Egy-egy alkalommal két számot letörlünk és helyettük azok különbségét írjuk fel. Ezt kilencszer elvégezve előfordulhat-e, hogy a megmaradó szám 0?[3]

Ebben az esetben az lehet az ötlet, hogy próbáljunk meg az adott módon 0-t kapni. Ám ez az előbbi meggondolás miatt nem is sikerülhet, hiszen 5 páratlan számunk van, tehát a megmaradó számnak páratlannak kell lennie. Ezt azonban nyilvánvalóan be kell bizonyítani. Ennél a feladatnál a kérdés alapján egyértelmű volt, hogy be kell látni, csak páratlan szám maradhat utolsónak.

Irodalom

Ambrus G.:Hidden Treasures in the Problem Solving Teaching [Rejtett kincsek a problémamegoldás tanításában] In:Kinga Szűcs (Ed.): Problem Solving in Mathematics Education, 2010 Jena, WTM - Verlag, Münster, 2011, 20-32

Pólya, Gy.: A gondolkodás iskolája, Gondolat, 1977

Schoenfeld, A. H. : Mathematical problem solving, Orlando, FL: Academic Press. 1985

Hemme, H.: Heureka, 7. feladat /13.o.Vandehoeck &Ruprecht, Göttingen, 1988

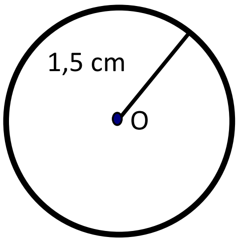
[3] Róka S.: 1389. feladat2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex, 2000

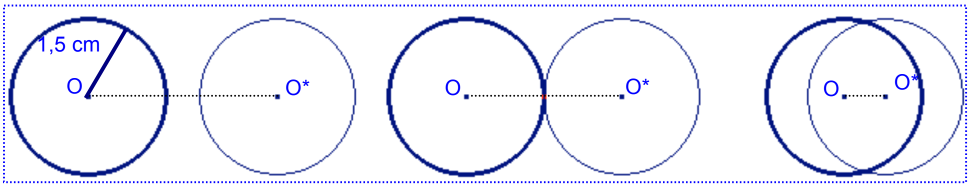
Reiman, I.: A geometria és határterületei, Gondolat, 1986, 252-253.o

Feladatrovat, A Matematika Tanítása, 1996, 3.sz. 29-30.o.

I. Feladatlap (Szakaszfelező merőleges)

1. Adott az 1,5 cm sugarú kör. Mozgasd el a lapon levő körhöz képest a másik uyanakkora sugarú kört és figyeld meg, hány közös pontja lehet a körvonalaknak!
Rajzold le a különböző lehetőségeket:





Megfigyeléseid alapján fogalmazd meg sejtésedet, hogyan függ a metszéspontok száma a két kör egymáshoz viszonyított helyzetétől. Ezt is jegyezd le!

Nincs közös pont, ha OO > 3cm*

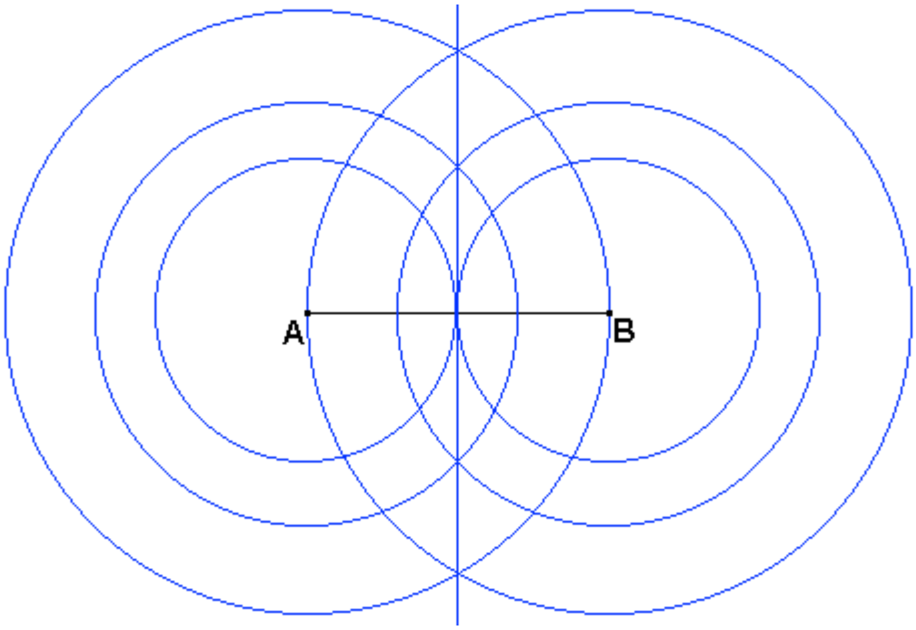
Egyetlen közös pont van, ha OO = 3 cm*
Két metszéspont van, ha 0 < OO < 3 cm*

Nincs közös pont, ha OO > 3cm*
Egyetlen közös pont van, ha OO = 3 cm*
Két metszéspont van, ha 0 < OO < 3 cm*

2. Rajzolj körzővel a 4 cm-es AB szakasz végpontjai körül két kört ugyanolyan sugárral úgy, hogy a körvonalak

metsszék egymást: r = ______ cm   *pl.: 2,8 cm*

érintsék egymást: r = *2* cm



Rajzolj körző segítségével további két körpárt egymást metsző körvonalakkal!

r = ___ cm   *pl.: 4 cm*

Figyeld meg a metszéspontok helyzetét! Egészítsd ki:

A körpárok metszéspontjai *egy egyenesen* helyezkednek el.

3. Az átlátszó papírra rajzolj egy 4 cm-es szakaszt! Hajtsd be úgy a lapot, hogy az A és B pontok egymásra kerüljenek! Figyeld meg milyen helyzetű egymáshoz képest a hajtásvonal és a szakasz és jegyezd le megfigyelésedet!

A hajtásvonal _*merőleges*_ a szakaszhoz képest és _*felezi*_ azt.

Válaszd ki a hajtásvonal egy P pontját és rajzold meg az AP és PB szakaszokat!

Hasonlítsd össze a szakaszokat és egészítsd ki az alábbi mondatot tapasztalatoddal:

Az AP és PB szakaszok _*egyenlő hosszúságúak*_ .

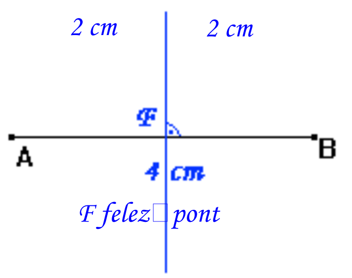
Mi lenne a helyzet, ha egy másik P pontot választanánk a hajtásvonalon? Fogalmazd meg sejtésedet és indokold meg:

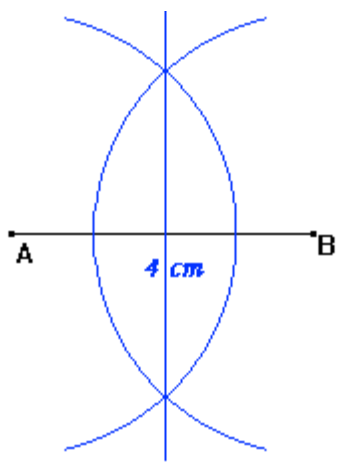
Ha P a hajtásvonalon van, akkor az AP és PB szakaszok _*egyenlő hosszúak*_ ,

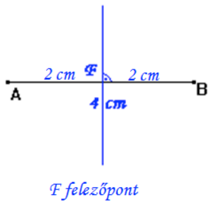
mert _*mert ezek a szakaszok a hajtáskor fedik egymást*_ .

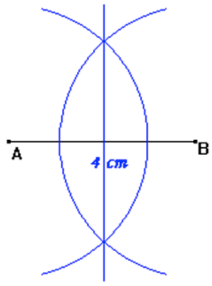
4. a) **Rajzold meg** a lap síkján azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek az A és B pontoktól egyenlő távolságra helyezkednek el! Jelezd azt is, hogy mi jellemzi ezt a ponthalmazt!

b) **Szerkeszd meg** a lap síkján azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek az A és B pontoktól egyenlő távolságra helyezkednek el!









A síkon azon pontok halmaza, amelyek az A és B pontoktól egyenlő távol helyezkednek el az AB szakasz felezőmerőlegese.

5. Hol vannak a lap síkján azok a pontok, amelyek A - hoz közelebb vannak, mint B-hez?

Használhatod hajtogatáshoz és rajzoláshoz az átlátszó papírt. Meg tudod magyarázni sejtésedet?

megoldás: ld. a laphoz készült elemzést

A feladatlap elemzése

Előismeretek

Távolság (két pont távolsága, pont és egyenes távolsága, két egyenes távolsága), egyszerű szerkesztések körzővel és vonalzóval, egyszerű feltételeknek megfelelő ponthalmazok megadása, tapasztalatok szimmetrikus alakzatokkal. A téma a hatodik osztályban szerepel általában a tananyagban.

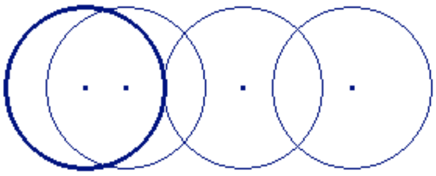
A lap felépítése és munkamódszere inkább a *hagyományos oktatás*nak felel meg. A feladatoknál további olyan kérdések is szerepelnek, amelyek lehetővé teszik a téma továbbvitelét problémamegoldó módszer irányába. Problémamegoldó tanítási módszer esetén hasonló kérdések már az elején beépítésre kerülnek, sőt a tanulók részéről is elvárt ilyenek megfogalmazása.

Az első feladathoz a tanulók magukkal hozzák az 1 cm sugarú mozgatható körlapot, melynek középpontja is látszik. (A modell előállítása nem az óra feladata, például

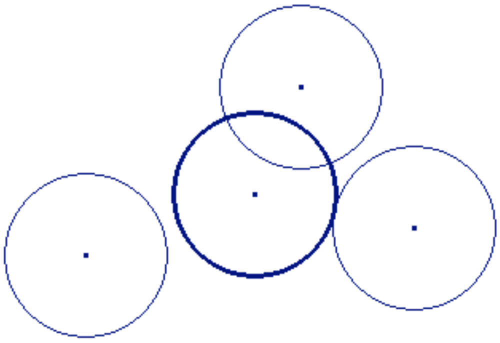
lehet előkészítő házi feladat az előző órán feladva).
Tevékenységek során a tanulók tapasztalatokat gyűjtenek azzal kapcsolatban, hogy a két körvonalnak lehet, hogy nincs közös pontja vagy egy vagy két közös pontjuk lehet. Mivel az egyik kör nem mozgatható (a papíron van) a tanulók a másik kör mozgatásával arra koncentrálhatnak, hogyan függ a közös pontok száma a két kör egymáshoz viszonyított helyzetétől.

Elvárható megoldások:

További tanulói megoldások is várhatók:



a)



b)

A tanár feladata, hogy a tanulók figyelmét irányítsa a lényeges és lényegtelen dolgok megfigyelése terén, miközben a különböző helyzeteket vizsgálják.

A feladat megoldása után közösen beszélik meg a megoldásokat és megfigyeléseket.

Ha a tanulók felvetik azt az esetet is, amikor a két kör fedi egymás, akkor ez a helyzet is tárgyalásra kerül

A két kör egymáshoz viszonyított különböző helyzeteinek felsorolásra során gyakorlásra kerül a szisztematizálás (a végtelen sok lehetséges helyzetet három esetleg négy osztályba sorolják); gyakorolják a célszerűen kialakított rajz készítését is megoldásuk lejegyzése során.

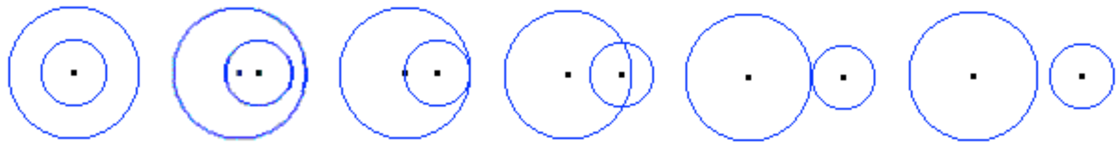
További kérdések:

1. Hány közös pontja lehet két körlapnak? (végtelen sok, egyetlen, egy se)

A problémamegoldó tanítás során cél az, hogy a körök egymáshoz viszonyított helyzete a körök sugara és a körök középpontjait összekötő szakasz viszonya alapján kerüljön megadásra, és ez kapcsolódjon az egyenlőtlenségek, folytonos mozgás és a függvényszerű kapcsolat témákhoz is. Az érintési helyzet akkor alakul ki, ha a középpontokat összekötő szakasz hossza 1,5 cm + 1,5 cm és ez az eset választja el a metszéspontokat adó helyzeteket a közös pontot nem tartalmazóktól.

Gyakorlásra kerül, hogy Kör(lap) $\neq$ Körvonal, valamint a szisztematizálás (a különböző esetek megtalálásánál).

2. Milyen (lényegileg különböző) helyzetek lehetségesek két különböző sugarú kör esetében?



Model[4] segítségével várható, hogy a tanulók megtalálják az eseteket. Tapasztalataink szerint a tanulóknak további segítség szükség, hogy az egyes eseteket metrikusan is jellemezni tudják.

Itt is gyakorolják a szisztematizálást– különböző esetek megtalálása a folytonos mozgatás során – és módszereket is a szisztematizáláshoz (az esetek metrikus jellemzése).

Míg az első feladat esetében az adott sugarú körök helyzetét, azaz a középpontok helyzetét kellett változtatni, addig a második feladatban két kör középpontjai (egy szakasz végpontjai) adottak és a körpárok sugarát keressük úgy, hogy két metszéspontja legyen a körvonalaiknak. Az első feladat ábráin látható, hogy ebben az esetben a sugár hossza legalább a szakasz hosszának felével kell, hogy egyenlő legyen.

A szerkesztés alapján látható, hogy a közös pontok egy egyenesen helyezkednek el, amely felezi az AB szakaszt és AB-re merőleges.

A gyerekek meg tudják fogalmazni a sejtést, hogy a további körpár-metszéspontok is ezen az egyenesen lesznek majd, mivel a felrajzolt körpárok semmilyen speciális tulajdonsággal nem rendelkeztek, így bármely körpár esetén a metszéspontok az előbbiekben meghatározott egyenesen lesznek.

A tanulói megoldások esetén előfordulhat a megfigyelés következő megfogalmazása: „A körpárok metszéspontjai egy egyenesen vannak, mely egyenes felezi az AB szakaszt és merőleges AB-re.” Erre a megfogalmazásra a közös megbeszélés során feltétlenül ki kell térni.

A megoldás során gyakorlásra kerül a körző és vonalzó használata, a megszerzett tapasztalat egybevágó körök sugara és helyzete között. Valamint absztrahálásra és konkretizálásra is sor kerül a metszéspontok helyzetének vizsgálatakor.

[4] A tanulók nagy és kis lyukas köröket választhatnak a Logikai Készletből..

A harmadik feladat esetén a korábbiakban létrehozott egyenes pontjait vizsgáljuk mivel a hajtásvonal – ahogy ezt a tanulók is észrevehetik – éppen ezt az egyenest adja meg. (A tanulók már az ötödik osztályból rendelkeznek azzal az ismerettel, hogy egy ponton át - itt a szakasz középpontja - egy egyeneshez egyetlen merőleges húzható.)

A papírhajtás segítségével a tanulók bizonyítani tudják, hogy az AP és PB szakaszok egyenlő hosszúságúak, és hogy ez a tulajdonság független a P pont helyzetétől (a hajtásvonalon).

A tanulóktól elvárható, hogy belássák, ha P a hajtásvonalon van, akkor az AP és PB szakaszok egyenlő hosszúak, mivel a két félsík pontonként fedi egymást.

Valószínűleg az említett szakaszok egyenlőségének bizonyításához a következő indoklás kevésbé fordul elő:

„…..mivel A és B a hajtásvonalhoz képest szimmetrikusan helyezkednek el."

vagy:

„…..mivel a hajtásvonal az AB szakasz szimmetria tengelye."

Bár a tanulók már rendelkeznek szimmetriákkal, szimmetrikus alakzatokkal kapcsolatos ismeretekkel az előző osztályokból, azonban ez még nem elegendő, ilyen megfogalmazásokhoz.

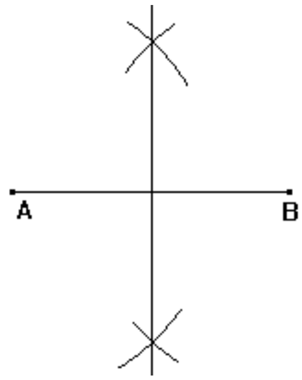
Gyakorlásra kerül a vonalzó használata, az absztrahálás és konkretizálás, valamint az indoklás

A negyedik feladatnál az a) esetében fogalomalkotásról van szó. A 2. és 3. feladatból következik, hogy a keresett ponthalmaz a szakaszfelező merőleges.

A b) rész szerkesztésénél alkalmazásra kerül a 2. feladatban szerzett ismeret, nevezetesen, hogy a körpárok metszéspontjai egy egyenesen vannak, amely a szakaszt felezi és arra merőleges.

Az a) esetében a ponthalmaz megrajzolásánál a tanulók szerkesztési eszközökkel vagy anélkül dolgozhatnak. A rajzon fel kell tüntetniük az egyenes tulajdonságait (F felezőpont, derékszög).

A b) esetében elvárható a tanulóktól, hogy az egyenes megszerkesztéséhez több egymást metsző körpárt rajzoljanak. Itt egyrészt meg kell beszélni, hogy hány pont határoz meg egyértelműen egy egyenest, és hogy további metszéspontok megadása nem hibás, de felesleges. Másrészt, hogy a metszéspontok egyenként két körív segítségével adhatók meg (így a szerkesztés áttekinthető marad).



Gyakorlásra kerül többek között a körző és vonalzó használat és a már korábban említett, 2. feladatból nyert ismeret.

- Feladat

Gondolja meg, milyen további kérdés tehető fel!

M.

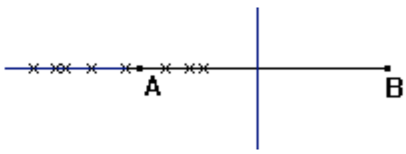
Például: Add meg a térben azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek adott A és B pontoktól egyenlő távol vannak.

Ez a ponthalmaz egy sík, amely felezi AB szakaszt és arra merőleges.
Indoklás:
Egy AB szakaszt tartalmazó sík esetében tudjuk, hogy a keresett ponthalmaz a szakaszfelező merőleges. AB szakasz körüli forgatással a szakaszfelező merőleges *egyenes* a szakaszfelező merőleges síkot írja le. A PA és PB távolságok minden P esetén a térben a konkrét [ABP] síkon vizsgálhatók. (Amennyiben P az AB egyenesen található, úgy vegyünk egy tetszőleges síkot a végtelen sok lehetséges sík közül.)
Megjegyzés:
A tanulók az előbbi feladat megoldásához úgy is eljuthatnak, hogy fognak két pálcát az egyik legyen számukra az AB szakasz a másik a szakaszfelező merőleges rajta. Miközben a „szakaszfelező merőleget“ forgatják AB körül, az egy síkot ír le stb..

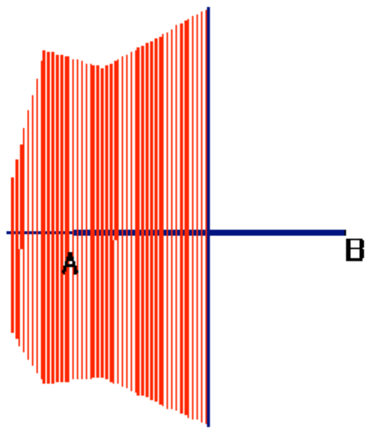
Gyakorlásra kerülnek a problémamegoldás elemei a geometriában, melynek során egy kétdimenziós problémát háromdimenziósra általánosítanak és a megoldásra kétdimenziós problémára vezetik vissza, valamint matematikai objektumok megjelenítésére, a probléma elemzésére is sor kerül.

Az <u>ötödik feladat</u> esetében egy problémaszituációról van szó. Az eddigi felépítés alapján különböző fajta megoldások várhatók. A továbbiakban megadunk egy olyan megoldást, amelyet egy hasonlóan tervezett órán történt látogatás alkalmával láttunk.

A tanulók a feladaton körülbelül 5 percig dolgoztak önállóan, majd megbeszélés következett. A sejtések a következő ábrákon láthatók:



Egy kislány jelentkezett, hogy neki más sejtése van, és a következőt rajzolta fel a táblára:



Az órának itt vége volt., így további megbeszélés nem volt lehetséges. A tanárnak el kellett döntenie, hogyan dolgozzon az ötödik feladattal tovább.

- Feladat

Ön, mint tanár mit tenne? Írjon lehetséges döntési módokat.
M.

Lehetőségek például:

1. Házi feladatként feladja, hogy mindenki hasonlítsa össze saját elképzelését a kislány sejtésével.
2. Először közli, hogy helyes a kislány sejtése, majd ezután adja fel házi feladatnak az előbbi összehasonlítást.
3. Felad más házi feladatot, és közli, hogy a következő órán még visszatérnek erre a feladatra.

Ezen az órán a tanár a harmadik lehetőséget választotta, és a következő feladatot adta fel *házi feladat*nak:

Szakaszfelező merőleges segítségével add meg egy 9 cm hosszú szakasz következő részeit:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$$

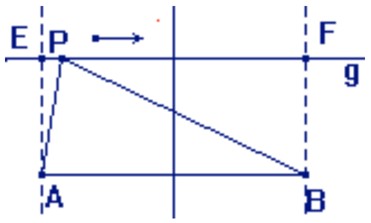
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$$

A következő órán megbeszélik majd meg a lehetséges megoldási módokat és a tanulók esetleges nehézségeit.

Az ötödik feladattal kapcsolatban a következőkben két megoldási módot mutatunk be.

Első lehetőség

A tanulók kereshetik a megfelelő pontokat egy, az AB szakasszal párhuzamos egyenesen. Ebben az esetben kereshetjük a megoldást először a g egyenesen levő E és F pontok között (E a g egyenes és az A-ban AB-re húzott merőleges metszéspontja, F a g egyenes és a B-ben AB szakaszra húzott merőleges egyenes metszéspontja). Mozgassuk P-t E-ből F felé.



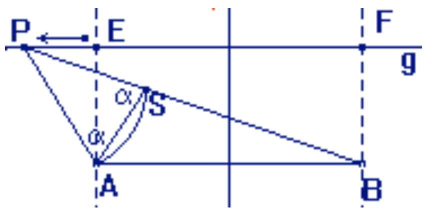
Ennek során az AP távolság növekszik, a BP távolság csökken. A szakaszfelező és g egyenes metszéspontjában AP = BP lesz. Ez azt jelenti, hogy „előtte" PB > PA állt fenn. Ha P tovább mozog, akkor PA > PB.

Az előbbi eljárás független attól, hogy g egyenes milyen távol van AB szakasztól. Azonban ez a bizonyítás nem terjeszthető ki a g egyenes további pontjaira. ugyanis ekkor még a tanulók ismeretei nem elegendőek hozzá. (Erre először a 7. osztályban kerülhet sor). Az előbbi meggondolások azonban segíthetnek a sejtés megfogalmazásához.

A g egyenes további pontjainak vizsgálatához két módszert mutatunk.

a)

Egy P középpontú kör (r = PA) a PB egyenest S pontban metszi.

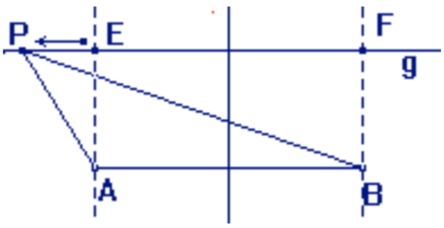


A PAS háromszög egyenlőszárú így az A-nál és S-nél levő belső szögek egyenlőek (α). Az α szög hegyesszög, mivel 2α < 180˚ (A háromszög belső szögeinek összege). A PAB szög tompaszög (P helyzete!) így α < ρPAB. Emiatt az AS szakaszt tartalmazza a PAB szögtartomány. Ez azt jeleni, hogy S pont P és B között van. Abból, hogy PS a PB egy része és abból a feltételezésből, hogy PS = PA következik, hogy PA < PB.

Ahhoz, hogy a tanulók ilyen megoldást készíthessenek, rendelkezniük kell a szükséges ismeretekkel, amely azonban lehet, hogy a szakaszfelező merőleges tanulásakor még nem állnak rendelkezésre a tananyag felépítése miatt. Ebben az esetben egy későbbi megfelelő alkalommal vissza lehet rá térni.

Ennél a megoldásnál gyakorlásra kerül az egyenlőszárú derékszögű háromszög, a háromszög belső szögeinek összege, az elemi problémamegoldó képesség a geometriában, az AB szakaszfelező merőlegesének tulajdonságai (pontjai A-tól és B-től egyenlő távol vannak), valamint megfelelő ábrák készítése matematikai problémákhoz (például a P pont mozgásának ábrázolása).

b)



Ha P a g egyenesen a jelzett irányba mozog, akkor AP és PB szakaszok mindketten növekednek. Mivel azonban a PAB szög tompaszögű, így ez nagyobb, mint az ABP szög az APB háromszögben és így PB > PA. (Ugyanis egy háromszögben igaz, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.) Ez utóbbi ismeret azonban először a hetedik osztályban szerepelhet és nem mindenhol kerül elő.

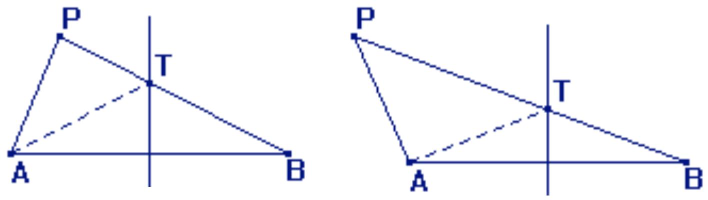
A b) szerinti megoldás során a tanulók többek között gyakorolják az előbb említett háromszögel oldalai és szögei közötti kapcsolatra vonatkozó ismeretet, az elemi problémamegoldó képességet a geometriában, az AB szakasz felező merőlegesének tulajdonságait (pontjai A-tól és B-től egyenlő távol vannak), valamint megfelelő ábrák készítését matematikai problémákhoz (például a P pont mozgásának ábrázolása).

Megjegyzés a megoldáshoz: Az első lehetőség meggondolása egyrészt az ismeretek várható hiánya, másrészt a matematikai gondolkodás még nem megfelelő szintje miatt a hatodik osztályban, a szakaszfelező tanulásánál még nem lehetséges, és önálló megoldásként - kivételektől eltekintve - nem is várható el ebben az életkorban.

Második lehetőség

Az átlátszó papíron a tanulók felvehetnek olyan pontokat , amelyek nincsenek a hajtásélen, ezeket az A és B pontokkal összekötve a kapott szakaszok hosszát hajtással hasonlíthatják össze és így fogalmazhatják meg sejtésüket..

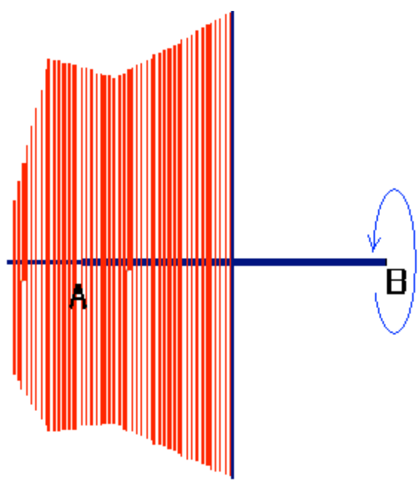
A tanulók már az ötödik osztályból tudják, hogy ha egy P pont az A ponttal megegyező félsíkban található (az AB szakasz felező merőlegese a síkot két félsíkra bontja) ha az AP szakasznak nincsen közös pontja a szakaszfelező merőlegessel és hogy két pont, itt P és A között a legrövidebb út a két pontot összekötő szakasz, itt AP.
Ezekkel az ismeretekkel a következő megoldás készíthető:



Egy tetszőleges P pontot véve az A-t tartalmazó félsíkban (ld előbb) az AP szakasz teljes egészében ebben a félsíkban marad, a PB szakasznak van metszéspontja a félsík határegyenesével (a szakaszfelező merőleges), és ez legyen most T. T (mint a szakaszfelező merőleges bármely pontja) egyenlő távol van A-tól és B-től is. (AT = TB). Emiatt a PB szakasz és az ATP töröttvonal hossza megegyezik. A töröttvonal hosszabb, mit AP, hiszen az A és P pontok között ez utóbbi a legrövidebb út, így PB = PT + TA > PA.
(A PA < PT + TA kifejezéssel megjelenik itt a háromszög egyenlőtlenség is, ami esetleg csak később szerepel a tananyagban, de ebben a tárgyalásmódban nem okoz gondot.)
A megoldás során itt is gyakorlásra kerül az elemi problémamegoldó képesség a geometriában, a szimmetriák felismerése, az AB szakasz szakaszfelező merőlegesének tulajdonsága, (pontjai az AB pontoktól egyenlő távol vannak), valamint az egyszerű matematikai indoklások, és megfelelő ábrák készítése.

- Feladat

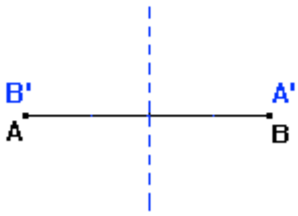
Milyen további kérdés tehető fel az ötödik feladattal kapcsolatban.
M
Az előzőekben feltett további kérdés alapján adódik itt is például a térbeli általánosítás lehetősége:
Hol vannak a térben azok a pontok, amelyek A-hoz közelebb vannak, mint B-hez? Indokold meg sejtésedet!



A tanulók eljárhatnak az említett analóg feladathoz hasonlóan, azaz lényegében úgy, mint ahogyan az egyenlőség bizonyításra került.
Ennek során az említett feladat megoldása során gyakoroltakon kívül analóg feladat keresése is gyakorlásra kerül,

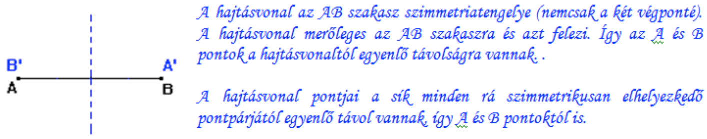
II. Feladatlap (szakaszfelező merőleges)

1.
a) Rajzolj vonalzóval egy AB szakaszt egy átlátszó lapra és hajtsd a lapot úgy, hogy az A és B pontok fedésbe kerüljenek! Rajzold a feladatlapra a szakaszt a hajtáséllel és jelöld, hogy A és B egymáshoz képest szimmetrikusan helyezkednek el! Figyeld meg és jegyezd fel a hajtásvonal tulajdonságait!



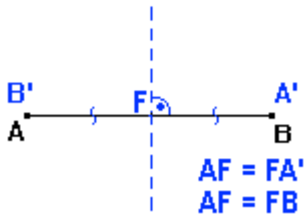
A hajtásvonal az AB szakasz szimmetriatengelye (nemcsak a két végponté). A hajtásvonal mer□leges az AB szakaszra és azt felezi. Így az A és B pontok a hajtásvonaltól egyenl□ távolságra vannak .

A hajtásvonal pontjai a sík minden rá szimmetrikusan elhelyezked□ pontpárjától egyenl□ távol vannak, így A és B pontoktól is.


B'
A'
A
B
A hajtásvonal az AB szakasz szimmetriatengelye (nemcsak a két végponté). A hajtásvonal merőleges az AB szakaszra és azt felezi. Így az A és B pontok a hajtásvonaltól egyenlő távolságra vannak .
A hajtásvonal pontjai a sík minden rá szimmetrikusan elhelyezkedő pontpárjától egyenlő távol vannak, így A és B pontoktól is.

Egészítsd ki:
Az AB szakasz *szimmetrikus* a hajtásvonalra, mint szimmetriatengelyre.
Ez a szimmetriatengely *felezi* a szakaszt és *mer□leges* a szakaszra.
A szimmetriatengely pontjai az A és B pontoktól *egyenl□ távolságra* helyezkednek el.

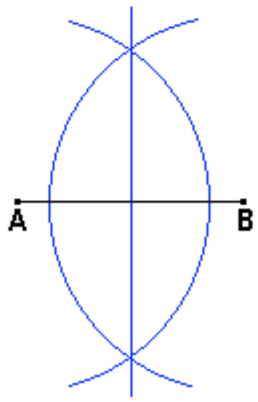
Egészítsd ki rajzodat, ha szükséges úgy ,hogy az előbbi tulajdonságok is láthatóak legyenek rajta!

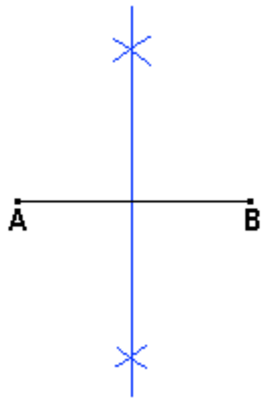


Az előbbi tulajdonságok egyértelműen meghatározták egyenesünket:

Két adott A és B ponttól egyenlő távol levő pontok a síkon az AB szakasz **felező merőlegesét** - szimmetria tengelyét – alkotják.

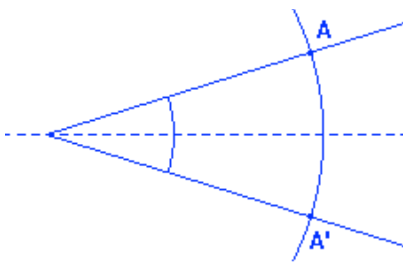
b) Szerkezd meg körzővel és vonalzóval azon pontok halmazát, amelyek A-tól és B-től egyenlő távol vannak!





2.
a) Dolgozz egy másik átlátszó papírral!

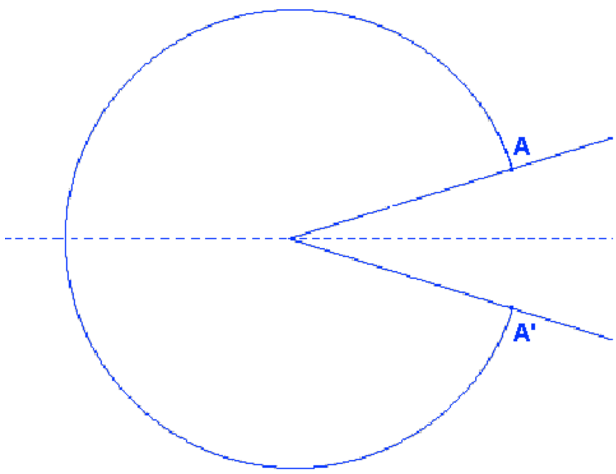
Rajzolj körzővel egy hegyes szöget a papírlapra!
Próbáld meg a lapot úgy hajtani, hogy a szögszárak fedjék egymást! Rajzold fel erre a lapra a szögszárat a hajtáséllel!
Rajzolj fel egy pontpárt, amelyek a hajtás révén fedik egymást (ehhez mérhetsz, ha szükséges átszúrhatod a papírt, vághatsz…)
Rajzolj a szög csúcsa körül a kiválasztott ponton át egy kört, és figyeld meg a képpontot!



Egészítsd ki:
A hajtásél átmegy a szög *csúcsán* és a hegyesszöget *két szimmetrikus és így egyenlő* részre osztja. A hajtás során egymást fedő pontok *A* és *A'* a szög csúcsától *egyenlő* távolságra vannak, és *egy a szög csúcs körül rajzolt* körvonalon találhatók.

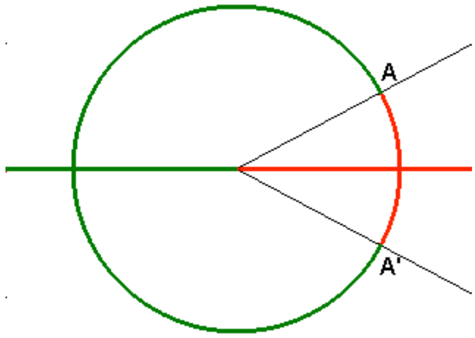
A szögszárak egy másik szögtartományt is meghatároznak. Rajzold fel ezt is, és figyeld meg a hajtásvonalat!

A hajtásvonal a szögtartományt határoló szögszárak *szimmetriatengelye.*
.

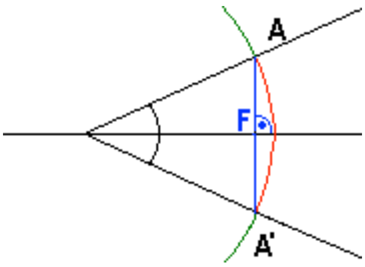


Az az egyenes, ami a két szögtartományt egyenlő részekre osztja, a szögszárak által meghatározott szögtartománypár a szögfelező egyenese – szimmetriatengelye - . A szögfelező egyenesnek az a része, amely az adott szögtartományba esik a szög **szögfelező félegyenese**, - vagy röviden szögfelezője -

Dolgozz a rajzodon! Jelöld
- piros színnel a hegyes szöget és ennek szögfelezőjét
- zöld színnel a kiegészítő szöget és ennek szögfelezőjét!

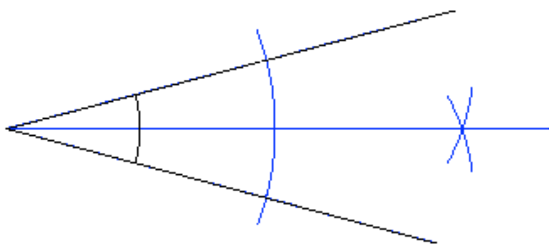
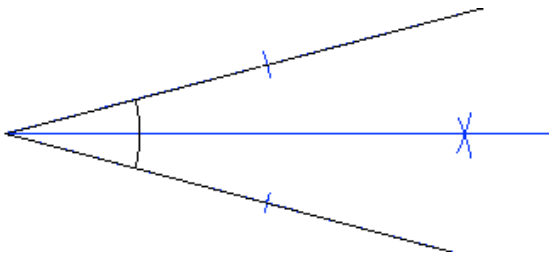


b) Kösd össze az A és A' pontokat egy szakasszal és e szakasz és a szögfelező metszéspontja legyen F.



Egészítsd ki:
Az A és A' pontok (és a szögszárak minden szimmetrikus pontpárjai) *szimmetrikusan* helyezkednek el.
Emiatt az AA' szakasz *merőleges* a szögfelező egyenesre és és AF *egyenlő* A'F.
Egy egyenes egy szakasznak szakaszfelező merőlegese, ha *átmegy a felezőpontján és merőleges a szakaszra.*
A szögfelező egyenes az AA' szakasz *felező merőlegese* .

c) Szerkeszd meg körzővel és vonalzóval az alábbi szög szögfelezőjét! Írd le a szerkesztés lépéseit és a szerkesztés indoklását

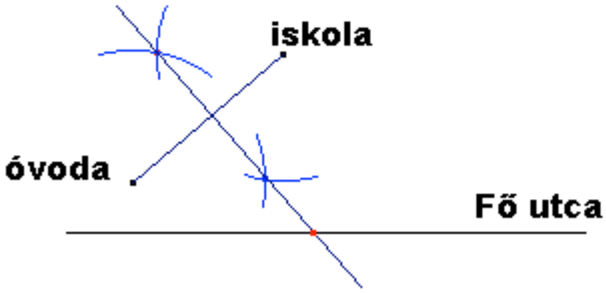
A szerkesztés menete:
- *egy szimmetrikus pontpár keresése: A szög csúcsa körül rajzolt tetszőleges körív a két szögszárakat egy-egy pontban metszi, ezek szimmetrikus párt alkotnak*
- *A pontpár szimmetriatengelyének szerkesztése: A szög csúcsa rajta van a szimmetriatengelyen, egy másik pontot a két szimmetrikus pont körül rajzolt egyenlő sugarú körívek metszéspontjaként kaphatunk.*

A szerkesztés menete:
- *egy szimmetrikus pontpár keresése: A szög csúcsa körül rajzolt tetszőleges körív a két szögszárakat egy-egy pontban metszi, ezek szimmetrikus párt alkotnak*
- *A pontpár szimmetriatengelyének szerkesztése: A szög csúcsa rajta van a szimmetriatengelyen, egy másik pontot a két szimmetrikus pont körül rajzolt egyenlő sugarú körívek metszéspontjaként kaphatunk.*

Házi feladat:

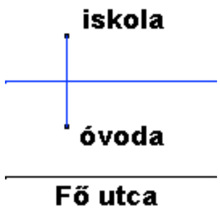
1. Márton Budapesttől nem messze, egy kis falu főutcáján lakik. Házuk az

iskolától és az óvodától egyenlő távolságra található.
Rajzolj egy vázlatot a füzetedbe, és ezen szerkeszd meg azt a helyet, ahol Mártonék háza van. Ismételd meg a szerkesztést különböző tervekkel és írd fel megfigyeléseidet. Például a terv így nézhet ki:



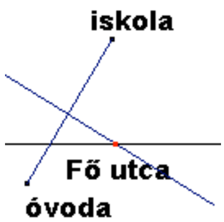
A háza az óvoda és az iskola „szimmetriatengelyén fekszik. Ennek alapján aszerint, hogy az iskola és az óvoda hogyan helyezkedik el, a ház a F□ utcán 0, 1 vagy végtelen sok helyen lehet.

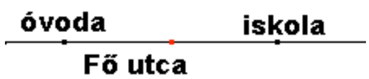
a) *Ha az ÓI (óvoda és iskola helyét megadó pontok) szakasz mer□leges a F□ utcára, de azt nem metszi, akkor nincs közös pont.*



b) *Amennyiben a F□ utca a szimmetriatengelye az OI szakasznak, akkor a ház a F□ utcán bárhol lehet.*

c) *A további, el□z□ekt□l eltér□ esetekben egyetlen pont adódik a ház helyeként. Ehhez két lényegileg különböz□ helyzetet mutatunk be a végtelen sok lehet□ség közül.)*



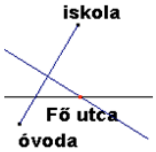


A háza az óvoda és az iskola „szimmetriatengelyén fekszik. Ennek alapján aszerint, hogy az iskola és az óvoda hogyan helyezkedik el, a ház a Fő utcán 0, 1 vagy végtelen sok helyen lehet.

a) *Ha az ÓI (óvoda és iskola helyét megadó pontok) szakasz merőleges a Fő utcára, de azt nem metszi, akkor nincs közös pont.*

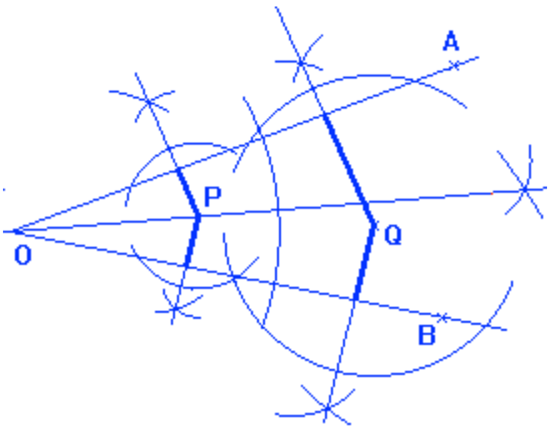
b) *Amennyiben a Fő utca a szimmetriatengelye az OI szakasznak, akkor a ház a Fő utcán bárhol lehet.*

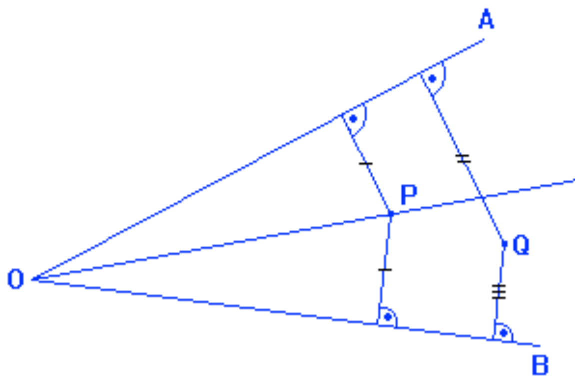
c) *A további, előzőektől eltérő esetekben egyetlen pont adódik a ház helyeként. Ehhez két lényegileg különböző helyzetet mutatunk be a végtelen sok lehetőség közül.)*



2. Rajzolj vonalzóval egy AOB hegyes szöget a füzetedbe!
   Szerkeszd meg körzővel és vonalzóval a szögfelezőjét! Adj meg egy P pontot a szögfelezőn és egy Q pontot a POB szögtartományon belül!

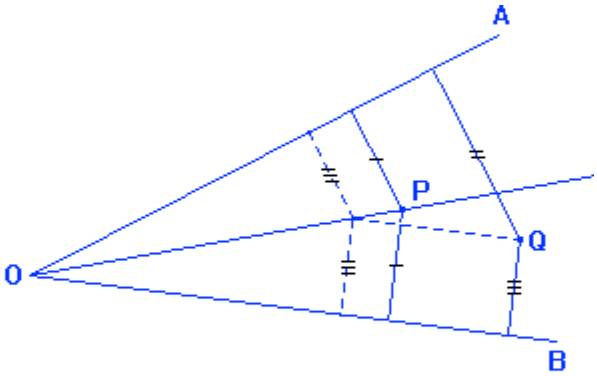
Szerkeszd meg körzővel és vonalzóval P és Q pontok távolságát mindkét szögszártól! Hasonlítsd össze a pontok távolságát a két szögszártól!





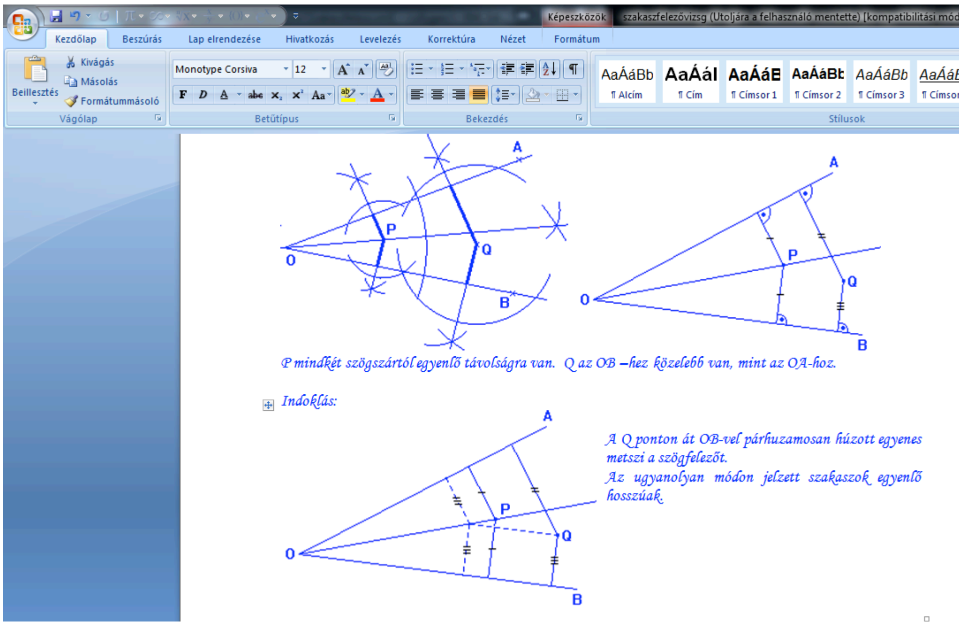
P mindkét szögszártól egyenl□ távolságra van. Q az OB –hez közelebb van, mint az OA-hoz.

Indoklás:



A Q ponton át OB-vel párhuzamosan húzott egyenes metszi a szögfelez□t.

Az ugyanolyan módon jelzett szakaszok egyenl□ hosszúak.



A feladatlap elemzése

A laphoz szükséges előismeretek: két pont távolsága, pont és egyenes távolsága, két egyenes távolsága, egyszerű szerkesztések körzővel és vonalzóval, ponthalmaz meghatározása egyszerű esetekben, szimmetrián alapuló egyszerű geometriai fogalmak (tapasztalatok szimmetrikus alakzatokkal, tengelyes tükrözés és tulajdonságai)

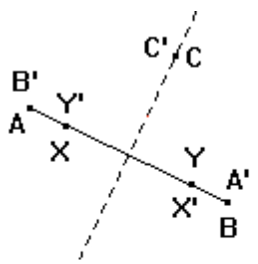
A feladatlap a geometriai fogalmak elemi „szimmetria élményeken" alapuló felépítését követi. Ilyen felépítés mellett természetesen adódik az analógia a szakaszfelező merőleges és a szögfelező között.

Ennek a lapnak a felépítése különbözik az első lapétól, mivel ennél másfajta tanulói előismeretet feltételeztünk fel. (A tengelyes tükrözés tulajdonságai, a szakaszfelező merőleges, mint ponthalmaz). Ebben az esetben a tulajdonságok és definíciók geometriai transzformációkon és függvényszerű összefüggések alapján kerülnek bevezetésre.
A feladatok összetétele és a munkamódszer, ahogyan ezeket feldolgozzuk, inkább a problémamegoldó stílusú tanítási módszernek felelnek meg. Példák lesznek arra is, hogy a feladatokat hogyan lehet még „továbbvinni".
A tanulóknak lehetőségük van arra, hogy megfigyeléseket tegyenek. A kiegészítendő mondatok a tanulók figyelmét azokra a megfigyelni valókra irányítják, amelyek a feladatlap megoldásához szükségesek.
A megoldások és a megoldási utak közös megbeszélésre kerülnek az első és a második feladat után is. Az egyes feladatok esetében lehetséges elvárások közvetlenül leolvashatók a lapokról.

Az ötödik osztályban már sor került arra, hogy bizonyos alakzatok szimmetriatengelyeit megkeressék a (pontokból álló alakzat, kör, egyenes, párhuzamos sávok, szakasz, körív stb.). Ezen a lapon ezzel a módszerrel dolgoznak megint. Meg kell keresniük a szakasz és a szög szimmetriatengelyét. Ennek során megállapítják, hogy mind a szakasznak, mind a szögeknek egyértelműen meghatározott szimmetriatengelyük van; sor kerül mindkét esetben egy olyan módszer megkeresésére is, amellyel ezek a szimmetriatengelyek

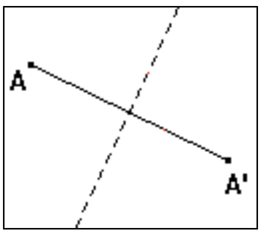
megszerkeszthetők.
A szakaszfelező merőleges és a szögfelező esetében figyelembe kell venni azt az alapvető különbséget, hogy míg a szakaszfelező merőleges megadható/jellemezhető, mint a sík azon pontjainak halmaza, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távol vannak, a szögfelező esetében csak az mutatható meg, hogy ennek pontjai a szögszáraktól egyenlő távol vannak (ez a szimmetriából következik). Ennek a leszűkítésnek a magyarázatára részben sor kerül a 2. Házi feladatban (a pontok a szögtartományban).

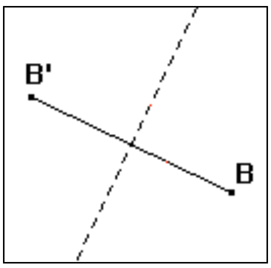
Az 1. feladat esetében a szakaszfelező merőleges a szimmetria „oldaláról" kerül tárgyalásra – a szimmetria tulajdonságai hangsúlyozásával - , mivel a szögfelező is a szimmetriatulajdonságok alapján kerül bevezetésre és a szerkesztése is ezen alapul. A feladat a) részében azt a szimmetriatengelyt keressük, melyre tükrözve A pontot az B pontba kerül. A szakasz minden pontja így páronként megfeleltethető egymásnak. Az egymást fedő pontpárok esetében a szimmetriatengely minden esetben a hajtásél.



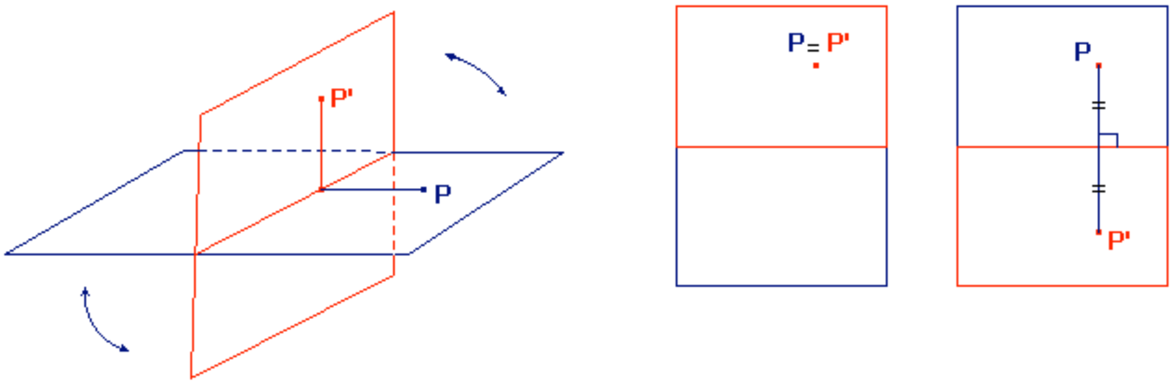
A szimmetrikus pontpár tagjai egyszerre „kiindulási pontok" és „képpontok" (A egyúttal B'-nek és B egyúttal A'-nek is tekintendő); A két geometriai transzformáció a tanulók számára két átlátszó papír segítségével, ezek egymásra tételével jobban szemléltethető.

Például:





Ez a szemléltetési lehetőség egy még alkalmasabb szemléltetési eszköz kialakítására vezethető tovább.
Átlátszó papír vagy fólia segítségével készíthető el a következő szemléltetőeszköz:



(Majoros &Vásárhelyi, 1998, Előadás a Rátz László Vándorgyűlésen)

A szakasz két végpontja határozza meg az összekötendő pontok (által meghatározott szakasz) szimmetriatengelyét.
Ez a szimmetriatengely a sík egy tengelyes tükrözésének tengelyeként tekinthető. Minden egymásnak megfelelő pont ugyanazt a szimmetriatengelyt határozza meg. A szimmetriatengely az egymásnak megfelelő pontoktól egyenlő távol van.
Fontos a tanulók számára külön kihangsúlyozni, ami az előzőekből következik:
Ha egy szimmetrikus pontpár tagjai (egy síkon) nem esnek egybe, akkor ennek a pontpárnak a segítségével a szimmetriatengely egyértelműen megadható.
Mivel a szimmetriatengely az A és B pontoktól egyenlő távol van (a két pont az egyenestől egyenként ugyanolyan távol van) a szimmetriatengely egyúttal az AB szakasz felezőmerőlegese is. (A 2 feladatnál a körzővel és vonalzóval való szögfelező szerkesztésnél egy megfelelő pontpár szimmetriatengelyének megszerkesztésére kerül sor, amely a felező merőlegese a pontpár tagjai által meghatározott szakasznak.

Az ötödik osztályban már bevezetésre került a szakaszfelező merőleges, mint azon pontok halmaza, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távol vannak. Ezen a lapon az 1a) feladatból következik, hogy a szakasz szimmetriatengelyének pontjai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, amelyek a szakasz szakaszfelező merőlegesét határozzák meg. ezt a megfigyelést a tanulók a keretben levő szöveg kiegészítésével fogalmazzák meg.
Az 1a) és b) feladatok rekonstrukciós feladatok: a tanulóknak kell megadniuk a szimmetriatengelyt (t), ha az A(=B') és B(=A') pontok (mint szimmetrikus pontok) meg vannak adva (A, B→ t).

Az 1b) feladatbeli felező merőleges szerkesztésénél felhasználják a tanulók a szimmetriatengely azon tulajdonságát, hogy a tengely pontjai az A és B pontoktól egyenlő távol vannak (vö. még az I. feladatlap 4. feladatánál tett megjegyzések).

Az 1a) részfeladatban a tanulók először konkret (enaktív, gyakorlati) szinten dolgoznak és utána fogalmazzák meg megfigyelésüket (ikonikus szint). Az 1 b) részfeladat esetében a tanulók megint konkrétan dolgoznak. A különböző szintek közötti váltás egy „alaposabb“ absztrakciót tesz lehetővé, ami „átlagos“ tanulók problémamegoldásánál szükséges. (vö. Ambrus, A./Hortobágyi, I. 2001,13.o.).

Gyakorlásra kerülne például: saját gondolatok megfogalmazása a matematikában, a tengelyes tükrözés tulajdonságai, Körző és vonalzó használata, megfelelő grafikus megjelenítés keresése és elkészítése, megfigyelések absztrahálása és konkretizálása, indoklás, objektumok geometriai-rajzos megjelenítése.

- Feladat

Fogalmazzon meg további kérdéseket a feladattal kapcsolatában!

M

Például a következők lehetnek ezek:

1. Hol vannak a lap síkjában azok a pontok, amelyek közelebb vannak A-hoz mint B-hez?

A sejtésed megfogalmazásához használhatsz átlátszó papírt, amelyen rajta van az AB szakasz.

Rajzold fel sejtésedet!
Tudod bizonyítani is?

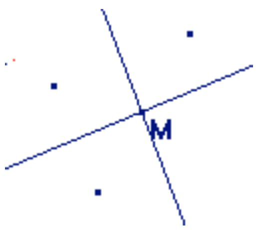
2. Hol vannak a síkon azok a pontok, amelyek 3,4,5 … ponttól egyenlő távol helyezkednek el?

Elvárható megoldás az 1. kérdéshez:

A feladatnál a tanulók átlátszó papíron is dolgozhatnak. Felrajzolják a pontokat (ne legyenek a hajtásélen), a szakaszokat összehasonlítják a papír megfelelő hajtásával és így fogalmazzák meg sejtésüket.
A szükséges meggondolásokhoz ld. 1. feladatlap.

Elvárható megoldás a 2. kérdéshez:

Feltétel: a két- két pont által rendre meghatározott szakaszfelező merőlegeseknek egyetlen közös (M) pontjuk kell, hogy legyen:



H a 3 pont egy egyenesen fekszik, akkor nincs ilyen pont, ha nem, akkor pontosan egy ilyen pont van.

Ha több (4, 5, …) megadott pont van, akkor is legfeljebb egy pont rendelkezik a kívánt tulajdonsággal

Összefoglalva:

Pontosan egy pont van (M) azokban az esetekben, ha a megadott pontok egy körvonalon vannak, és ekkor m a kör középpontja. (A kör, mint azon pontok halmaza, amelyek egyetlen ponttól egyenlő távol vannak ismert már.)

A tanulók kereshetnek olyan sokszögeket is, amelyeknek pontjai a körön találhatók. Így megadható 4, 5… pont úgy is, (mint megfelelő sokszögek csúcspontjai), - hogy előzőleg nem kell kört rajzolniuk, ahol az M adott. Fontos, hogy olyan sokszöget is keressenek, amely esetében nem létezik ilyen pont, pl. olyan paralelogramma, ami nem téglalap.

A feladat megoldása során gyakorlásra kerül például az elemi geometriai problémamegoldás, a szakaszfelező merőleges, mint ponthalmaz, valamint az indoklások készítése.

A 2. feladat az 1. feladat továbbvitele. A szögfelező fogalmát a szimmetriára építi. A tanulók ezen a lapon csak a hegyesszöggel foglalkoznak, mivel $\alpha > 90º$ esetén olyan pontok vannak a szögtartományban, amelyek távolsága a félegyenesektől és az egyenesektől különböző. (vö. 4.3).

Analógia: két szögszár egyértelműen meghatározza a szimmetriatengelyét, akárcsak két pont is egyértelműen meghatározza a szimmetriatengelyét.

A „szögfelező" megnevezés itt közlés (információ a feladatlapon).

A különböző reprezentációs szintek közötti váltás itt is segíti a tanulókat a megértésben.

A 2 a) feladatban a tanulók szögmérővel rajzolják meg a szög szögfelezőjét (szög felezése) – így a szöget tudatosan osztják két egyenlő részre – és felismerik, hogy a hajtásél egyaránt szimmetriatengely és szögfelező.

A 2 b) feladat esetében tudatos az eljárás, hogy egy szögszáron kiválasztott bármely A pontnak a másik szögszáron egy tükörképe van A'; a szimmetriatengely az AA' szakasznak is felező merőlegese.

(Szerkesztési feladat: A, t → A')

E megfigyelés segítségével szerkeszthető meg körzővel és vonalzóval a 2c) feladatban a szögfelező (a szög szimmetriatengelye) mint két olyan pont által meghatározott szakasz felező merőlegese, amelyek a szög csúcsától egyenlő távol és különböző szögszárakon vannak. A szögfelező szerkesztése az 1 a) feladatból ismert és itt már eszközként kerül alkalmazásra. (Rekonstrukciós feladat: szimmetriatengely két szögszárhoz.)

Gyakorlásra kerülnek többek között a problémamegoldás elemi, a tengelyes szimmetria tulajdonságai, a szakaszfelező merőleges szerkesztése, a körző és vonalzó használata, megfelelő ábrák készítése és értelmezése, absztrahálás és konkretizálás megfigyelések esetében, ismert eljárások részben új szituációban való alkalmazása.

Az 1. házi feladat egy megbeszélést készít elő a következő órára arról, hogy milyen esetben van egy, illetve végtelen sok megoldás, valamint mely esetben nincs megoldás.

A megoldás során például gyakorlásra kerül: a szakaszfelező merőleges, mint ponthalmaz, szakaszfelező merőleges szerkesztése, indoklások készítése.

A 2. házi feladat sokoldalú gyakorlási lehetőséget kínál, valamint azt a tapasztalatot, hogy a szögfelező (szimmetriatengely) pontjai a két szögszártól egyenlő távol vannak, de a szögtartomány ezektől különböző pontjainak a két szögszártól való távolsága különböző.

- Feladat

Gondolja meg, milyen megoldások várhatók el (és például milyen nem) a tanulóktól az eddigiek alapján erre a 2. házi feladatra!

M.

Elvárható megoldás

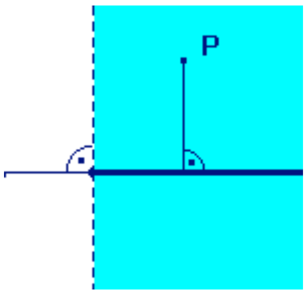
Ez a feladat a következő órához előkészítő jellegű. Alapvetően kétféle tanulói megoldás várható:

- A távolságok helyes szerkesztése, mivel figyelmen kívül hagyják, hogy itt egy félegyenesről és nem egy egyenesről van szó, noha a tanulók csak a pont és egyenes távolságát ismerik.
- Észreveszik, hogy itt a félegyenes-pont távolságáról van szó, és ezért nem készítenek megoldást („Nem tudom” válasszal).

Kevésbé várható megoldás:

Helyes szerkesztés, azzal az indoklással, hogy ebben a szögtartományban a pont-egyenes és pont-félegyenes távolság ugyanaz.

A pont ugyanis ugyanabban a(félegyenesek kezdőpontjába állított merőlegesek által meghatározott) félsíkban van, mint a félegyenesek.



A tanulók már ismerik is a két ponthalmaz távolságára vonatkozó definíciót az ötödik osztályból,de ezzel ebben a helyzetben nem tudnak mit kezdeni. Ezért fontos, hogy az említett definícióból kiindulva végezzenek vizsgálatot a pont és félegyenes távolságára vonatkozóan (vö. következő fejezet).

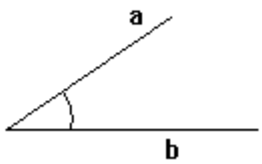
Az eljárás során gyakorlásra kerül a szögfelező szerkesztése, merőleges állítása adott pontból adott egyeneshez, pont-egyenes távolsága, egyéni megfigyelések megfogalmazása, körző és vonalzó használata, megfelelő ábrák készítése, indoklások készítés.

A matematikában jobb képességet és érdeklődést mutató tanulók számára további problémák fogalmazhatók meg (például házi feladatként önálló munkára,) ha a keresett pontok két szögszártól való távolságára más feltételeket adunk. A megoldáshoz nem kell feltétlenül a szögfelezőt használni.

További házi feladatok:

A)

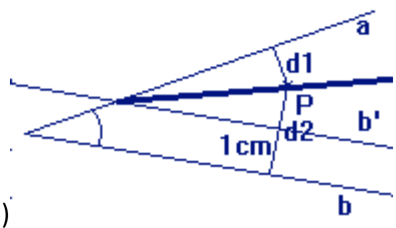
Hol vannak a következő tulajdonságú pontok: a Pontok mindkét szögszártól való távolságának különbsége 1 cm.



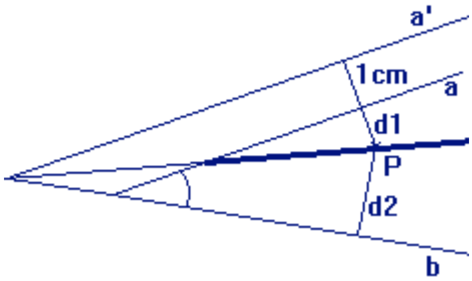
Megoldás:

A tanulók az a) vagy a b) ábra segítségével dolgozhatnak.

Legyen P egy ilyen tulajdonságú pont.



a)



b)

Ha a (P,a) = d_1 távolság és a (P,b) = d_2 távolság esetén fennáll, hogy $d_2 - d_1 = 1$ vagy $d_2 = d_1 + 1$, és a b' (a') egyenes párhuzamos a b (a) egyenessel, valamint a P ponttól $d_1 + 1 = d_2$ távolságra van, akkor P rajta van az (a, b') ill. (a', b) szögek szögfelezőjén.

A keresett pontok az (a, b') ill. (a' b) szög felező egyenesének azon pontjai, amelyek a szögtartományba esnek.

Hasonló további feladatok találhatók feladatgyűjteményekben, például Horvay/Reimann: Geometriai feladatok gyűjteménye I, .22.o.)

További lehetséges feladat

B)

Hol vannak a következő tulajdonsággal rendelkező pontok: A pontok egy derékszög mindkét szögszárától való távolságának összege egy adott szakasszal egyenlő?

2. *A félegyenestől való távolság vizsgálata a síkon*

Kiindulásként vegyük a következő tételt és definíciót:

„Tétel:

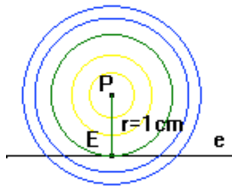
Egy pontból egy rajta át nem haladó egyenes pontjaihoz vezető szakaszok közül legrövidebb az egyenesre merőleges szakasz.

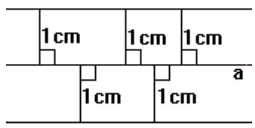
Definíció:

Általában két alakzat távolságának nevezzük egy-egy pontjuk távolságát akkor, ha egymástól ennél kisebb távolságra levő pontjaik nincsenek. Tételünk bizonyítja, hogy amit pont és egyenes távolságának nevezünk, az ebben az értelemben is távolság” (Hajós, 1971, 62o.)

A vizsgálathoz feltesszük, hogy a következők már ismertek:

- Két pont távolsága és annak vizsgálata, hogy a síkon a körvonal azon pontok halmaza, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak.
- Pont – egyenes távolsága és annak vizsgálata, hogy párhuzamos egyenesek olyan pontok halmazának is tekinthetők a síkban, amelyek egy adott egyenestől egyenlő távol vannak.
  Ennek során az összehasonlításhoz eszközként kerül alkalmazásra a kör. Az egyenest érintő kör a sík pontjait három osztályba sorolja az adott távolságot figyelembe véve: a kör középpontjától kisebb, egyenlő illetve nagyobb távolságra levő pontok (vö. ábra, ahol az E az érintési pont).
  A hetedik osztályban a legrövidebb összekötő szakasz kérdése még előkerül a következő tétellel kapcsolatban:
  „Egy háromszögben hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van, (vö. pl. Csatár, 7 osztály, 2002, 31.o.).



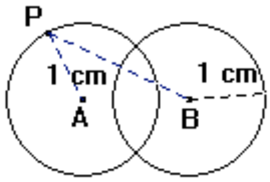


  - Két egyenes távolsága: párhuzamos egyenesek esetén ez a távolság a két egyenest összekötő merőleges szakasz hossza. Egymást metsző egyenesek esetén ez a távolság 0, mivel ezeknek van egy közös pontjuk.

A felső tagozaton már szerepelnek olyan vizsgálatok, ahol a ponthalmazok távolsága nem merőleges szakasz segítségével definiált. Ennek során az alkalmazott módszer mindig abban áll, hogy a távolságot megfelelő módon választott pontpár távolsága adja meg.

Egy ilyen vizsgálatra következik példa, egy feladatsorozat segítségével, amely akár már 6. osztályban elvégezhető:

a) **Add meg azon pontok halmazát, amely egy két (különböző) A,és B pontból álló ponthalmaztól 1cm-re vannak!**

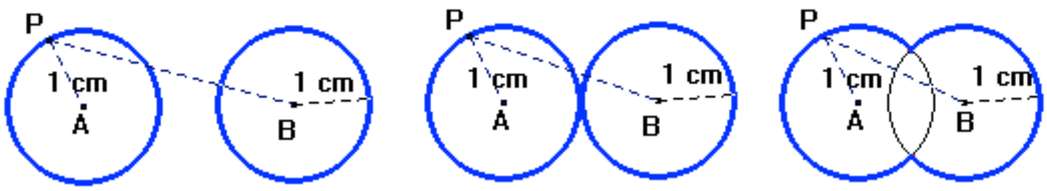


A távolság definíciójának megfelelően a PA és PB szakaszokat kell egymással és a megadott távolsággal összehasonlítani (P az A ill. B középpontú, 1 cm sugarú körvonalak egy tetszőleges pontja.) ld. ábra.
Azokat a pontokat keressük, amelyek esetében mindkét szakasz legalább 1cm hosszú és egy közülük éppen 1 cm-es.

A feltételek szétválasztása gyakran alkalmazott stratégia.
Ennek megfelelően először azon pontok halmazát keressük, amelyek az A ponttól illetve a B ponttól 1 cm-re vannak (A illetve B pontok körül 1 cm sugárral rajzolt körvonalak)
Mivel a P pontnak teljesítenie kell vagy a PA = 1 cm vagy PB = 1cm feltételt, ezért a keresett ponthalmaz a két körvonal egyesítése.
Az A körüli körvonal pontjai közül ki kell zárni azokat, amelyek B-hez közelebb helyezkednek el. Az előbbi II. feladatlapon már bizonyításra került, hogy az AB szakasz felezőmerőlegese által meghatározott félsíkokat tekintve a B-t tartalmazó félsíkban levő pontok vannak B-hez közelebb.
Az {A,B} ponthalmaztól való távolságot az A-t tartalmazó félsíkban PA-val, a B-t tartalmazó félsíkban PB – vel lehet mérni.

Emiatt az A körüli körvonal pontjai közül ki kell hagyni azokat, amelyeket tartalmazza a B körül rajzolt körvonal (ha vannak ilyenek) és hasonlóan kell eljárni a B körül rajzolt kör pontjaival is.

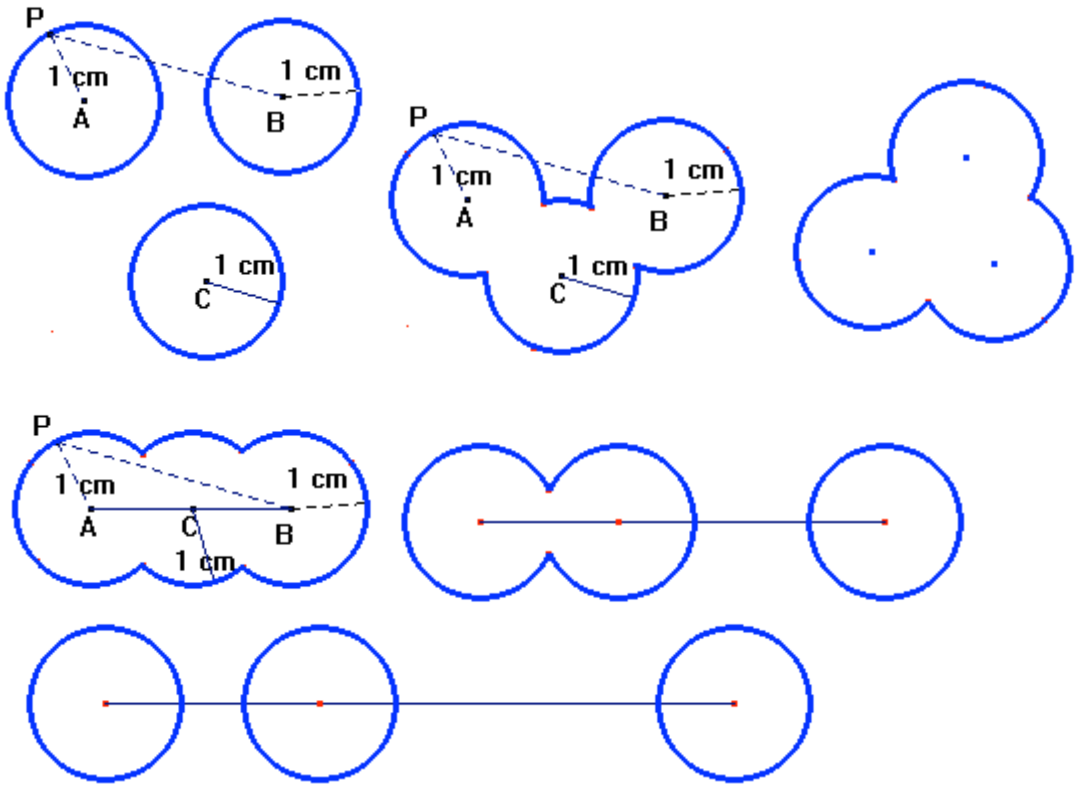
Ennek alapján az A és B pontok egymáshoz viszonyított lehetséges elhelyezkedéseit figyelembe véve a következő megoldási lehetőségek adódnak:



- Feladat

Adja meg azon pontok halmazát, amelyek egy három pontból (A, B, C) álló ponthalmaztól 1cm-re vannak!
M.

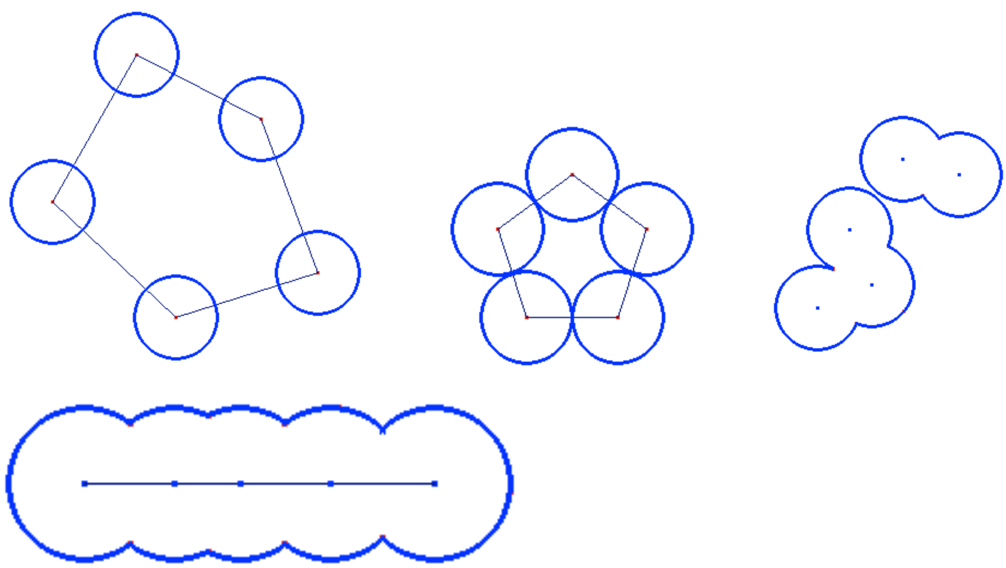
Néhány megoldási lehetőség aszerint, hogy a pontok hogyan helyezkednek el:



- Feladat

Adja meg azon pontok halmazát, amelyek egy öt pontból (A, B, C, D, E) álló ponthalmaztól 1cm-re vannak!
M.

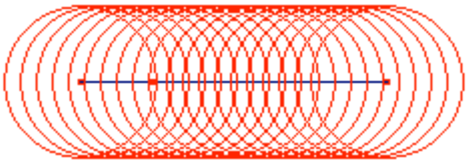
Néhány megoldási lehetőség aszerint, hogy a pontok hogyan helyezkednek el:



A továbbiakban azokra az esetekre figyelünk, melyeknél a pontok egy egyenesen helyezkednek el.

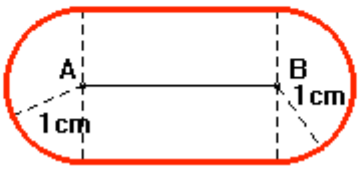
b) **Hol helyezkednek el az előbbi módon keresett pontok, ha a kiindulási ponthalmaz pontjai az AB szakaszon helyezkednek el?**

Lehetséges tanulói válasz: A keresett pontok az A és B körüli köríveken és az ezek közötti köríveken helyezkednek el, amelyek azonban egyre kisebbek lesznek ahogyan egyre több AB szakaszbeli pontból áll az eredeti ponthalmaz (vö. előző ábra is).



- Feladat

Adja meg azon pontok halmazát, amelyek az AB szakasz minden pontjától 1-cm-re vannak! Gondolja meg, hogyan indokolhat az előbbi vizsgálatot végigkövető tanuló.
M.



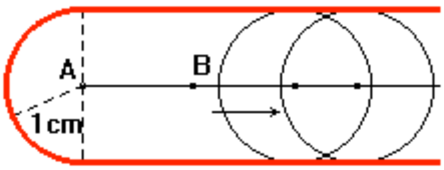
Lehetséges tanulói válasz: A „közbülső" körívek egyre kisebbek lesznek, így végül két szakasz keletkezik. A keresett ponthalmaz két félkörből (A és B körül) és két párhuzamos szakaszból áll.

(stadiongörbe)

ábra

- Feladat

Hol helyezkednek el a síkban azok a pontok, amelyek egy A kezdőpontú félegyenestől 1cm távolságra vannak. Gondolja meg a lehetséges tanulói választ ebben az esetben is!
M.



Lehetséges tanulói válasz: Ha a B pont a félegyenesen A felől tovább mozog, akkor ponthalmazként egy félkört és két párhuzamos félegyenest kapok.

ábra

Megjegyzés:

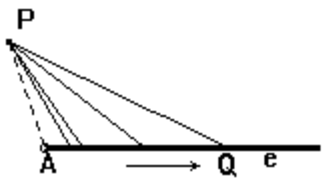
Ez a vizsgálat érdekes lehet hatodikos tanulók számára az előbbiekben szereplő II. feladatlap után, mivel itt is két ponttal dolgozunk (tovább) de más értelemben. A II. feladatlap 1. feladatában a két pont két ponthalmaz volt, míg ebben az esetben két pont egyetlen ponthalmazt alkot.

Egy másik mód egyetlen pont félegyenestől való távolságának vizsgálatához- az összekötő szakaszok közvetlen összehasonlításával:

Egy P pont félegyenestől való távolságát a P-ből az egyenesre húzott merőleges talppontjának és P-nek a távolsága adja, ha a talppont a félegyenesen van. Amennyiben a talppont a félegyenesen kívül esik (a komplementer félegyenesre) akkor P távolságát a félegyenestől a P pont és a félegyenes kiindulási pontjának távolsága adja.
Mivel a P-ből az egyenesre húzott merőleges szakasz adja a legkisebb összekötő szakaszt P és a félegyenes között, így nincsen ennél kisebb szakasz az egyenes részhalmazát (félegyenes) tekintve sem.

Tehát a minimumtulajdonságot csak azon pontok esetében kell bizonyítani, ahol a merőleges talppontja a komplementer félegyenesre esik.

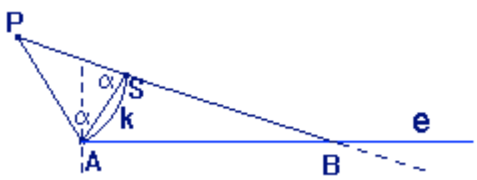
A hatodikos korosztály esetében már lehetséges például a következő heurisztikus magyarázat:



A P pontot a félegyenes pontjaival összekötő szakaszok hossza növekszik, ha a félegyenesen levő pont (Q) távolodik az A ponttól. (Ezt a tanulók méréssel állapíthatják meg.)

A korábban már említett tankönyvben (Csatár 7.o.) a P pont és az e félegyenes távolsága további vizsgálatra kerül.

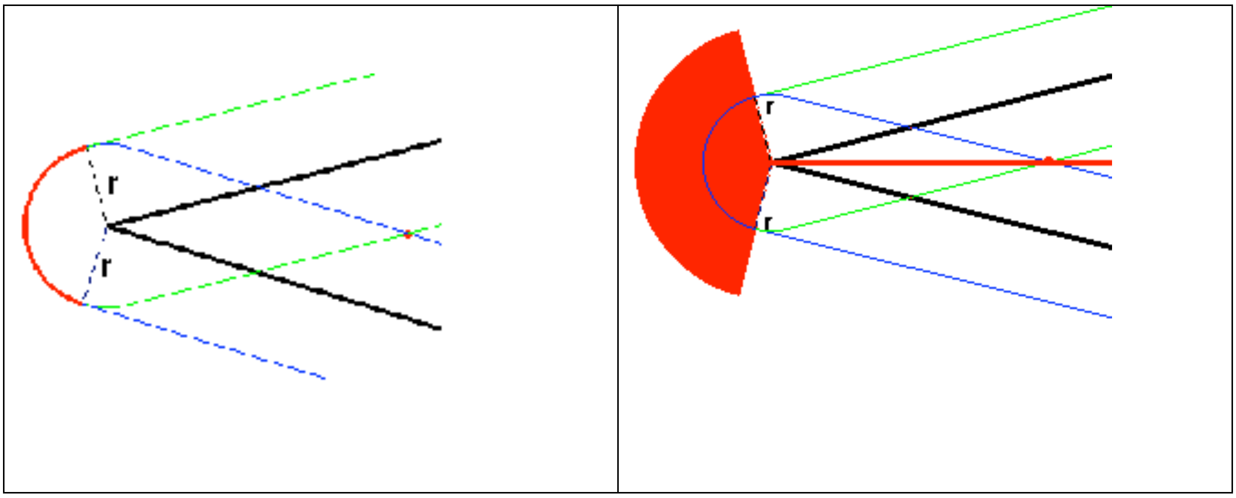
Legyen B egy tetszőleges pont a félegyenesen és k egy kör P körül r=PA. S jelöli a k metszéspontját a PB félegyenessel.



A PAS háromszög egyenlőszárú, így az A-nál és S-nél levő belső szögek egyenlőek ist gleichschenklig, (α). Az α hegyesszög, mivel 2α < 180° (A háromszög belső szögeinek összege). A PAB tompaszög (P helyzete miatt!) így fennáll, hogy α < PAB szög. Emiatt az AS szakasz a PAB szögtartományban van. Ez azt jelenti, hogy S a P és B pontok között van. Abból hogy PS a PB szakasz egy része és mivel PS = PA következik, hogy PA < PB minden tetszőleges pontra a félegyenesen.

- Feladat

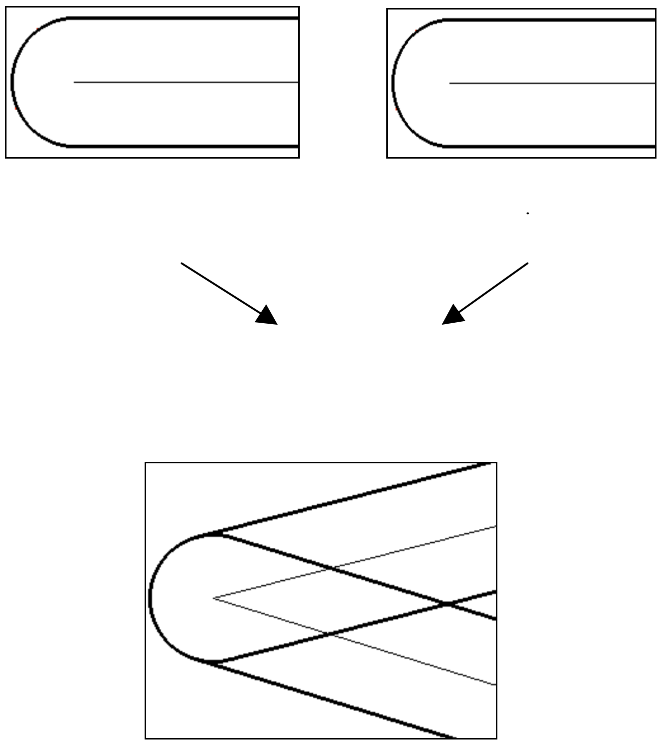
Hol vannak a síkon azok a pontok, amelyek két közös kezdőpontú félegyenestől (szögszárak) egy adott r távolságra vannak?
M.
A ponthalmaz a következő ábrán pirossal jelölve látható.

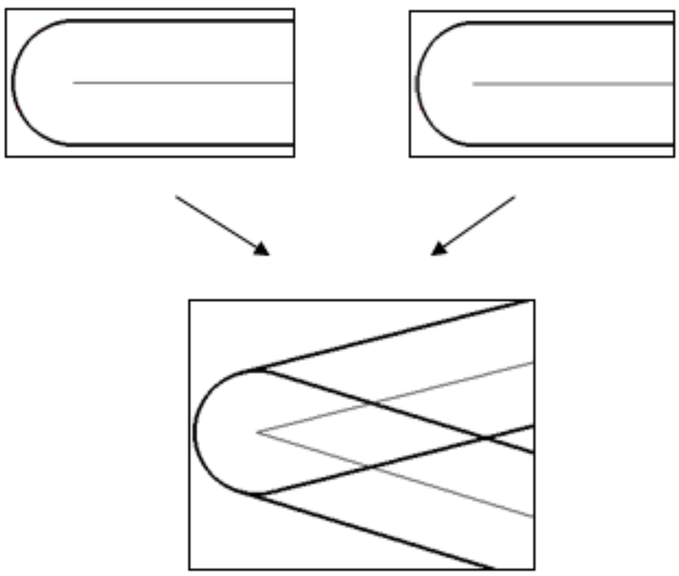


Megjegyzés: A piros félegyenes minden pontja egyenlő távol van a két szögszártól, így ez a félegyenes a konvex szögtartomány szögfelezője.

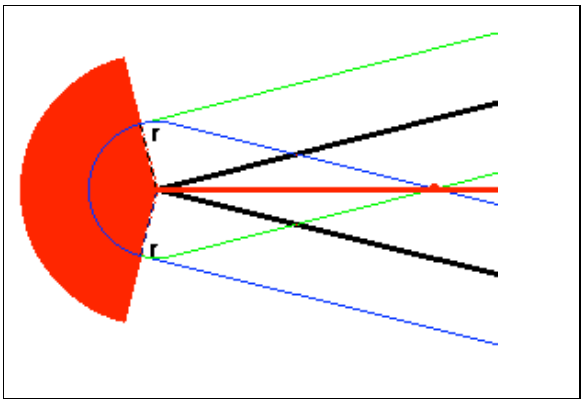
Szemléltetési lehetőség „hagyományos" eszközökkel

egymásra tehető fóliák:





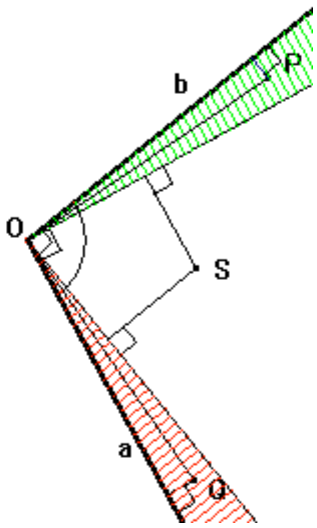
Az interaktív CABRI program segítségével a következő kép kapható:



Esetleg: A GeoGebra programmal a következő kép kapható:

Megjegyzés

- Ha a szög kisebb, mint 90° egy pont szögszáraktól mért távolságát a pontból a szárakra húzott merőleges szakaszokkal mérhetjük.
- Ha a szög nagyobb, mint 90° vannak olyan pontok, amelyeknek az egyik szögszártól való távolságát a pont és a szögcsúcsának távolsága adja.



A zöld és piros tartományban a P pontok ‚a' szögszártól való távolságát az OP szakasz hossza, és a Q pontok ‚b' szögszártól való távolságát az OQ szakasz hossza adja.

Mivel a II. feladatlapon csak hegyes szöggel dolgoztak a tanulók, ilyen nehézségük nem volt.

Irodalom:

Ambrus, A. / Hortobágyi, I.: Einige Tendenzen im problemlösenden Mathematikunterricht in Ungarn, In: Der Mathematikunterricht Heft 6, 2001, S. 6-17

Báthory, Z. / Falus, I. (Hrsg.): Pedagógiai Lexikon [Pädagogisches Lexikon, ungarisch], Keraban Budapest, 1997

Csatár, K. (Hrsg.): Matematika 5. osztály [Lehrbuch für Mathematik 5. Klasse]. Apáczai Kiadó Celldömölk, 2002

Csatár, K. (Hrsg.): Matematika 6. osztály [Lehrbuch für Mathematik 6. Klasse]. Apáczai Kiadó Celldömölk, 2000

Csatár, K. (Hrsg.): Matematika 7. osztály [Lehrbuch für Mathematik 7. Klasse]. Apáczai Kiadó Celldömölk, 2002

Derschau, D.: Die Problematik von Hausaufgaben. In: Zeitschrift für Pädagogik, 1977/2 , S. 159-181

Hajdú, S. (Hrsg).: Matematika 6 [Lehrbuch für Mathematik 6. Klasse], Műszaki Kiadó Budapest, 2000

Hajdú, S. (Hrsg).: Matematika 7 [Lehrbuch für Mathematik 7. Klasse], Műszaki Kiadó Budapest, 1999

Hajós, Gy.: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó Budapest, 1971

Horvay, K. / Reimann, I.: Geometriai feladatok gyűjteménye I [Sammlung von geometrischen Aufgaben I], Tankönyvkiadó, Budapest, 1970

Majoros, M. / Vásárhelyi, É.: Oktatási szituációk [Situationen im Unterricht] Vortrag an der Lehrerfortbildung Rátz László, 1998

Parisot, K. J. / Herber, H.-J. / Astleitner, H. / Vásárhelyi, É. Analogie und Problemlösen, In: Parisot, K. J. / Vásárhelyi, É. (Hrsg.), Trends im Geometrieunterricht. Abakus Verlag, Salzburg, 1996, S. 87-94

Schönbrunn, G.: Hausaufgaben in der pädagogischen Diskussion In: Der Mathematikunterricht 1989/3, S. 5-22

Atkinson, R. K. , Derry, S. J. , Renkl, A. , Wortham, D. Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research, Review of Educational Research, Vol. 70. No. 2, 181-214

Baddeley, A.: Az emberi emlékezet, Osiris Budapest, 2005

Clark, R. E. , Kirschner, P. A. Sweller, J. :Why minimal guidance during instruction does not work, Educational Psychologist 41 (2) 2006 75-86

Cognitive Science Septagram, Wikipedia, the free Encyclopedia, (2015. 02. 28)

Cooper, G.: Research into Cognitive Load Theory and Instructional Design at UNSW University of New South Wales, Australia 1998

Hattie, J. :Visible Learning and the Science of How We Learn. Routledge London 2014, XI

Kárteszi Ferenc előadásai az ELTE TTK Matematikai Szakmódszertani Csoportjában, 1980

Kirschner, P. Kirschner, Pass, F.: Cognitive Load Theory 2009. Education.com, Internet (2015. 02. 28)

Learning curve. Wikipedia, the free Encyclopaedia, 2015. 02. 28

Matematika 9, Második kötet, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, 2014

Mayer, R. E. : Applying the Science of Learning Pearson New York 2011, 38

Merrienboer, J. G., Pass, F. , Sweller, J. : Cognitive Architecture and Instructional Design. Educational Psychology Review Vol. 10, No 3 1998, 251-295

Oláh Gy. szerk.: Határon túli matematika-versenyek. Typotex 1999, 102-103

Sokszínű Matematika 8. osztály Mozaik Kiadó Szeged 2010, 98-113

Sweller, J. , Clark, R. E., Kirschner, P. A.: Mathematical Ability Relies on Knowledge, Too, American Educator, Winter 2010-2011, 34-35

Trotsenko, J. :Attention and Memory, Project Management Institute, Downtown Meeting 2014